Produit scalaire — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Le produit scalaire est l'outil qui relie les LONGUEURS et les ANGLES. Deux écritures, un seul objet : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$ du côté géométrique, $xx' + yy'$ du côté des coordonnées. De là découlent trois usages constants en STI2D : tester une perpendicularité (produit scalaire nul), calculer un angle dans une structure, et calculer le TRAVAIL d'une force, qui n'est rien d'autre que $W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$. Le théorème d'Al-Kashi complète l'outillage : il généralise Pythagore à tous les triangles. Ces 20 exercices corrigés parcourent ce programme, de l'application directe au problème type bac sur un treillis ou un plan incliné. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/produit-scalaire

Exercice 1 – Produit scalaire avec un angle

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et forment un angle $\theta = 60°$.

1. Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. Que devient ce produit scalaire si l'angle vaut $120°$?

Exercice 2 – Produit scalaire en coordonnées

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(3\,;-2)$ et $\vec{v}(4\,;5)$.

1. Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. Calcule $\vec{u}\cdot\vec{u}$ et compare avec $\|\vec{u}\|^2$.

Exercice 3 – Norme d'un vecteur

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1\,;2)$, $B(5\,;5)$ et $C(-2\,;6)$.

1. Calcule $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.

2. Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Exercice 4 – Critère d'orthogonalité

On considère $\vec{u}(6\,;-4)$, $\vec{v}(2\,;3)$ et $\vec{w}(-3\,;2)$.

1. Parmi ces trois vecteurs, quels couples sont orthogonaux ?

2. Quels couples sont colinéaires ?

Exercice 5 – Vecteurs colinéaires : les deux cas

Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 5 et $\vec{v}$ un vecteur de norme 3.

1. Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$ si les deux vecteurs sont colinéaires de MÊME sens.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ s'ils sont colinéaires de sens CONTRAIRES.

3. Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ s'ils sont orthogonaux ?

Exercice 6 – Calculer un angle

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(3\,;4)$ et $\vec{v}(5\,;0)$.

1. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

2. Déduis la mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, arrondie au degré.

Exercice 7 – Projection orthogonale et travail

Un chariot est tiré sur 20 m par une force de 150 N dont la direction fait un angle de 30° avec le déplacement horizontal.

1. Calcule le travail de cette force, en joules.

2. Quelle est la composante utile (horizontale) de la force ?

3. Que vaudrait le travail si la force était verticale ?

Exercice 8 – Développer avec la bilinéarité

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$.

1. Développe et calcule $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

2. Calcule $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, puis $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Exercice 9 – Deux vecteurs orthogonaux à trouver

On considère $\vec{u}(4\,;-3)$ et $\vec{v}(x\,;8)$, où x est un réel.

1. Détermine x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

2. Détermine x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Exercice 10 – Triangle rectangle en coordonnées

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1\,;2)$, $B(3\,;4)$ et $C(5\,;0)$.

1. Calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2. Le triangle ABC est-il rectangle ?

3. Calcule son aire.

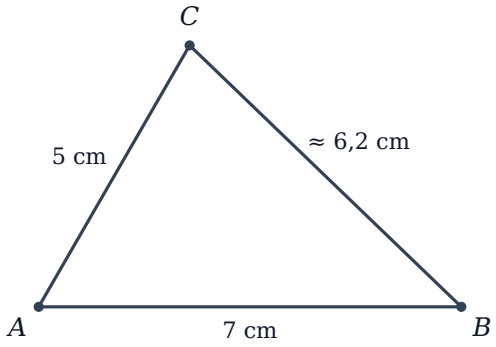
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Al-Kashi : calculer un côté

Dans un triangle ABC, on connaît $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm et l'angle $\hat{A} = 60°$.

1. Calcule BC, valeur exacte puis arrondie au millimètre.

2. Pourquoi ne pouvait-on pas utiliser le théorème de Pythagore ?



Triangle ABC : AB = 7 cm, AC = 5 cm, angle en A de 60°

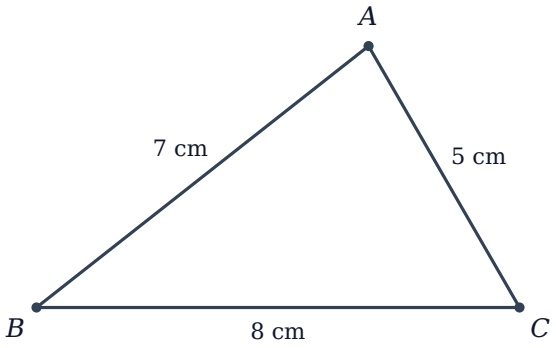
Exercice 12 – Al-Kashi : calculer un angle

Un triangle a pour côtés 5 cm, 7 cm et 8 cm.

1. Calcule le cosinus de l'angle opposé au côté de 8 cm.

2. Déduis la mesure de cet angle, arrondie au degré.

3. Le triangle est-il rectangle ?



Triangle de côtés 5 cm, 7 cm et 8 cm : l'angle en A vaut ≈ 82°

Exercice 13 – Force sur un plan incliné

Une caisse de 40 kg est tirée sur 12 m le long d'un plan incliné à 20° par rapport à l'horizontale. On prend $g = 9{,}81$ N/kg, et on note que le poids est vertical, dirigé vers le bas.

1. Calcule la norme du poids.

2. Calcule le travail du poids lors de ce déplacement.

3. Interprète le signe obtenu.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Hauteur par projection

Dans un repère orthonormé, $A(0\,;0)$, $B(8\,;0)$ et $C(2\,;5)$.

1. Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2. Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H de C sur (AB).

3. Calcule la distance CH, puis l'aire du triangle.

Exercice 15 – Reconnaître un rectangle

Dans un repère orthonormé coté en centimètres, une plaque a pour sommets $A(0\,;0)$, $B(6\,;2)$, $C(5\,;5)$ et $D(-1\,;3)$.

1. Montre que $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Montre qu'il possède un angle droit.

3. Conclus sur sa nature et calcule son aire.

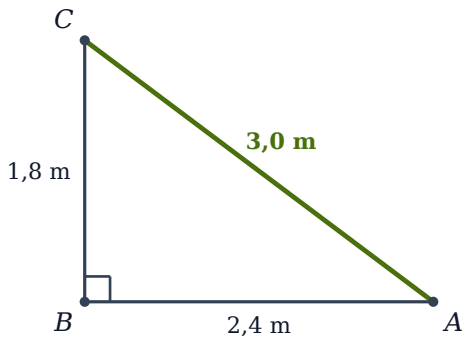
Exercice 16 – Type bac : angles d'un treillis

Un treillis métallique comporte un triangle de barres de longueurs $AB = 2{,}4$ m, $BC = 1{,}8$ m et $AC = 3{,}0$ m.

1. Montre que ce triangle est rectangle et précise en quel sommet.

2. Calcule les deux autres angles, arrondis au degré.

3. Calcule l'aire de ce triangle.



Triangle du treillis, rectangle en B

Exercice 17 – Type bac : deux forces sur un chariot

Un chariot se déplace horizontalement de A vers B sur 15 m. Il subit une force de traction $\vec{F}_1$ de 200 N inclinée de 25° au-dessus de l'horizontale, et une force de frottement $\vec{F}_2$ de 60 N, horizontale, opposée au déplacement.

1. Calcule le travail de chaque force.

2. Calcule le travail total.

3. Quelle inclinaison de $\vec{F}_1$ rendrait le travail total nul ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : perpendicularité d’un assemblage

Dans un plan coté en centimètres, trois points d’ancrage sont $A(1\,;1)$, $B(7\,;4)$ et $C(4\,;m)$, où m est un réglage à déterminer.

1. Détermine m pour que (AB) et (AC) soient perpendiculaires.

2. Pour cette valeur de m, calcule les longueurs AB et AC.

3. Calcule alors la longueur BC et vérifie Pythagore.

Exercice 19 – Type bac : Al-Kashi et aire d’une pièce

Une pièce triangulaire a deux côtés de 9 cm et 12 cm formant entre eux un angle de 110°.

1. Calcule la longueur du troisième côté, arrondie au millimètre.

2. Calcule l’aire de la pièce, sachant que $A = \dfrac{1}{2}bc\sin\hat{A}$.

3. Calcule le plus petit angle du triangle.

Exercice 20 – Type bac : équilibre de deux câbles

Une charge est suspendue par deux câbles. Dans un repère orthonormé en newtons, les tensions sont $\vec{T}_1(-120\,;160)$ et $\vec{T}_2(t\,;180)$, où $t>0$.

1. Calcule $\|\vec{T}_1\|$.

2. Détermine t pour que les deux câbles soient perpendiculaires.

3. Pour cette valeur, calcule $\|\vec{T}_2\|$ et la résultante $\vec{T}_1+\vec{T}_2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Produit scalaire avec un angle

Définition géométrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$.

Avec $\theta = 60°$: $\cos 60° = \frac{1}{2}$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 12$.

Avec $\theta = 120°$: $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -12$.

Le produit scalaire change de SIGNE avec l'angle : positif si l'angle est aigu, nul s'il est droit, négatif s'il est obtus.

Interprétation : le signe dit si les deux vecteurs « vont plutôt dans le même sens » (positif) ou « plutôt en sens contraires » (négatif).

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$ pour $60° \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = -12$ pour $120°$.

Rappel de cours. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$: le résultat est un NOMBRE, pas un vecteur.

Erreur fréquente. Écrire le résultat sous forme de vecteur (avec une flèche). Un produit scalaire est un scalaire, c'est-à-dire un réel.

Correction de l'exercice 2 – Produit scalaire en coordonnées

En base orthonormée : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + (-2) \times 5 = 12 - 10 = 2$.

$\vec{u} \cdot \vec{u} = 3 \times 3 + (-2) \times (-2) = 9 + 4 = 13$.

Par ailleurs $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$, donc $\|\vec{u}\|^2 = 13$.

Les deux résultats coïncident : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. C'est cohérent avec la définition géométrique, l'angle d'un vecteur avec lui-même étant nul ($\cos 0 = 1$).

Cette égalité est très utilisée : elle permet de passer d'un carré de longueur à un produit scalaire, et inversement.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{u} = 13 = \|\vec{u}\|^2$.

Rappel de cours. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ (repère ORTHONORMÉ) $\cdot\ \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Erreur fréquente. Multiplier les coordonnées « en croix » ($xy' + yx'$) : la formule associe les abscisses entre elles et les ordonnées entre elles.

Correction de l'exercice 3 – Norme d'un vecteur

Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $(5 - 1\,;\,5 - 2) = (4\,;\,3)$.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

Coordonnées de $\overrightarrow{AC}$: $(-2 - 1\,;\,6 - 2) = (-3\,;\,4)$.

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times (-3) + 3 \times 4 = -12 + 12 = 0$.

Le produit scalaire est NUL : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A (et même isocèle, les deux côtés valant 5).

Réponse. $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 5 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$: triangle rectangle isocèle en A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Erreur fréquente. Calculer $\overrightarrow{AB}$ comme $(x_A - x_B\,;y_A - y_B)$: on obtiendrait le vecteur opposé. L'arrivée moins le départ, toujours.

Correction de l'exercice 4 – Critère d'orthogonalité

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 6\times 2 + (-4)\times 3 = 12 - 12 = 0$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ORTHOGONAUX.

$\vec{u}\cdot\vec{w} = 6\times(-3) + (-4)\times 2 = -18 - 8 = -26 \neq 0$: pas orthogonaux.

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 2\times(-3) + 3\times 2 = -6 + 6 = 0$: $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ORTHOGONAUX.

Pour la colinéarité, on calcule le déterminant $xy' - yx'$. Pour $\vec{u}$ et $\vec{w}$:
$6\times 2 - (-4)\times(-3) = 12 - 12 = 0$: ils sont COLINÉAIRES.

On le voit directement : $\vec{u} = -2\,\vec{w}$ (car $-2\times(-3) = 6$ et $-2\times 2 = -4$).

Cohérence d'ensemble : $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, donc ils sont tous deux orthogonaux au même vecteur $\vec{v}$ ✔ (et l'on retrouve $\vec{u}\cdot\vec{w} = -26 = -2\|\vec{w}\|^2$, avec $\|\vec{w}\|^2 = 13$).

Réponse. $\vec{u}\perp\vec{v}$ et $\vec{v}\perp\vec{w}$ · $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires ($\vec{u} = -2\vec{w}$).

Rappel de cours. Orthogonaux $\Leftrightarrow xx' + yy' = 0$ · colinéaires $\Leftrightarrow xy' - yx' = 0$. Deux tests différents, à ne pas confondre.

Erreur fréquente. Utiliser le produit scalaire pour tester la colinéarité. Un produit scalaire non nul ne dit rien sur la colinéarité.

Correction de l'exercice 5 – Vecteurs colinéaires : les deux cas

Même sens : l'angle vaut 0, donc $\cos 0 = 1$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\times 3\times 1 = 15$.

Sens contraires : l'angle vaut 180°, donc $\cos 180° = -1$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\times 3\times(-1) = -15$.

Orthogonaux : l'angle vaut 90°, donc $\cos 90° = 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

À retenir : le produit scalaire est compris entre $-\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ et $+\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$, c'est-à-dire ici entre -15 et 15.

Les valeurs extrêmes correspondent aux vecteurs colinéaires, la valeur nulle à l'orthogonalité. Un produit scalaire de 20 avec ces normes serait donc impossible.

Réponse. Même sens : 15 · sens contraires : -15 · orthogonaux : 0.

Rappel de cours. $-\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \le \vec{u}\cdot\vec{v} \le \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$: les extrêmes sont atteints pour des vecteurs colinéaires.

Erreur fréquente. Oublier le signe négatif pour des vecteurs de sens contraires : le produit scalaire vaut -15, pas 15.

Correction de l'exercice 6 – Calculer un angle

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 5 + 4\times 0 = 15$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{9+16} = 5$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{25+0} = 5$.

On utilise la définition géométrique pour isoler le cosinus : $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$.

$\cos\theta = \dfrac{15}{5\times 5} = \dfrac{15}{25} = 0{,}6$.

À la calculatrice, $\theta = \arccos(0{,}6) \approx 53{,}13°$, soit environ 53°.

Contrôle de vraisemblance : $\cos\theta = 0{,}6 > 0$, l'angle est donc aigu ✔. Et $\vec{v}$ étant porté par l'axe des abscisses, l'angle cherché est simplement l'inclinaison de $\vec{u}(3\,;4)$, dont la pente $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$ correspond bien à environ 53°.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 15$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 5 \cdot \cos\theta = 0{,}6$ donc $\theta \approx 53°$.

Rappel de cours. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$, puis $\theta = \arccos(\ldots)$.

Erreur fréquente. Oublier de diviser par le produit des normes : $\arccos(15)$ n'existe pas, le cosinus étant toujours dans $[-1\,;1]$.

Correction de l'exercice 7 – Projection orthogonale et travail

Le travail d'une force est le produit scalaire $W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\| \times AB \times \cos\theta$.

$W = 150 \times 20 \times \cos 30° = 3\,000 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1\,500\sqrt{3}$.

$1\,500\sqrt{3} \approx 2\,598$ J.

Composante utile : c'est la PROJECTION de la force sur la direction du déplacement, soit $150\cos 30° = 150 \times 0{,}866 \approx 129{,}9$ N.

Contrôle : cette composante multipliée par la distance donne $129{,}9 \times 20 \approx 2\,598$ J ✔ — même résultat, ce qui illustre bien que le produit scalaire « ne retient que la projection ».

Si la force était verticale, l'angle avec le déplacement horizontal serait de 90°, donc $\cos 90° = 0$ et $W = 0$ J.

Conclusion physique : une force perpendiculaire au déplacement ne travaille PAS. C'est pour cela que le poids ne travaille pas lors d'un déplacement horizontal.

Réponse. $W = 1\,500\sqrt{3} \approx 2\,598$ J · composante utile $\approx 129{,}9$ N · travail nul si la force est verticale.

Rappel de cours. $W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$: seule la composante de la force DANS la direction du déplacement travaille.

Erreur fréquente. Multiplier $150 \times 20 = 3\,000$ J sans tenir compte de l'angle : on surestime le travail de 15%.

Correction de l'exercice 8 – Développer avec la bilinéarité

Le produit scalaire se développe comme un produit de nombres (bilinéarité) :
$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v}$.

Comme $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (symétrie), les deux termes du milieu se compensent : il reste $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = 9 - 25 = -16$.

Pour la norme de la somme : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 9 + 2 \times (-4) + 25 = 9 - 8 + 25 = 26$.

Donc $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{26} \approx 5{,}10$.

Remarque : $\sqrt{26} < 3 + 5 = 8$. C'est normal, l'inégalité triangulaire impose $\|\vec{u}+\vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, avec égalité seulement pour des vecteurs de même sens.

Réponse. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = -16$ · $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 26$ donc $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{26} \approx 5{,}1$.

Rappel de cours. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$: l'identité remarquable vaut aussi pour les vecteurs.

Erreur fréquente. Écrire $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 8$. Les normes ne s'additionnent que si les vecteurs sont colinéaires de même sens.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Deux vecteurs orthogonaux à trouver

Orthogonalité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, soit $4x + (-3) \times 8 = 0$.

$4x - 24 = 0$, donc $x = 6$. Le vecteur $\vec{v}(6\,;8)$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Contrôle : $4 \times 6 + (-3) \times 8 = 24 - 24 = 0$ ✔.

Colinéarité : le déterminant doit être nul, soit $4 \times 8 - (-3) \times x = 0$.

$32 + 3x = 0$, donc $x = -\dfrac{32}{3} \approx -10{,}67$.

Contrôle : $\vec{v}\left(-\frac{32}{3}\,;8\right)$ est bien colinéaire à $\vec{u}(4\,;-3)$, car $\vec{v} = -\dfrac{8}{3}\vec{u}$ (en effet $-\frac{8}{3} \times 4 = -\frac{32}{3}$ et $-\frac{8}{3} \times (-3) = 8$) ✔.

Observation : les deux valeurs de x sont très différentes — l'orthogonalité et la colinéarité sont deux conditions indépendantes, chacune donnant UNE équation.

Réponse. Orthogonaux pour $x = 6$ · colinéaires pour $x = -\dfrac{32}{3}$.

Rappel de cours. Une condition d'orthogonalité ou de colinéarité donne une ÉQUATION du premier degré en l'inconnue.

Erreur fréquente. Utiliser le produit scalaire pour la seconde question : on retrouverait $x = 6$, qui est la réponse à la première.

Correction de l'exercice 10 – Triangle rectangle en coordonnées

$\overrightarrow{BA} = (-1 - 3\,;2 - 4) = (-4\,;-2)$ et $\overrightarrow{BC} = (5 - 3\,;0 - 4) = (2\,;-4)$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4) \times 2 + (-2) \times (-4) = -8 + 8 = 0$.

Le produit scalaire est nul : les côtés $[BA]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires. Le triangle est donc RECTANGLE EN B.

Longueurs des côtés de l'angle droit : $BA = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $BC = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Aire d'un triangle rectangle : la moitié du produit des côtés de l'angle droit.

$A = \dfrac{2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{2} = \dfrac{4 \times 5}{2} = 10$ unités d'aire.

Contrôle : le triangle est rectangle ISOCÈLE en B (les deux côtés valant $2\sqrt{5}$), et son hypoténuse vaut $AC = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Vérification par Pythagore : $20 + 20 = 40$ ✔.

Réponse. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$: le triangle est rectangle (et isocèle) en B · aire = 10 unités d'aire.

Rappel de cours. Pour tester un angle droit EN B, on calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$: les deux vecteurs partent du sommet testé.

Erreur fréquente. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$: les vecteurs ne partent pas du même point, le résultat ne teste pas l'angle en B (ici on trouverait $8 - 8 = 0$ par coïncidence de signes, mais la méthode est fausse).

Correction de l'exercice 11 – Al-Kashi : calculer un côté

Théorème d'Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\hat{A}$.

$BC^2 = 49 + 25 - 2 \times 7 \times 5 \times \cos 60°$.

$\cos 60° = 0{,}5$, donc $2 \times 7 \times 5 \times 0{,}5 = 35$.

$BC^2 = 74 - 35 = 39$.

$BC = \sqrt{39} \approx 6{,}245$, soit environ 6,2 cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pythagore ne s'applique pas : le triangle n'est pas rectangle (l'angle connu vaut 60°). Al-Kashi est justement sa généralisation.

Vérification du lien : si $\hat{A}$ valait 90°, alors $\cos 90° = 0$, le terme correctif disparaîtrait et l'on retrouverait $BC^2 = AB^2 + AC^2$, c'est-à-dire Pythagore exactement.

Contrôle de vraisemblance : $BC = 6{,}2$ est bien compris entre $7 - 5 = 2$ et $7 + 5 = 12$, comme l'exige l'inégalité triangulaire ✔.

Réponse. $BC = \sqrt{39} \approx 6{,}2$ cm · Pythagore est réservé aux triangles rectangles ; Al-Kashi le généralise.

Rappel de cours. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$, où a est le côté OPPOSÉ à l'angle $\hat{A}$.

Erreur fréquente. Additionner le terme correctif au lieu de le retrancher : on trouverait $BC = \sqrt{109} \approx 10{,}4$ cm, ce qui est incompatible avec un angle aigu de 60°.

Correction de l'exercice 12 – Al-Kashi : calculer un angle

On note $a = 8$ le côté opposé à l'angle cherché $\hat{A}$, avec $b = 5$ et $c = 7$.

Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$, soit $64 = 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos\hat{A}$.

$64 = 74 - 70\cos\hat{A}$, donc $70\cos\hat{A} = 74 - 64 = 10$.

$\cos\hat{A} = \dfrac{10}{70} = \dfrac{1}{7} \approx 0{,}1429$.

$\hat{A} = \arccos\left(\dfrac{1}{7}\right) \approx 81{,}79°$, soit environ 82°.

Le triangle n'est donc PAS rectangle : l'angle le plus grand vaut 82° et non 90°.

Contrôle par Pythagore : $5^2 + 7^2 = 74$ alors que $8^2 = 64$. Comme $64 < 74$, l'angle opposé au plus grand côté est AIGU ✔ — cohérent avec 82°.

Règle utile : si $a^2 < b^2 + c^2$, l'angle $\hat{A}$ est aigu ; s'il est égal, l'angle est droit ; s'il est plus grand, l'angle est obtus.

Réponse. $\cos\hat{A} = \dfrac{1}{7}$ · $\hat{A} \approx 82°$ · le triangle n'est pas rectangle ($64 \neq 74$).

Rappel de cours. Al-Kashi se retourne pour donner un angle : $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Erreur fréquente. Prendre le côté de 8 cm pour b ou c : dans la formule, a est TOUJOURS le côté opposé à l'angle cherché.

Correction de l'exercice 13 – Force sur un plan incliné

Norme du poids : $P = m\,g = 40 \times 9{,}81 = 392{,}4$ N.

Le déplacement fait un angle de 20° avec l'horizontale, donc un angle de $90° + 20° = 110°$ avec le poids (vertical vers le bas), puisque la caisse MONTE.

Travail : $W = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = P \times AB \times \cos 110°$.

$\cos 110° \approx -0{,}342$, donc $W \approx 392{,}4 \times 12 \times (-0{,}342) \approx -1\,610{,}8$ J.

Le travail est NÉGATIF : le poids s'oppose au déplacement. On dit qu'il est résistant.

Contrôle par une autre route : le travail du poids ne dépend que du dénivelé, $h = 12\sin 20° \approx 4{,}104$ m. On attend $W = -P\,h \approx -392{,}4 \times 4{,}104 \approx -1\,610{,}5$ J ✔ (l'écart vient des arrondis).

Interprétation : il faut fournir au moins 1 611 J pour élever cette caisse de 4,1 m — c'est l'énergie que « coûte » la montée, indépendamment de la longueur de la pente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $P = 392{,}4$ N · $W \approx -1\,611$ J · travail négatif : le poids est une force résistante lors d'une montée.

Rappel de cours. $W = \|\vec{F}\| \times AB \times \cos\theta$, avec θ l'angle entre la FORCE et le DÉPLACEMENT. Un cos négatif donne un travail résistant.

Erreur fréquente. Prendre $\theta = 20°$: c'est l'angle du plan avec l'horizontale, pas l'angle entre le poids et le déplacement, qui vaut 110°.

Correction de l'exercice 14 – Hauteur par projection

$\overrightarrow{AB}(8\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;5)$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8\times 2 + 0\times 5 = 16$.

Le projeté H appartient à (AB), qui est l'axe des abscisses : donc $H(x_H\,;0)$.

La longueur AH se lit dans le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ lorsque H est du même côté que B (projection sur une direction).

Ici $AB = 8$, donc $8 \times AH = 16$ et $AH = 2$.

Ainsi $H(2\,;0)$ — ce qui se voit aussi directement : le projeté de $C(2\,;5)$ sur l'axe des abscisses a la même abscisse.

CH : $\overrightarrow{HC}(0\,;5)$, donc $CH = 5$.

Aire du triangle : $A = \dfrac{AB \times CH}{2} = \dfrac{8\times 5}{2} = 20$ unités d'aire.

Contrôle de l'orthogonalité : $\overrightarrow{HC}(0\,;5)$ et $\overrightarrow{AB}(8\,;0)$ donnent $0\times 8 + 5\times 0 = 0$ ✔ H est bien le projeté orthogonal.

Réponse. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 16$ · $H(2\,;0)$ · $CH = 5$ et aire = 20 unités d'aire.

Rappel de cours. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) : le produit scalaire MESURE la projection.

Erreur fréquente. Confondre AH (projection, ici 2) et AC (longueur réelle, ici $\sqrt{29} \approx 5{,}39$).

Correction de l'exercice 15 – Reconnaître un rectangle

$\overrightarrow{AB} = (6\,;2)$ et $\overrightarrow{DC} = (5-(-1)\,;5-3) = (6\,;2)$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: le quadrilatère $ABCD$ est donc un PARALLÉLOGRAMME.

Pour l'angle droit, on teste l'angle en A : $\overrightarrow{AB} = (6\,;2)$ et $\overrightarrow{AD} = (-1\,;3)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 6\times(-1) + 2\times 3 = -6 + 6 = 0$.

Le produit scalaire est nul : l'angle en A est DROIT.

Un parallélogramme ayant un angle droit est un RECTANGLE.

Dimensions : $AB = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32$ cm et $AD = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ cm.

Aire : $A = AB \times AD = 2\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 2\times 10 = 20$ cm².

Contrôle : la plaque est deux fois plus longue que large ($AB = 2\times AD$) ✔, et son aire de 20 cm² est cohérente avec $6{,}32 \times 3{,}16 \approx 20$ ✔.

Remarque : ce n'est pas un carré, puisque les côtés consécutifs ne sont pas égaux.

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (6\,;2)$: parallélogramme · $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$: angle droit en A · c'est un rectangle de $2\sqrt{10}$ cm sur $\sqrt{10}$ cm, d'aire 20 cm².

Rappel de cours. Parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) + un angle droit (produit scalaire nul) ⇒ rectangle.

Erreur fréquente. Tester $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$: ces deux vecteurs sont égaux, leur produit scalaire

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

vaut 40 et ne renseigne pas sur les angles. Il faut deux côtés CONSÉCUTIFS.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : angles d'un treillis

On compare le carré du plus grand côté à la somme des carrés des deux autres.

$AC^2 = 3^2 = 9$ et $AB^2 + BC^2 = 2{,}4^2 + 1{,}8^2 = 5{,}76 + 3{,}24 = 9$.

Les deux résultats sont égaux : d'après la réciproque de Pythagore, le triangle est RECTANGLE EN B.

(On reconnaît un triangle 3-4-5 à l'échelle 0,6 : $1{,}8 = 0{,}6 \times 3$, $2{,}4 = 0{,}6 \times 4$, $3 = 0{,}6 \times 5$.)

Angle en A : dans le triangle rectangle, $\cos\hat{A} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2{,}4}{3} = 0{,}8$.

$\hat{A} = \arccos(0{,}8) \approx 36{,}87°$, soit environ 37°.

Angle en C : la somme des angles valant 180°, $\hat{C} = 180 - 90 - 36{,}87 = 53{,}13°$, soit environ 53°.

Contrôle par Al-Kashi en C : $\cos\hat{C} = \dfrac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \times BC \times AC} = \dfrac{3{,}24 + 9 - 5{,}76}{2 \times 1{,}8 \times 3} = \dfrac{6{,}48}{10{,}8} = 0{,}6$, et $\arccos(0{,}6) \approx 53{,}13°$ ✔.

Aire : le triangle étant rectangle en B, $A = \dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{2{,}4 \times 1{,}8}{2} = \dfrac{4{,}32}{2} = 2{,}16$ m².

Lecture pour le bureau d'études : les angles de 37° et 53° sont les angles de coupe des barres aux nœuds A et C.

Réponse. $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9$: rectangle en B · $\hat{A} \approx 37°$ et $\hat{C} \approx 53°$ · aire = 2,16 m².

Rappel de cours. Réciproque de Pythagore : si $a^2 = b^2 + c^2$, le triangle est rectangle au sommet OPPOSÉ au côté a.

Erreur fréquente. Annoncer « rectangle en A » : l'angle droit est opposé au plus GRAND côté, ici AC, donc il est en B.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : deux forces sur un chariot

Travail de la traction : $W_1 = 200 \times 15 \times \cos 25°$.

$\cos 25° \approx 0{,}9063$, donc $W_1 \approx 3\,000 \times 0{,}9063 \approx 2\,718{,}9$ J.

Travail du frottement : la force est opposée au déplacement, donc l'angle vaut 180° et $\cos 180° = -1$.

$W_2 = 60 \times 15 \times (-1) = -900$ J.

Travail total : $W = W_1 + W_2 \approx 2\,718{,}9 - 900 = 1\,818{,}9$ J, soit environ 1 819 J.

Le travail total est positif : le chariot reçoit de l'énergie, il peut accélérer.

Dernière question : on cherche l'angle α tel que $200 \times 15 \times \cos\alpha - 900 = 0$.

$3\,000 \cos\alpha = 900$, donc $\cos\alpha = 0{,}3$.

$\alpha = \arccos(0{,}3) \approx 72{,}54°$, soit environ 73°.

Interprétation : si l'on tirait à plus de 73° au-dessus de l'horizontale, la composante utile de la traction ne suffirait plus à vaincre les frottements — le chariot ralentirait au lieu d'avancer. Tirer « trop haut » revient à gaspiller la force.

Contrôle : à $\alpha = 73°$, la composante horizontale vaut $200 \cos 73° \approx 58{,}5$ N, tout juste inférieure aux 60 N de frottement ✔.

Réponse. $W_1 \approx 2\,719$ J et $W_2 = -900$ J · travail total $\approx 1\,819$ J · travail nul pour une inclinaison d'environ 73°.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Les travaux s'ADDITIONNENT (avec leurs signes) : une force motrice travaille positivement, une force résistante négativement.

Erreur fréquente. Compter le frottement positivement : son travail est négatif, il faut le RETRANCHER.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : perpendicularité d'un assemblage

$\overrightarrow{AB} = (7-1\,;4-1) = (6\,;3)$ et $\overrightarrow{AC} = (4-1\,;m-1) = (3\,;m-1)$.

Perpendicularité : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, soit $6\times 3 + 3(m-1) = 0$.

$18 + 3m - 3 = 0$, donc $3m = -15$ et $m = -5$.

Le point C est donc $C(4\,;-5)$.

$AB = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}708$ cm.

$\overrightarrow{AC} = (3\,;-6)$, donc $AC = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}708$ cm. Le triangle est rectangle ISOCÈLE en A.

$\overrightarrow{BC} = (4-7\,;-5-4) = (-3\,;-9)$, donc $BC = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \approx 9{,}487$ cm.

Vérification de Pythagore : $AB^2 + AC^2 = 45 + 45 = 90$ et $BC^2 = 90$ ✔ L'égalité confirme l'angle droit en A.

Remarque de conception : avec $m = -5$, l'assemblage est équerré ET symétrique. Toute autre valeur de m donnerait un angle différent de 90° — par exemple $m = 0$ donnerait $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18 - 3 = 15 \neq 0$.

Réponse. $m = -5$ · $AB = AC = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7$ cm · $BC = 3\sqrt{10} \approx 9{,}5$ cm, et $45 + 45 = 90$ ✔.

Rappel de cours. Une condition de perpendicularité se traduit par UNE équation : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

Erreur fréquente. Développer $3(m-1)$ en $3m - 1$: on trouverait $m = -\frac{17}{3}$, et l'assemblage ne serait pas équerré.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : Al-Kashi et aire d'une pièce

Al-Kashi : $a^2 = 9^2 + 12^2 - 2\times 9\times 12\times\cos 110°$.

$a^2 = 81 + 144 - 216\cos 110°$. Or $\cos 110° \approx -0{,}342$.

$a^2 \approx 225 - 216\times(-0{,}342) = 225 + 73{,}87 = 298{,}87$.

$a \approx \sqrt{298{,}87} \approx 17{,}29$ cm, soit environ 17,3 cm.

Le cosinus étant négatif (angle obtus), le terme correctif s'AJOUTE : le côté opposé est plus long que l'hypoténuse qu'on aurait avec un angle droit ($\sqrt{225} = 15$ cm) ✔.

Aire : $A = \frac{1}{2}\times 9\times 12\times\sin 110°$. Or $\sin 110° \approx 0{,}9397$.

$A \approx 54\times 0{,}9397 \approx 50{,}7$ cm².

Le plus petit angle est opposé au plus petit côté, donc à celui de 9 cm. Notons-le $\hat{B}$.

Al-Kashi retourné : $\cos\hat{B} = \dfrac{12^2 + 17{,}29^2 - 9^2}{2\times 12\times 17{,}29} = \dfrac{144 + 298{,}9 - 81}{414{,}96} = \dfrac{361{,}9}{414{,}96} \approx 0{,}8721$.

$\hat{B} \approx \arccos(0{,}8721) \approx 29{,}26°$, soit environ 29°.

Contrôle : le troisième angle vaut $180 - 110 - 29{,}26 \approx 40{,}74°$. La somme $110 + 29{,}26 + 40{,}74 = 180°$ ✔, et l'ordre des angles suit bien celui des côtés ($9 < 12 < 17{,}3$ pour $29° < 41° < 110°$) ✔.

Réponse. Troisième côté ≈ 17,3 cm · aire ≈ 50,7 cm² · plus petit angle ≈ 29°.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Un angle OBTUS a un cosinus négatif : le terme $-2bc\cos\hat{A}$ devient positif et allonge le côté opposé.

Erreur fréquente. Utiliser $\cos 110° = 0{,}342$ sans le signe : on obtiendrait $a \approx 12{,}3$ cm, soit 5 cm d'erreur sur la pièce.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : équilibre de deux câbles

$\|\vec{T}_1\| = \sqrt{(-120)^2 + 160^2} = \sqrt{14\,400 + 25\,600} = \sqrt{40\,000} = 200$ N.

Perpendicularité : $\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2 = 0$, soit $-120t + 160 \times 180 = 0$.

$-120t + 28\,800 = 0$, donc $t = \dfrac{28\,800}{120} = 240$.

Ainsi $\vec{T}_2(240\,;180)$, et cette valeur respecte la contrainte $t > 0$ ✔.

$\|\vec{T}_2\| = \sqrt{240^2 + 180^2} = \sqrt{57\,600 + 32\,400} = \sqrt{90\,000} = 300$ N.

Résultante : $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = (-120 + 240\,;160 + 180) = (120\,;340)$.

Sa norme : $\sqrt{120^2 + 340^2} = \sqrt{14\,400 + 115\,600} = \sqrt{130\,000} \approx 360{,}6$ N.

Contrôle par le théorème de Pythagore : les deux tensions étant perpendiculaires, la norme de la résultante doit valoir $\sqrt{200^2 + 300^2} = \sqrt{130\,000}$ ✔ — exactement le même résultat.

Lecture mécanique : la résultante des deux tensions est dirigée vers le haut et à droite ; pour que la charge soit en équilibre, son poids devrait valoir 360,6 N et être exactement opposé — ce qui n'est pas le cas ici, la composante horizontale de 120 N n'étant pas compensée.

Réponse. $\|\vec{T}_1\| = 200$ N · $t = 240$ · $\|\vec{T}_2\| = 300$ N et $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = (120\,;340)$, de norme $\sqrt{130\,000} \approx 360{,}6$ N.

Rappel de cours. Deux vecteurs orthogonaux vérifient $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$: c'est Pythagore, écrit en vecteurs.

Erreur fréquente. Additionner les normes ($200 + 300 = 500$ N) pour obtenir celle de la résultante : on surestime de 39%. Les normes ne s'additionnent pas.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).