Produit scalaire — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Le produit scalaire est l'outil qui relie les LONGUEURS et les ANGLES. Deux écritures, un seul objet : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$ du côté géométrique, $xx' + yy'$ du côté des coordonnées. De là découlent trois usages constants en STI2D : tester une perpendicularité (produit scalaire nul), calculer un angle dans une structure, et calculer le TRAVAIL d'une force, qui n'est rien d'autre que $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. Le théorème d'Al-Kashi complète l'outillage : il généralise Pythagore à tous les triangles. Ces 20 exercices corrigés parcourent ce programme, de l'application directe au problème type bac sur un treillis ou un plan incliné. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/produit-scalaire

Exercice 1 – Produit scalaire avec un angle

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 6$ et forment un angle $\theta = 60°$.

1. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Que devient ce produit scalaire si l'angle vaut $120°$?

Exercice 2 – Produit scalaire en coordonnées

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(3\,;-2)$ et $\vec{v}(4\,;5)$.

1. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{u}$ et compare avec $\|\vec{u}\|^2$.

Exercice 3 – Norme d'un vecteur

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1\,;2)$, $B(5\,;5)$ et $C(-2\,;6)$.

1. Calcule $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.

2. Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 4 – Critère d'orthogonalité

On considère $\vec{u}(6\,;-4)$, $\vec{v}(2\,;3)$ et $\vec{w}(-3\,;2)$.

1. Parmi ces trois vecteurs, quels couples sont orthogonaux ?

2. Quels couples sont colinéaires ?

Exercice 5 – Vecteurs colinéaires : les deux cas

Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 5 et $\vec{v}$ un vecteur de norme 3.

1. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si les deux vecteurs sont colinéaires de MÊME sens.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ s'ils sont colinéaires de sens CONTRAIRES.

3. Que vaut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ s'ils sont orthogonaux ?

Exercice 6 – Calculer un angle

Dans un repère orthonormé, $\vec{u}(3\,;4)$ et $\vec{v}(5\,;0)$.

1. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

2. Déduis la mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, arrondie au degré.

Exercice 7 – Projection orthogonale et travail

Un chariot est tiré sur 20 m par une force de 150 N dont la direction fait un angle de 30° avec le déplacement horizontal.

1. Calcule le travail de cette force, en joules.

2. Quelle est la composante utile (horizontale) de la force ?

3. Que vaudrait le travail si la force était verticale ?

Exercice 8 – Développer avec la bilinéarité

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$.

1. Développe et calcule $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

2. Calcule $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, puis $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

Exercice 9 – Deux vecteurs orthogonaux à trouver

On considère $\vec{u}(4\,;-3)$ et $\vec{v}(x\,;8)$, où x est un réel.

1. Détermine x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

2. Détermine x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Exercice 10 – Triangle rectangle en coordonnées

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1\,;2)$, $B(3\,;4)$ et $C(5\,;0)$.

1. Calcule $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2. Le triangle ABC est-il rectangle ?

3. Calcule son aire.

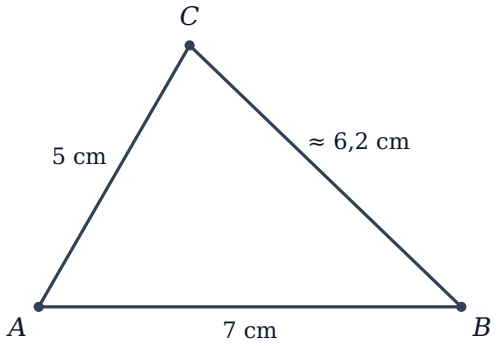
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Al-Kashi : calculer un côté

Dans un triangle ABC, on connaît $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm et l'angle $\hat{A} = 60°$.

1. Calcule BC, valeur exacte puis arrondie au millimètre.

2. Pourquoi ne pouvait-on pas utiliser le théorème de Pythagore ?



Triangle ABC : AB = 7 cm, AC = 5 cm, angle en A de 60°

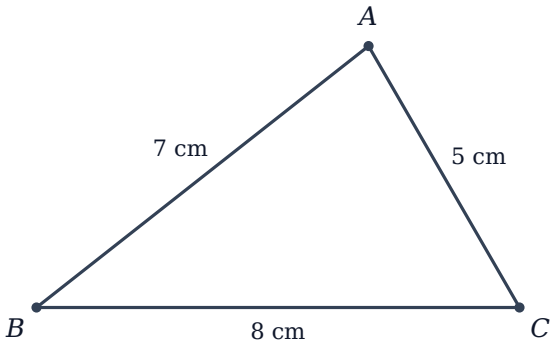
Exercice 12 – Al-Kashi : calculer un angle

Un triangle a pour côtés 5 cm, 7 cm et 8 cm.

1. Calcule le cosinus de l'angle opposé au côté de 8 cm.

2. Déduis la mesure de cet angle, arrondie au degré.

3. Le triangle est-il rectangle ?



Triangle de côtés 5 cm, 7 cm et 8 cm : l'angle en A vaut ≈ 82°

Exercice 13 – Force sur un plan incliné

Une caisse de 40 kg est tirée sur 12 m le long d'un plan incliné à 20° par rapport à l'horizontale. On prend $g = 9{,}81$ N/kg, et on note que le poids est vertical, dirigé vers le bas.

1. Calcule la norme du poids.

2. Calcule le travail du poids lors de ce déplacement.

3. Interprète le signe obtenu.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Hauteur par projection

Dans un repère orthonormé, $A(0\,;0)$, $B(8\,;0)$ et $C(2\,;5)$.

1. Calcule $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2. Détermine les coordonnées du projeté orthogonal H de C sur (AB).

3. Calcule la distance CH, puis l'aire du triangle.

Exercice 15 – Reconnaître un rectangle

Dans un repère orthonormé coté en centimètres, une plaque a pour sommets $A(0\,;0)$, $B(6\,;2)$, $C(5\,;5)$ et $D(-1\,;3)$.

1. Montre que $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Montre qu'il possède un angle droit.

3. Conclus sur sa nature et calcule son aire.

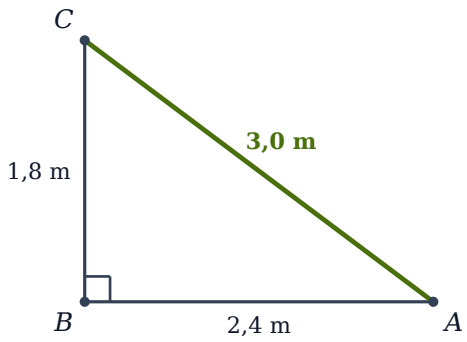
Exercice 16 – Type bac : angles d'un treillis

Un treillis métallique comporte un triangle de barres de longueurs $AB = 2{,}4$ m, $BC = 1{,}8$ m et $AC = 3{,}0$ m.

1. Montre que ce triangle est rectangle et précise en quel sommet.

2. Calcule les deux autres angles, arrondis au degré.

3. Calcule l'aire de ce triangle.



Triangle du treillis, rectangle en B

Exercice 17 – Type bac : deux forces sur un chariot

Un chariot se déplace horizontalement de A vers B sur 15 m. Il subit une force de traction $\vec{F}_1$ de 200 N inclinée de 25° au-dessus de l'horizontale, et une force de frottement $\vec{F}_2$ de 60 N, horizontale, opposée au déplacement.

1. Calcule le travail de chaque force.

2. Calcule le travail total.

3. Quelle inclinaison de $\vec{F}_1$ rendrait le travail total nul ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : perpendicularité d’un assemblage

Dans un plan coté en centimètres, trois points d’ancrage sont $A(1\,;1)$, $B(7\,;4)$ et $C(4\,;m)$, où m est un réglage à déterminer.

1. Détermine m pour que (AB) et (AC) soient perpendiculaires.

2. Pour cette valeur de m, calcule les longueurs AB et AC.

3. Calcule alors la longueur BC et vérifie Pythagore.

Exercice 19 – Type bac : Al-Kashi et aire d’une pièce

Une pièce triangulaire a deux côtés de 9 cm et 12 cm formant entre eux un angle de 110°.

1. Calcule la longueur du troisième côté, arrondie au millimètre.

2. Calcule l’aire de la pièce, sachant que $A = \dfrac{1}{2}bc\sin\hat{A}$.

3. Calcule le plus petit angle du triangle.

Exercice 20 – Type bac : équilibre de deux câbles

Une charge est suspendue par deux câbles. Dans un repère orthonormé en newtons, les tensions sont $\vec{T}_1(-120\,;160)$ et $\vec{T}_2(t\,;180)$, où $t>0$.

1. Calcule $\|\vec{T}_1\|$.

2. Détermine t pour que les deux câbles soient perpendiculaires.

3. Pour cette valeur, calcule $\|\vec{T}_2\|$ et la résultante $\vec{T}_1+\vec{T}_2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).