Répétition d’épreuves indépendantes — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Prélever quatre pièces à la suite, tester trois fois un composant, transmettre le même bit trois fois : à chaque fois on RÉPÈTE la même expérience à deux issues, dans les mêmes conditions et sans que les essais s’influencent. C’est le schéma de Bernoulli, et l’outil pour le traiter est l’arbre : on multiplie les probabilités le long d’un chemin, on additionne les chemins qui donnent le résultat cherché. Ces 20 exercices corrigés couvrent l’identification d’une épreuve de Bernoulli, les arbres à 2, 3 et 4 répétitions, le calcul de « au moins un succès » par l’évènement contraire, et les applications de fiabilité (redondance, vote majoritaire) typiques de la STI2D. La difficulté est croissante : l’énoncé puis la correction détaillée s’affichent d’un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/repetition-epreuves-independantes

Exercice 1 – Reconnaître une épreuve de Bernoulli

Quatre expériences sont proposées : ① on prélève une pièce et on note si elle est conforme ; ② on lance un dé à six faces et on note le résultat ; ③ on teste une soudure et on note si elle tient ; ④ on mesure la longueur d’une tige.

1. Lesquelles sont des épreuves de Bernoulli ?

2. Pour celles qui le sont, précise le succès et la probabilité p, en supposant 3% de pièces non conformes et 2% de soudures défaillantes.

Exercice 2 – Arbre de deux répétitions

On prélève successivement deux pièces dans une production comportant 10% de pièces défectueuses. Le stock est assez grand pour que les prélèvements soient indépendants. Succès S : « la pièce est défectueuse », $p = 0{,}1$.

1. Dessine (mentalement) l’arbre et donne les quatre issues.

2. Calcule la probabilité de chaque issue et vérifie la somme.

Exercice 3 – Deux succès consécutifs

Un automate réussit une opération de perçage avec une probabilité 0,96, indépendamment des autres opérations.

1. Quelle est la probabilité qu’il réussisse deux perçages consécutifs ?

2. Et trois perçages consécutifs ?

Exercice 4 – Au moins un succès sur deux essais

Un capteur détecte une pièce mal positionnée avec une probabilité 0,8 à chaque passage. La pièce passe deux fois devant le capteur, les détections étant indépendantes.

1. Quelle est la probabilité qu’elle ne soit détectée à aucun des deux passages ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Quelle est la probabilité qu'elle soit détectée au moins une fois ?

Exercice 5 – Compter les chemins d'un arbre à trois répétitions

On répète trois fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

1. Combien l'arbre comporte-t-il de chemins ?

2. Combien de chemins donnent exactement 0, 1, 2 puis 3 succès ?

Exercice 6 – Exactement un succès sur trois

Trois composants identiques sont testés. Chacun est défectueux avec une probabilité 0,2, indépendamment des autres.

1. Calcule la probabilité qu'exactement un composant soit défectueux.

2. Calcule la probabilité qu'exactement deux le soient.

Exercice 7 – Au moins un défaut sur trois prélèvements

Une production comporte 5% de pièces non conformes. On prélève trois pièces au hasard, les prélèvements étant indépendants.

1. Calcule la probabilité qu'aucune pièce ne soit non conforme.

2. Calcule la probabilité qu'au moins une pièce soit non conforme.

3. Combien de pièces faudrait-il prélever pour que cette probabilité dépasse 0,25 ?

Exercice 8 – Arbre à quatre répétitions

On répète quatre fois une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}5$ (lancer d'une pièce équilibrée, succès = pile).

1. Combien de chemins l'arbre comporte-t-il ?

2. Donne le nombre de chemins pour 0, 1, 2, 3 et 4 succès.

3. Calcule la probabilité d'obtenir exactement deux piles.

Exercice 9 – Loi du nombre de succès sur deux épreuves

Un test de mise sous tension réussit avec une probabilité 0,9. On le réalise deux fois de façon indépendante. On note X le nombre de réussites.

1. Quelles valeurs peut prendre X ?

2. Donne la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

Exercice 10 – Les conditions sont-elles remplies ?

Trois situations sont proposées : ① on prélève 3 pièces AVEC remise dans un lot de 50 dont 5 défectueuses ; ② on prélève 3 pièces SANS remise dans ce même lot de 50 ; ③ on prélève 3 pièces sans remise dans un lot de 100 000 dont 10% défectueuses.

1. Dans quels cas peut-on parler de répétition d'épreuves identiques et indépendantes ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Pour ②, calcule la probabilité que les trois pièces soient défectueuses et compare au calcul avec remise.

Exercice 11 – Redondance d’un système à trois composants

Un système de sécurité comporte trois détecteurs identiques et indépendants. Chacun fonctionne avec une probabilité 0,9.

1. Calcule la probabilité que les trois fonctionnent.

2. Calcule la probabilité qu’aucun ne fonctionne.

3. Le système est opérationnel dès qu’au moins un détecteur fonctionne. Calcule sa fiabilité.

4. Même question si le système exige au moins deux détecteurs en fonctionnement.

Exercice 12 – Loi du nombre de pièces défectueuses

Dans une production comportant 25% de pièces à retoucher, on prélève 3 pièces au hasard (prélèvements indépendants). On note X le nombre de pièces à retoucher.

1. Donne la loi de probabilité de X.

2. Calcule $P(X \geq 1)$ et $P(X \leq 2)$.

Exercice 13 – Quatre prélèvements de contrôle

Un contrôleur prélève 4 pièces en fin de ligne. Chaque pièce est non conforme avec une probabilité 0,1, indépendamment des autres. La production est arrêtée si au moins 2 pièces du prélèvement sont non conformes.

1. Calcule la probabilité qu’aucune pièce ne soit non conforme.

2. Calcule la probabilité qu’exactement une pièce soit non conforme.

3. Calcule la probabilité d’un arrêt de production.

Exercice 14 – Quel taux de réussite viser ?

Un robot dispose de trois tentatives indépendantes pour saisir une pièce. On veut que la probabilité de réussir au moins une saisie atteigne 0,99.

1. Traduis la condition par une inéquation portant sur la probabilité d’échec q d’une tentative.

2. Détermine la valeur maximale acceptable de q, puis le taux de réussite minimal p.

Exercice 15 – Fiabilité d’une ligne à quatre postes

Une pièce traverse quatre postes automatisés successifs. Chaque poste réalise correctement son opération avec une probabilité 0,97, indépendamment des autres. La pièce n’est conforme que si les quatre opérations sont réussies.

1. Calcule la probabilité qu’une pièce soit conforme.

2. Calcule la probabilité qu’au moins une opération échoue.

3. Sur une production de 5 000 pièces, combien de pièces non conformes prévoir ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Type bac : loi complète sur quatre essais

Un banc de test applique 4 cycles de charge identiques et indépendants à une soudure. À chaque cycle, la soudure casse avec une probabilité 0,15. On note X le nombre de cycles où elle casse (on suppose le test poursuivi jusqu’au bout, même après rupture).

1. Donne la loi de probabilité de X, en arrondissant à 10^{-4}.

2. Calcule $P(X \geq 1)$.

3. Calcule $P(X \geq 2)$ et commente.

Exercice 17 – Type bac : transmission avec vote majoritaire

Un capteur transmet un bit (0 ou 1). Chaque transmission est erronée avec une probabilité 0,1. Pour fiabiliser la liaison, le même bit est envoyé 3 fois et le récepteur retient la valeur majoritaire (au moins 2 transmissions concordantes). Les transmissions sont indépendantes.

1. Calcule la probabilité que le bit reçu soit correct SANS redondance.

2. Avec le vote majoritaire, calcule la probabilité que la valeur retenue soit correcte.

3. De quel facteur la probabilité d’erreur est-elle divisée ?

Exercice 18 – Type bac : deux stratégies de contrôle

Un atelier veut détecter un déréglage. Deux protocoles sont proposés : • protocole A : 2 mesures, chacune détectant le déréglage avec une probabilité 0,7 ; • protocole B : 4 mesures, chacune détectant le déréglage avec une probabilité 0,4. Les mesures sont indépendantes, et le déréglage est détecté si au moins une mesure le signale.

1. Calcule la probabilité de détection pour chaque protocole.

2. Quel protocole choisir ?

3. Combien faudrait-il de mesures au protocole B pour égaler le protocole A ?

Exercice 19 – Type bac : arbre et probabilité conditionnelle

Un test de mise en service est appliqué à trois équipements identiques et indépendants. Chaque équipement passe le test avec une probabilité 0,8. On note X le nombre d’équipements qui passent le test.

1. Donne la loi de X.

2. Sachant qu’au moins un équipement a échoué, quelle est la probabilité qu’exactement un ait échoué ?

3. Sachant que deux équipements au moins ont réussi, quelle est la probabilité que les trois aient réussi ?

Exercice 20 – Type bac : simuler la répétition en Python

On veut estimer par simulation la probabilité d’obtenir au moins 2 pièces défectueuses en prélevant 4 pièces dans une production en comportant 15%. On rappelle que `random()` renvoie un nombre au hasard dans [0 ; 1[.

1. Écris une fonction Python simulant un prélèvement de 4 pièces et renvoyant le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

nombre de pièces défectueuses.

2. Écris une fonction estimant la probabilité cherchée sur N simulations.

3. Calcule la valeur théorique et compare-la à ce que doit donner la simulation.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l’ordre des énoncés.

Correction de l’exercice 1 – Reconnaître une épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience à DEUX issues seulement, qu’on appelle succès et échec.

① Deux issues : conforme / non conforme. C’est une épreuve de Bernoulli ✔

② Six issues possibles (1 à 6) : ce n’est PAS une épreuve de Bernoulli en l’état. (Elle le deviendrait si l’on notait seulement « obtenir 6 » ou non.)

③ Deux issues : la soudure tient / ne tient pas. C’est une épreuve de Bernoulli ✔

④ Une infinité de valeurs possibles : ce n’est pas une épreuve de Bernoulli. (Elle le deviendrait avec un critère du type « la tige est-elle dans la tolérance ? ».)

Pour ① : en choisissant « la pièce est conforme » comme succès, $p = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$.

Pour ③ : en choisissant « la soudure tient » comme succès, $p = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

Remarque : le choix du succès est libre, il suffit de l’annoncer. On aurait pu prendre « la pièce est défectueuse » avec $p = 0{,}03$ — tous les calculs suivants s’adapteraient.

Réponse. ① et ③ sont des épreuves de Bernoulli · ② et ④ non (plus de deux issues) · $p = 0{,}97$ pour ① et $p = 0{,}98$ pour ③ avec « ça passe » comme succès.

Rappel de cours. Épreuve de Bernoulli : DEUX issues, un succès de probabilité p, un échec de probabilité $1 - p$.

Erreur fréquente. Oublier de préciser ce qu’on appelle succès. Sans cette phrase, $p = 0{,}97$ et $p = 0{,}03$ sont toutes deux « justes » — et la correction devient illisible.

Correction de l’exercice 2 – Arbre de deux répétitions

À chaque prélèvement, deux branches : S (défectueuse, 0,1) ou $\overline{S}$ (conforme, 0,9). Deux prélèvements donnent $2 \times 2 = 4$ issues.

Les quatre issues sont SS, $S\overline{S}$, $\overline{S}S$ et $\overline{S}\,\overline{S}$.

$P(SS) = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$.

$P(S\overline{S}) = 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}09$.

$P(\overline{S}S) = 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}09$.

$P(\overline{S}\,\overline{S}) = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$.

Somme : $0{,}01 + 0{,}09 + 0{,}09 + 0{,}81 = 1$ ✔ C’est le contrôle indispensable.

À noter : $S\overline{S}$ et $\overline{S}S$ ont la même probabilité (0,09) mais ce sont DEUX issues distinctes de l’arbre. C’est pour cela qu’« exactement une pièce défectueuse » vaut 0,18 et non 0,09.

Réponse. $P(SS) = 0{,}01$ · $P(S\overline{S}) = P(\overline{S}S) = 0{,}09$ · $P(\overline{S}\,\overline{S}) = 0{,}81$ · somme = 1.

Rappel de cours. n répétitions d’une épreuve à deux issues donnent 2^n chemins sur l’arbre.

Erreur fréquente. Confondre $S\overline{S}$ et $\overline{S}S$ en un seul cas : l’ORDRE compte sur un arbre, ce sont deux chemins différents.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Deux succès consécutifs

Les opérations sont indépendantes : la probabilité d’une succession de réussites est le PRODUIT des probabilités.

Deux perçages : $0{,}96 \times 0{,}96 = 0{,}96^2 = 0{,}921\,6$.

Trois perçages : $0{,}96^3 = 0{,}884\,736 \approx 0{,}885$.

Observation importante : chaque opération est très fiable (96%), mais la fiabilité de la SÉRIE baisse à chaque étape : 96%, puis 92,2%, puis 88,5%.

Sur 10 opérations, il resterait $0{,}96^{10} \approx 0{,}665$: une chance sur trois qu’au moins une opération échoue. C’est le raisonnement qui impose des contrôles intermédiaires sur une ligne de production longue.

Réponse. $0{,}96^2 = 0{,}921\,6$ pour deux perçages · $0{,}96^3 \approx 0{,}885$ pour trois.

Rappel de cours. n succès consécutifs d’épreuves indépendantes : p^n. La fiabilité d’une série DÉCROÎT avec le nombre d’étapes.

Erreur fréquente. Calculer $0{,}96 \times 2 = 1{,}92$: une probabilité ne dépasse jamais 1. Les répétitions se MULTIPLIENT.

Correction de l’exercice 4 – Au moins un succès sur deux essais

Non-détection à un passage : $1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Aucune détection sur deux passages : $0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$.

« Au moins une détection » est l’évènement CONTRAIRE de « aucune détection ».

Donc $P(\text{au moins une}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

Contrôle par la somme des chemins favorables :
$P(S\overline{S}) + P(\overline{S}S) + P(SS) = 0{,}64 + 0{,}16 + 0{,}16 = 0{,}96$ ✔.

Le passage par l’évènement contraire est beaucoup plus rapide : UN produit au lieu de trois, et le gain grandit avec le nombre d’essais.

Réponse. Aucune détection : 0,04 · au moins une détection : 0,96.

Rappel de cours. « Au moins un succès » $= 1 - P(\text{aucun succès}) = 1 - (1-p)^n$.

Erreur fréquente. Additionner $0{,}8 + 0{,}8 = 1{,}6$: impossible pour une probabilité. Le mot clé « au moins un » appelle l’évènement contraire.

Correction de l’exercice 5 – Compter les chemins d’un arbre à trois répétitions

Chaque répétition double le nombre de chemins : 2, puis 4, puis 8. L’arbre a donc 8 chemins.

Listons-les : SSS, $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$, $S\overline{S}\,\overline{S}$, $\overline{S}SS$, $\overline{S}S\overline{S}$, $\overline{S}\,\overline{S}S$, $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$.

0 succès : un seul chemin, $\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}$.

1 succès : trois chemins, selon la position du succès (1re, 2e ou 3e épreuve).

2 succès : trois chemins, selon la position de l’unique échec.

3 succès : un seul chemin, SSS.

Contrôle : $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ ✔ On retrouve bien le nombre total de chemins.

Cette suite de comptages (1-3-3-1) est à connaître pour $n = 3$, comme 1-2-1 pour $n = 2$ et 1-4-6-4-1 pour $n = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. 8 chemins au total · 1 chemin pour 0 succès, 3 pour 1, 3 pour 2, 1 pour 3 (somme 8).

Rappel de cours. $n = 2 \to$ 1-2-1 · $n = 3 \to$ 1-3-3-1 · $n = 4 \to$ 1-4-6-4-1. Total 2^n.

Erreur fréquente. Croire qu'il y a un seul chemin pour « 1 succès ». Le succès peut arriver à trois moments différents : ce sont trois chemins.

Correction de l'exercice 6 – Exactement un succès sur trois

Succès S : « le composant est défectueux », $p = 0{,}2$, donc $1 - p = 0{,}8$.

Un chemin à exactement un succès, par exemple $S\overline{S}\,\overline{S}$, a pour probabilité $0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}128$.

Les deux autres chemins ($\overline{S}S\overline{S}$ et $\overline{S}\,\overline{S}S$) ont la MÊME probabilité : les mêmes facteurs, dans un autre ordre.

Il y a 3 chemins, donc P(exactement un) $= 3 \times 0{,}128 = 0{,}384$.

Pour exactement deux succès : un chemin vaut $0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}032$, et il y a également 3 chemins.

P(exactement deux) $= 3 \times 0{,}032 = 0{,}096$.

Contrôle global : $P(0) = 0{,}8^3 = 0{,}512$; $P(1) = 0{,}384$; $P(2) = 0{,}096$; $P(3) = 0{,}2^3 = 0{,}008$. Somme : $0{,}512 + 0{,}384 + 0{,}096 + 0{,}008 = 1$ ✔.

Réponse. P(exactement un) $= 3 \times 0{,}2 \times 0{,}8^2 = 0{,}384$ · P(exactement deux) $= 3 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8 = 0{,}096$.

Rappel de cours. Tous les chemins à k succès ont la même probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$: on la calcule une fois, puis on multiplie par le NOMBRE de chemins.

Erreur fréquente. Oublier de multiplier par 3 : on obtiendrait 0,128, soit la probabilité d'un seul chemin précis (« le premier est défectueux, les deux autres non »).

Correction de l'exercice 7 – Au moins un défaut sur trois prélèvements

Probabilité qu'une pièce soit conforme : 0,95.

Aucune non conforme sur trois : $0{,}95^3 = 0{,}857\,375 \approx 0{,}857$.

Au moins une non conforme : $1 - 0{,}857\,375 = 0{,}142\,625 \approx 0{,}143$.

Pour la troisième question, on cherche n tel que $1 - 0{,}95^n > 0{,}25$, c'est-à-dire $0{,}95^n < 0{,}75$.

On teste ($n \leq 4$ étant la limite du programme, on prolonge ici le calcul à titre de prévision) : $0{,}95^4 \approx 0{,}814$; $0{,}95^5 \approx 0{,}774$; $0{,}95^6 \approx 0{,}735$.

$0{,}735 < 0{,}75$: il faut prélever 6 pièces.

Contrôle : avec 6 pièces, P(au moins une non conforme) $\approx 1 - 0{,}735 = 0{,}265 > 0{,}25$ ✔, alors qu'avec 5 pièces on n'aurait que 0,226.

Réponse. Aucune : $0{,}95^3 \approx 0{,}857$ · au moins une : $\approx 0{,}143$ · il faut 6 prélèvements pour dépasser 0,25.

Rappel de cours. P(au moins un) $= 1 - (1-p)^n$: cette probabilité CROÎT avec n, puisque $(1-p)^n$ décroît.

Erreur fréquente. Calculer $3 \times 0{,}05 = 0{,}15$: l'approximation est proche de 0,143 par hasard, mais la méthode est fausse — elle donnerait 1,5 pour 30 prélèvements.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Arbre à quatre répétitions

Quatre répétitions : $2^4 = 16$ chemins.

Comptage par nombre de succès : 0 succès → 1 chemin ; 4 succès → 1 chemin.

1 succès → 4 chemins (le succès peut être en position 1, 2, 3 ou 4). Même chose pour 3 succès (4 positions pour l'unique échec).

2 succès → il reste $16 - 1 - 4 - 4 - 1 = 6$ chemins. On peut les lister : $SS\overline{S}\,\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\,\overline{S}S$, $\overline{S}SS\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}S$, $\overline{S}\,\overline{S}SS$ — six paires de positions.

Répartition : 1-4-6-4-1, de somme 16 ✔.

Comme $p = 0{,}5$, chaque chemin a la même probabilité $0{,}5^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

P(exactement deux piles) $= 6 \times 0{,}0625 = 0{,}375$.

Remarque : c'est le résultat le plus probable, mais il n'arrive que dans 37,5% des cas — « deux piles sur quatre » est loin d'être la règle.

Réponse. 16 chemins · répartition 1-4-6-4-1 · P(exactement deux piles) $= \frac{6}{16} = 0{,}375$.

Rappel de cours. Pour $p = 0{,}5$, tous les chemins sont équiprobables : la probabilité se réduit à $\frac{\text{nombre de chemins favorables}}{2^n}$.

Erreur fréquente. Annoncer 0,5 pour « deux piles sur quatre » en raisonnant « une chance sur deux ». Le calcul donne 0,375.

Correction de l'exercice 9 – Loi du nombre de succès sur deux épreuves

Sur deux épreuves, le nombre de réussites peut valoir 0, 1 ou 2.

$P(X = 0)$: aucune réussite, un seul chemin $\overline{S}\,\overline{S}$, soit $0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$.

$P(X = 1)$: deux chemins ($S\overline{S}$ et $\overline{S}S$), chacun de probabilité $0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}09$, donc $2 \times 0{,}09 = 0{,}18$.

$P(X = 2)$: un seul chemin SS, soit $0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$.

Tableau de la loi : $P(X = 0) = 0{,}01$ · $P(X = 1) = 0{,}18$ · $P(X = 2) = 0{,}81$

Contrôle : $0{,}01 + 0{,}18 + 0{,}81 = 1$ ✔ Une loi de probabilité a toujours une somme égale à 1.

Lecture : dans 81% des cas les deux tests réussissent ; dans 18% un seul ; le double échec est rare (1%) mais pas impossible.

Réponse. $X \in \{0\,;1\,;2\}$ · $P(X = 0) = 0{,}01$, $P(X = 1) = 0{,}18$, $P(X = 2) = 0{,}81$, de somme 1.

Rappel de cours. Donner une loi de probabilité = donner TOUTES les valeurs possibles et leurs probabilités, dont la somme vaut 1.

Erreur fréquente. Oublier le facteur 2 sur $P(X = 1)$: la somme ne ferait plus 1 (0,91), ce qui signale immédiatement l'erreur.

Correction de l'exercice 10 – Les conditions sont-elles remplies ?

① Avec remise, la composition du lot est identique à chaque tirage : les épreuves sont identiques et indépendantes ✔ $p = \frac{5}{50} = 0{,}1$ à chaque fois.

② Sans remise, la composition change : après un premier tirage défectueux, il reste 4 défectueuses sur 49. Les épreuves ne sont NI identiques NI indépendantes ✘

③ Sans remise également, donc en toute rigueur pas indépendantes. Mais retirer 3

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

pièces d'un lot de 100 000 change les proportions de façon négligeable : on ASSIMILE la situation à un schéma de Bernoulli avec $p = 0{,}1$. C'est l'approximation usuelle quand le lot est très grand devant l'échantillon.

Calcul exact pour ② : $P = \frac{5}{50} \times \frac{4}{49} \times \frac{3}{48}$.

$= 0{,}1 \times 0{,}081\,63 \times 0{,}0625 \approx 0{,}000\,51$.

Calcul (erroné ici) avec remise : $0{,}1^3 = 0{,}001$.

L'écart est d'un facteur 2 environ : l'hypothèse d'indépendance n'est pas neutre sur un petit lot. Elle le devient quand le lot est grand, comme en ③.

Réponse. ① oui · ② non (tirages sans remise dans un petit lot) · ③ approximativement, le lot étant très grand · pour ② : $P \approx 0{,}000\,51$ contre 0,001 avec remise.

Rappel de cours. Schéma de Bernoulli ⇒ épreuves IDENTIQUES et INDÉPENDANTES. Avec remise : toujours vrai. Sans remise : acceptable seulement si l'échantillon est petit devant le lot.

Erreur fréquente. Appliquer p^3 à un tirage sans remise dans un petit lot. Ici, cela double la probabilité annoncée.

Correction de l'exercice 11 – Redondance d'un système à trois composants

Les trois fonctionnent : $0{,}9^3 = 0{,}729$.

Aucun ne fonctionne : $0{,}1^3 = 0{,}001$.

Au moins un fonctionne : $1 - 0{,}001 = 0{,}999$, soit 99,9% de fiabilité.

Pour « au moins deux », on additionne les cas « exactement deux » et « exactement trois ».

Exactement deux : un chemin vaut $0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}081$, et il y a 3 chemins (position du détecteur en panne), soit $3 \times 0{,}081 = 0{,}243$.

Exactement trois : 0,729.

Au moins deux : $0{,}243 + 0{,}729 = 0{,}972$, soit 97,2%.

Contrôle par la loi complète : $P(0) = 0{,}001$; $P(1) = 3 \times 0{,}9 \times 0{,}1^2 = 0{,}027$; $P(2) = 0{,}243$; $P(3) = 0{,}729$. Somme : $0{,}001 + 0{,}027 + 0{,}243 + 0{,}729 = 1$ ✔.

Comparaison instructive : un seul détecteur donne 90%, « au moins deux sur trois » donne 97,2%, « au moins un sur trois » donne 99,9%. Plus l'exigence de vote est élevée, plus la fiabilité baisse — mais plus les fausses alarmes diminuent. C'est le compromis à régler en sûreté de fonctionnement.

Réponse. Les trois : 0,729 · aucun : 0,001 · au moins un : 0,999 · au moins deux : 0,972.

Rappel de cours. « Au moins un » passe par le contraire · « au moins deux » se décompose en « exactement deux » + « exactement trois ».

Erreur fréquente. Calculer « au moins deux » comme $1 - P(2)$: le contraire de « au moins deux » est « au plus un », c'est-à-dire $P(0) + P(1)$.

Correction de l'exercice 12 – Loi du nombre de pièces défectueuses

$p = 0{,}25$ et $1 - p = 0{,}75$.

$P(X = 0) = 0{,}75^3 = 0{,}421\,875$.

$P(X = 1) = 3 \times 0{,}25 \times 0{,}75^2 = 3 \times 0{,}25 \times 0{,}562\,5 = 0{,}421\,875$.

$P(X = 2) = 3 \times 0{,}25^2 \times 0{,}75 = 3 \times 0{,}0625 \times 0{,}75 = 0{,}140\,625$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$P(X = 3) = 0{,}25^3 = 0{,}015\,625$.

Contrôle : $0{,}421\,875 + 0{,}421\,875 + 0{,}140\,625 + 0{,}015\,625 = 1$ ✔.

Curiosité à connaître : $P(X = 0) = P(X = 1)$ exactement. Ce n'est pas une erreur — cela arrive quand $3p = 1 - p$, c'est-à-dire $p = 0{,}25$.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}421\,875 = 0{,}578\,125$.

$P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - 0{,}015\,625 = 0{,}984\,375$.

Les deux passent par l'évènement contraire : c'est toujours le chemin le plus court quand une seule valeur est exclue.

Réponse. $P(X{=}0) = P(X{=}1) = 0{,}421\,875$; $P(X{=}2) = 0{,}140\,625$; $P(X{=}3) = 0{,}015\,625$ · $P(X \geq 1) \approx 0{,}578$ · $P(X \leq 2) \approx 0{,}984$.

Rappel de cours. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ et $P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3)$: on retire la seule valeur exclue.

Erreur fréquente. Calculer $P(X \leq 2)$ en additionnant trois termes quand un seul suffit. Plus de calculs, plus de risques d'erreur.

Correction de l'exercice 13 – Quatre prélèvements de contrôle

$P(0) = 0{,}9^4 = 0{,}656\,1$.

Pour exactement une : un chemin vaut $0{,}1 \times 0{,}9^3 = 0{,}1 \times 0{,}729 = 0{,}072\,9$, et il y a 4 chemins (positions possibles de la pièce non conforme).

$P(1) = 4 \times 0{,}072\,9 = 0{,}291\,6$.

L'arrêt correspond à $X \geq 2$. Son contraire est $X \leq 1$, c'est-à-dire 0 ou 1 pièce non conforme.

$P(X \leq 1) = 0{,}656\,1 + 0{,}291\,6 = 0{,}947\,7$.

$P(\text{arrêt}) = 1 - 0{,}947\,7 = 0{,}052\,3$, soit environ 5,2%.

Contrôle par le calcul direct : $P(2) = 6 \times 0{,}1^2 \times 0{,}9^2 = 6 \times 0{,}0081 = 0{,}048\,6$; $P(3) = 4 \times 0{,}001 \times 0{,}9 = 0{,}003\,6$; $P(4) = 0{,}0001$. Somme : $0{,}048\,6 + 0{,}003\,6 + 0{,}0001 = 0{,}052\,3$ ✔.

Lecture industrielle : avec 10% de pièces non conformes, ce contrôle ne déclenche l'arrêt que dans 5% des prélèvements. Il laisse donc passer beaucoup de lots pourtant médiocres — le critère est peu sévère.

Réponse. $P(0) = 0{,}656\,1$ · $P(1) = 0{,}291\,6$ · $P(\text{arrêt}) = 1 - 0{,}947\,7 = 0{,}052\,3$.

Rappel de cours. Le contraire de « au moins 2 » est « au plus 1 », soit $P(0) + P(1)$. C'est la voie la plus économique pour $n = 4$.

Erreur fréquente. Prendre « au moins 2 » pour le contraire de « au plus 2 ». Les deux évènements contiennent la valeur 2, ils ne sont pas contraires.

Correction de l'exercice 14 – Quel taux de réussite viser ?

« Réussir au moins une fois » a pour contraire « échouer trois fois », de probabilité q^3.

La condition s'écrit $1 - q^3 \geq 0{,}99$, soit $q^3 \leq 0{,}01$.

On cherche le plus grand q vérifiant cela, en testant des valeurs : $0{,}2^3 = 0{,}008 \leq 0{,}01$ ✔ ; $0{,}22^3 = 0{,}010\,648 > 0{,}01$ ✘.

En affinant : $0{,}215^3 \approx 0{,}009\,94 \leq 0{,}01$ ✔ et $0{,}216^3 \approx 0{,}010\,08 > 0{,}01$ ✘.

Donc $q \leq 0{,}215$ environ, c'est-à-dire un taux d'échec d'au plus 21,5% par tentative.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Taux de réussite minimal : $p = 1 - q \geq 1 - 0{,}215 = 0{,}785$, soit environ 78,5%.

Résultat frappant : avec trois tentatives, un robot qui ne réussit que 4 fois sur 5 atteint déjà 99% de réussite globale. C’est l’intérêt de la reprise automatique après échec.

Contrôle : avec $p = 0{,}785$, $1 - 0{,}215^3 \approx 1 - 0{,}009\,94 = 0{,}990\,06 \geq 0{,}99$ ✔.

Réponse. Condition $q^3 \leq 0{,}01 \cdot q \leq 0{,}215$ environ · il suffit d’un taux de réussite $p \geq 78{,}5\%$ par tentative.

Rappel de cours. Une contrainte sur « au moins un succès » se transforme toujours en contrainte sur $(1 - p)^n$, donc sur l’ÉCHEC répété.

Erreur fréquente. Diviser 0,99 par 3 ou prendre $p \geq 0{,}33$: les probabilités de répétitions ne se répartissent pas par division.

Correction de l’exercice 15 – Fiabilité d’une ligne à quatre postes

Les quatre opérations sont indépendantes et doivent TOUTES réussir : on multiplie les probabilités.

$P(\text{conforme}) = 0{,}97^4$.

$0{,}97^2 = 0{,}9409$, puis $0{,}97^4 = 0{,}9409^2 \approx 0{,}885\,3$.

Donc environ 88,5% des pièces sont conformes.

« Au moins une opération échoue » est l’évènement contraire : $1 - 0{,}885\,3 = 0{,}114\,7$, soit environ 11,5%.

Prévision sur 5 000 pièces : $0{,}114\,7 \times 5\,000 \approx 574$ pièces non conformes.

Observation essentielle : chaque poste est fiable à 97%, mais la ligne entière ne l’est qu’à 88,5%. Les défaillances se cumulent le long de la chaîne.

Conséquence industrielle : pour atteindre 95% de conformité sur la ligne, il faudrait que chaque poste atteigne environ 98,7% (car $0{,}987^4 \approx 0{,}949$). Sur une ligne longue, l’exigence par poste devient très forte — c’est l’argument en faveur de contrôles intermédiaires.

Réponse. $P(\text{conforme}) = 0{,}97^4 \approx 0{,}885$ · au moins un échec : ≈ 0,115 · environ 574 pièces non conformes sur 5 000.

Rappel de cours. Pour « tout réussir » sur n étapes indépendantes : p^n. Cette probabilité DÉCROÎT vite avec n.

Erreur fréquente. Annoncer $4 \times 3\% = 12\%$ de non-conformité : l’approximation est proche (11,5%) mais la méthode est fausse, et l’écart grandit avec le nombre de postes.

Correction de l’exercice 16 – Type bac : loi complète sur quatre essais

$p = 0{,}15$ et $q = 0{,}85$. Répartition des chemins pour $n = 4$: 1-4-6-4-1.

$P(X = 0) = 0{,}85^4 = 0{,}522\,006\ldots \approx 0{,}5220$.

$P(X = 1) = 4 \times 0{,}15 \times 0{,}85^3 = 4 \times 0{,}15 \times 0{,}614\,125 \approx 0{,}368\,5$.

$P(X = 2) = 6 \times 0{,}15^2 \times 0{,}85^2 = 6 \times 0{,}0225 \times 0{,}7225 \approx 0{,}097\,5$.

$P(X = 3) = 4 \times 0{,}15^3 \times 0{,}85 = 4 \times 0{,}003\,375 \times 0{,}85 \approx 0{,}011\,5$.

$P(X = 4) = 0{,}15^4 = 0{,}000\,506\ldots \approx 0{,}0005$.

Contrôle : $0{,}5220 + 0{,}3685 + 0{,}0975 + 0{,}0115 + 0{,}0005 = 1{,}0000$ ✔.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0{,}5220 = 0{,}4780$.

$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 1 - (0{,}5220 + 0{,}3685) = 1 - 0{,}8905 = 0{,}1095$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Commentaire : la soudure casse au moins une fois dans près d’un test sur deux (47,8%), mais au moins deux fois dans seulement 11% des tests. Autrement dit, le cas le plus fréquent après « aucune rupture » est « une seule rupture » — les ruptures multiples sont rares.

Précision sur les arrondis : on calcule chaque probabilité à partir des valeurs EXACTES, puis on arrondit. En arrondissant en cours de route, la somme s’écarterait de 1.

Réponse. $P(X=0) \approx 0{,}5220$; $P(X=1) \approx 0{,}3685$; $P(X=2) \approx 0{,}0975$; $P(X=3) \approx 0{,}0115$; $P(X=4) \approx 0{,}0005$ · $P(X \geq 1) \approx 0{,}478$ · $P(X \geq 2) \approx 0{,}110$.

Rappel de cours. Pour $n = 4$, les nombres de chemins sont 1, 4, 6, 4, 1 : à connaître, ils s’obtiennent par comptage sur l’arbre.

Erreur fréquente. Utiliser 4 chemins pour $X = 2$: il y en a 6 (le nombre de PAIRES de positions parmi quatre), ce qui change la probabilité de 50%.

Correction de l’exercice 17 – Type bac : transmission avec vote majoritaire

Sans redondance, une seule transmission : la probabilité d’être correct est $1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Avec trois transmissions, la valeur majoritaire est correcte si AU MOINS DEUX transmissions sont correctes.

Succès S : « la transmission est correcte », $p = 0{,}9$.

Exactement 3 correctes : $0{,}9^3 = 0{,}729$.

Exactement 2 correctes : $3 \times 0{,}9^2 \times 0{,}1 = 3 \times 0{,}81 \times 0{,}1 = 0{,}243$.

Probabilité que le vote majoritaire donne le bon bit : $0{,}729 + 0{,}243 = 0{,}972$.

Probabilité d’erreur sans redondance : 0,1. Avec redondance : $1 - 0{,}972 = 0{,}028$.

Facteur de réduction : $\dfrac{0{,}1}{0{,}028} \approx 3{,}57$. La probabilité d’erreur est divisée par environ 3,6.

Vérification du calcul d’erreur par l’autre voie : le vote se trompe si au moins DEUX transmissions sont erronées, soit $3 \times 0{,}1^2 \times 0{,}9 + 0{,}1^3 = 0{,}027 + 0{,}001 = 0{,}028$ ✔.

Prolongement : le gain se paie en débit (trois fois plus de données transmises pour la même information). C’est le compromis permanent des codes correcteurs d’erreurs.

Réponse. Sans redondance : 0,9 · avec vote majoritaire : 0,972 · la probabilité d’erreur passe de 0,1 à 0,028, soit divisée par 3,6 environ.

Rappel de cours. Un vote majoritaire sur 3 essais se trompe seulement si au moins 2 essais se trompent : c’est ce qui divise la probabilité d’erreur.

Erreur fréquente. Croire que trois transmissions divisent l’erreur par trois. L’erreur passe de 10% à 2,8%, pas à 3,3% — le mécanisme est le vote, pas la moyenne.

Correction de l’exercice 18 – Type bac : deux stratégies de contrôle

Protocole A : non-détection à une mesure = 0,3, donc aucune détection sur deux mesures $= 0{,}3^2 = 0{,}09$.

Probabilité de détection : $1 - 0{,}09 = 0{,}91$.

Protocole B : non-détection à une mesure = 0,6, donc aucune détection sur quatre mesures $= 0{,}6^4 = 0{,}1296$.

Probabilité de détection : $1 - 0{,}1296 = 0{,}8704$.

Comparaison : $0{,}91 > 0{,}8704$, le protocole A est le plus performant — avec deux fois moins de mesures.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour la troisième question, on cherche n tel que $1 - 0{,}6^{\,n} \geq 0{,}91$, soit $0{,}6^{\,n} \leq 0{,}09$.

Balayage : $0{,}6^4 = 0{,}1296$ ✘ ; $0{,}6^5 = 0{,}077\,76 \leq 0{,}09$ ✔.

Il faudrait donc 5 mesures au protocole B pour faire au moins aussi bien que 2 mesures du protocole A.

Conclusion pratique : le protocole A gagne sur les deux tableaux, performance et coût (deux mesures contre cinq). La qualité de chaque mesure pèse plus lourd que leur nombre.

Nuance à signaler : ce raisonnement ne compare que la DÉTECTION. Un protocole plus sensible produit aussi plus de fausses alertes quand la machine est bien réglée — ce que ces données ne permettent pas d’évaluer.

Réponse. A : $1 - 0{,}3^2 = 0{,}91$ · B : $1 - 0{,}6^4 = 0{,}870\,4$ · le protocole A est meilleur · il faudrait 5 mesures à B pour l’égaler.

Rappel de cours. Deux protocoles de détection se comparent par $1 - q^n$, où q est la probabilité de manquer une mesure.

Erreur fréquente. Comparer $2 \times 0{,}7 = 1{,}4$ et $4 \times 0{,}4 = 1{,}6$ pour conclure que B est meilleur. Ces produits ne sont pas des probabilités (l’un dépasse 1).

Correction de l’exercice 19 – Type bac : arbre et probabilité conditionnelle

$p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, chemins 1-3-3-1.

$P(X = 0) = 0{,}2^3 = 0{,}008$.

$P(X = 1) = 3 \times 0{,}8 \times 0{,}2^2 = 3 \times 0{,}8 \times 0{,}04 = 0{,}096$.

$P(X = 2) = 3 \times 0{,}8^2 \times 0{,}2 = 3 \times 0{,}64 \times 0{,}2 = 0{,}384$.

$P(X = 3) = 0{,}8^3 = 0{,}512$. Contrôle : $0{,}008 + 0{,}096 + 0{,}384 + 0{,}512 = 1$ ✔.

Deuxième question : « au moins un a échoué » signifie $X \leq 2$, de probabilité $1 - P(X = 3) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

« Exactement un a échoué » signifie $X = 2$, de probabilité 0,384. Cet évènement est inclus dans le précédent.

Probabilité conditionnelle : $\dfrac{0{,}384}{0{,}488} \approx 0{,}787$.

Interprétation : quand il y a des échecs, il s’agit d’un seul échec dans près de 79% des cas.

Troisième question : « deux au moins ont réussi » signifie $X \geq 2$, de probabilité $0{,}384 + 0{,}512 = 0{,}896$.

« Les trois ont réussi » est $X = 3$, inclus dans le précédent : $\dfrac{0{,}512}{0{,}896} \approx 0{,}571$.

Interprétation : sachant que le lot est globalement bon ($X \geq 2$), il y a encore 43% de chances qu’un équipement ait échoué. Une information partielle ne suffit pas à garantir le sans-faute.

Réponse. $P(X{=}0) = 0{,}008$; $P(X{=}1) = 0{,}096$; $P(X{=}2) = 0{,}384$; $P(X{=}3) = 0{,}512$ · $\dfrac{0{,}384}{0{,}488} \approx 0{,}787$ · $\dfrac{0{,}512}{0{,}896} \approx 0{,}571$.

Rappel de cours. Conditionner sur un évènement qui CONTIENT celui cherché : la formule se réduit à $\dfrac{P(\text{cherché})}{P(\text{condition})}$.

Erreur fréquente. Oublier que $X = 2$ signifie « deux réussites, donc UN échec ». Traduire l’énoncé en valeurs de X avant tout calcul évite l’erreur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 20 – Type bac : simuler la répétition en Python

Principe : une pièce est défectueuse si `random() < 0.15`, ce qui arrive avec une probabilité 0,15 puisque le tirage est uniforme sur $[0\,;1[$.

Simulation d’un prélèvement :

```
from random import random

def prelevement():
    d = 0
    for i in range(4):
        if random() < 0.15:
            d = d + 1
    return d
```

Estimation de la probabilité :

```
def estimation(N):
    c = 0
    for k in range(N):
        if prelevement() >= 2:
            c = c + 1
    return c / N
```

La valeur renvoyée est une FRÉQUENCE observée, pas la probabilité exacte : elle change d’une exécution à l’autre.

Valeur théorique : $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.

$P(X = 0) = 0{,}85^4 \approx 0{,}522\,0$ et $P(X = 1) = 4 \times 0{,}15 \times 0{,}85^3 \approx 0{,}368\,5$.

$P(X \geq 2) \approx 1 - 0{,}522\,0 - 0{,}368\,5 = 0{,}109\,5$.

La simulation doit donc renvoyer une valeur proche de 0,11. Avec $N = 100$, on peut obtenir 0,08 ou 0,14 ; avec $N = 100\,000$, on sera typiquement à 0,001 près de 0,1095.

À retenir : plus N est grand, plus la fréquence observée se rapproche de la probabilité — c’est le principe qui fonde toute simulation de Monte-Carlo.

Réponse. Simulation par `random() < 0.15` répété 4 fois, puis fréquence des cas ≥ 2 sur N essais · valeur théorique $P(X \geq 2) \approx 0{,}1095$, vers laquelle la fréquence converge quand N grandit.

Rappel de cours. `random() < p` simule un succès de probabilité p. Une simulation donne une FRÉQUENCE, qui approche la probabilité d’autant mieux que N est grand.

Erreur fréquente. Écrire `if random() < 0.15: return 1` dans la boucle : la fonction s’arrêterait au premier défaut au lieu de compter les quatre pièces.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).