Séries statistiques à deux variables — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Deux variables mesurées ensemble — une tension et une pression, une température et une consommation, une puissance et un débit — se lisent d'abord comme un NUAGE DE POINTS. Si ce nuage s'étire le long d'une droite, on peut l'ajuster : la droite d'ajustement sert alors à prévoir une valeur non mesurée (interpolation) ou à prolonger la tendance (extrapolation, beaucoup plus risquée). C'est exactement le travail d'étalonnage d'un capteur, et celui de toute étude de consommation en STI2D. Ces 20 exercices corrigés couvrent le nuage, le point moyen, l'ajustement affine, la prévision et la critique du modèle — y compris la détection d'une mesure aberrante. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/statistiques-deux-variables

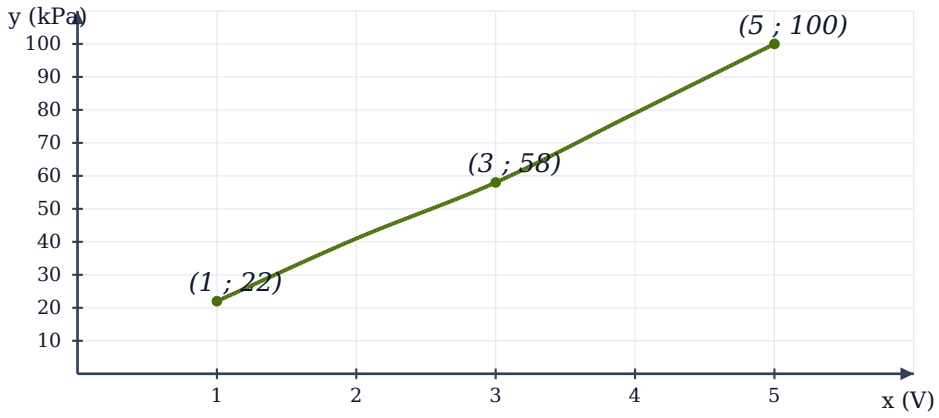
Exercice 1 – Lire un nuage de points

On étalonne un capteur de pression. Pour cinq tensions de sortie x (en volts), on relève la pression y (en kPa) :

x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 · y : 22 ; 41 ; 58 ; 79 ; 100

1. Donne les coordonnées des cinq points du nuage.

2. Le nuage semble-t-il aligné ?



Exercice 2 – Calculer le point moyen

On reprend la série d'étalonnage : x vaut 1, 2, 3, 4, 5 et y vaut 22, 41, 58, 79, 100.

1. Calcule $\overline{x}$ et $\overline{y}$.

2. Donne les coordonnées du point moyen G.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Lire une droite d'ajustement

Pour une série reliant la puissance x (en kW) et le débit y (en L/min) d'une pompe, la droite d'ajustement a pour équation $y = 4{,}55x + 98{,}5$.

1. Donne le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

2. Interprète le coefficient directeur dans le contexte.

3. Interprète l'ordonnée à l'origine, et dis si elle a un sens physique.

Exercice 4 – Prévoir par interpolation

La droite d'ajustement de l'étalonnage du capteur est $y = 19{,}4x + 1{,}8$, où x est la tension en volts et y la pression en kPa, pour $1 \leq x \leq 5$.

1. Estime la pression correspondant à une tension de 3,5 V.

2. Estime la tension correspondant à une pression de 70 kPa.

Exercice 5 – Moyennes de deux séries de relevés

Six relevés de température extérieure x (en °C) et de consommation de gaz y (en m³) :

x : 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 · y : 210 ; 192 ; 174 ; 156 ; 138 ; 120

1. Calcule $\overline{x}$ et $\overline{y}$.

2. Le nuage est-il exactement aligné ? Justifie.

Exercice 6 – Droite passant par deux points du nuage

On ajuste « à la main » la série d'étalonnage (x en V, y en kPa) en traçant la droite qui passe par le premier et le dernier point : $(1\,;22)$ et $(5\,;100)$.

1. Détermine l'équation de cette droite.

2. Compare sa prévision en $x = 3$ avec la valeur mesurée 58.

Exercice 7 – Interpolation ou extrapolation ?

L'étalonnage du capteur a été fait pour des tensions de 1 V à 5 V, avec pour ajustement $y = 19{,}4x + 1{,}8$.

1. Calcule la pression prévue pour $x = 2{,}4$ V, puis pour $x = 9$ V.

2. Pour chacune, dis s'il s'agit d'interpolation ou d'extrapolation, et commente la fiabilité.

Exercice 8 – Résidus d'un ajustement

Pour la série d'étalonnage et la droite $y = 19{,}4x + 1{,}8$, on appelle résidu l'écart « valeur mesurée − valeur prévue ».

1. Calcule les cinq résidus.

2. Quelle mesure s'écarte le plus du modèle ?

3. Que vaut la somme des résidus ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Vérifier qu'une droite passe par le point moyen

Six relevés du taux de rebut y (en ‰) en fonction de la cadence x (en pièces/min) :

x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 · y : 28 ; 29 ; 39 ; 45 ; 47 ; 58La calculatrice donne l'ajustement $y = 6x + 20$.

1. Calcule le point moyen G.

2. Vérifie que la droite d'ajustement passe par G.

3. Interprète le coefficient directeur.

Exercice 10 – Antécédent par une droite d'ajustement

La consommation de gaz y (en m³) en fonction de la température x (en °C) est ajustée par $y = -9x + 228$, pour $2 \leq x \leq 12$.

1. Estime la consommation à 7,5 °C.

2. Pour quelle température la consommation prévue serait-elle de 150 m³ ?

3. À partir de quelle température la consommation prévue passerait-elle sous 120 m³ ?

Exercice 11 – Quand l'extrapolation devient absurde

Le même ajustement $y = -9x + 228$ (consommation de gaz en m³, température en °C) est utilisé par un technicien pour prévoir la consommation à 30 °C.

1. Calcule la valeur prévue par le modèle.

2. Commente ce résultat.

3. Détermine la température au-delà de laquelle le modèle prévoit une consommation négative.

Exercice 12 – Sensibilité et décalage d'un capteur

L'étalonnage du capteur de pression donne $y = 19{,}4x + 1{,}8$ (x en volts, y en kPa). En métrologie, le coefficient directeur s'appelle la SENSIBILITÉ et l'ordonnée à l'origine le DÉCALAGE (offset).

1. Donne la sensibilité du capteur avec son unité.

2. Le constructeur annonce une sensibilité de 20 kPa/V. L'écart relatif est-il acceptable s'il doit rester sous 5% ?

3. On corrige le décalage en retirant 1,8 kPa à toutes les mesures. Quelle est la nouvelle équation ?

Exercice 13 – Comparer deux ajustements

Pour la série x:1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et y:22 ; 41 ; 58 ; 79 ; 100, on compare deux droites : D_1:$y = 19{,}4x + 1{,}8$ (calculatrice) et D_2:$y = 19{,}5x + 2{,}5$ (droite des points extrêmes).

1. Calcule, pour chaque droite, la somme des carrés des résidus.

2. Quelle droite ajuste le mieux le nuage ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Effet d’un changement d’unité

L’ajustement d’une série donne $y = 4{,}55x + 98{,}5$, où x est une puissance en kW et y un débit en L/min.

1. On exprime désormais le débit en L/h. Quelle est la nouvelle équation d’ajustement ?

2. On exprime la puissance en W au lieu de kW (sans changer l’unité du débit). Quelle est alors l’équation ?

Exercice 15 – Quand un ajustement affine n’est pas pertinent

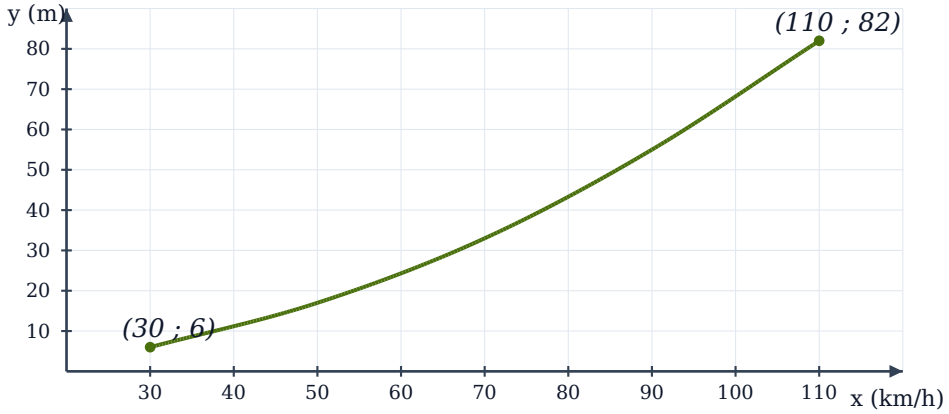
On relève la distance de freinage y (en m) d’un véhicule en fonction de sa vitesse x (en km/h) :

x : 30 ; 50 ; 70 ; 90 ; 110 · y : 6 ; 17 ; 33 ; 55 ; 82

1. Calcule les écarts successifs de y.

2. Un ajustement affine est-il pertinent ? Justifie.

3. Que peut-on dire de la nature de la liaison entre x et y ?



Exercice 16 – Type bac : étalonnage complet d’un capteur

Un capteur de température délivre une tension y (en mV) selon la température x (en °C). Cinq mesures d’étalonnage donnent :

x : 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50 · y : 145 ; 190 ; 232 ; 281 ; 327La calculatrice fournit l’ajustement $y = 4{,}55x + 98{,}5$.

1. Calcule le point moyen et vérifie l’équation d’ajustement.

2. Quelle tension prévoir à 35 °C ?

3. Un relevé indique 258 mV. Estime la température correspondante, au dixième de degré.

4. Peut-on utiliser ce capteur à 200 °C avec ce modèle ?

Exercice 17 – Type bac : détecter une mesure aberrante

Six relevés relient la vitesse de rotation x (en tr/min, par centaines) et le niveau sonore y (en dB) d’un ventilateur :

x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 · y : 28 ; 29 ; 39 ; 45 ; 47 ; 58L’ajustement de la calculatrice est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$y = 6x + 20$.

1. Calcule les six résidus.

2. Une mesure semble-t-elle aberrante ?

3. La technicienne refait la mesure à $x = 2$ et trouve 33 dB. Recalcule $\overline{y}$ avec cette valeur corrigée et commente.

Exercice 18 – Type bac : prévision et seuil de production

La production annuelle d'un atelier, en milliers de pièces, est relevée depuis 2020 ($x = 0$ en 2020) :

x : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 · y : 120 ; 129 ; 141 ; 153 ; 162 ; 171L'ajustement affine est $y = 10{,}4x + 119{,}5$.

1. Le point moyen appartient-il exactement à cette droite ?

2. Estime la production en 2027.

3. En quelle année la production dépasserait-elle 220 milliers de pièces selon ce modèle ?

4. Quelle réserve faut-il émettre ?

Exercice 19 – Type bac : deux séries, un même nuage

Deux ateliers mesurent le même phénomène : le rendement y (en %) d'une installation selon le débit x (en m³/h). L'atelier A obtient l'ajustement $y = 0{,}8x + 52$ sur la plage $[10\,;40]$, l'atelier B obtient $y = 0{,}5x + 62$ sur la plage $[30\,;60]$.

1. Pour quel débit les deux modèles prévoient-ils le même rendement ?

2. Ce débit appartient-il aux deux plages de validité ?

3. Les deux modèles sont-ils contradictoires ? Que proposer ?

Exercice 20 – Type bac : ajustement d'un relevé de consommation

On relève la consommation y (en kWh) d'un four selon le nombre x de cycles quotidiens :

x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 · y : 30 ; 35 ; 42 ; 51 ; 62

La calculatrice donne l'ajustement affine $y = 8x + 20$.

1. Calcule le point moyen et vérifie que la droite y passe.

2. Interprète les deux coefficients dans le contexte.

3. Estime la consommation pour 6 cycles, puis pour 20 cycles.

4. Le nuage justifie-t-il pleinement un ajustement affine ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Lire un nuage de points

Chaque couple de valeurs fournit un point $(x\,;y)$ du nuage.

Les cinq points sont $(1\,;22)$, $(2\,;41)$, $(3\,;58)$, $(4\,;79)$ et $(5\,;100)$.

Pour juger l'alignement, on regarde les écarts successifs de y quand x augmente de 1 : $41-22=19$, $58-41=17$, $79-58=21$, $100-79=21$.

Ces écarts sont tous proches de 19 ou 20 sans être identiques : les points ne sont pas rigoureusement alignés, mais ils le sont presque.

Conclusion : le nuage est sensiblement aligné, un AJUSTEMENT AFFINE est donc pertinent. Les petits écarts sont attribuables aux incertitudes de mesure.

Réponse. $(1\,;22)$, $(2\,;41)$, $(3\,;58)$, $(4\,;79)$, $(5\,;100)$ · nuage sensiblement aligné : un ajustement affine est légitime.

Rappel de cours. Un nuage est « sensiblement aligné » si les écarts de y sont à peu près constants pour des écarts de x constants.

Correction de l'exercice 2 – Calculer le point moyen

$\overline{x}$ est la moyenne des abscisses : $\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=\dfrac{15}{5}=3$.

$\overline{y}$ est la moyenne des ordonnées : la somme vaut $22+41+58+79+100=300$.

Donc $\overline{y}=\dfrac{300}{5}=60$.

Le point moyen est $G(\overline{x}\,;\overline{y})$, soit $G(3\,;60)$.

Remarque : le point moyen est le « centre de gravité » du nuage. Toute droite d'ajustement par les moindres carrés passe par ce point — c'est un contrôle très utile.

Réponse. $\overline{x}=3$ · $\overline{y}=60$ · point moyen $G(3\,;60)$.

Rappel de cours. $G(\overline{x}\,;\overline{y})$: on moyenne séparément les abscisses et les ordonnées.

Erreur fréquente. Moyenner les couples « en diagonale » ou oublier de diviser par l'effectif. Chaque coordonnée de G est la moyenne de SA variable.

Correction de l'exercice 3 – Lire une droite d'ajustement

Une droite d'équation $y=ax+b$ a pour coefficient directeur a et pour ordonnée à l'origine b.

Ici $a=4{,}55$ et $b=98{,}5$.

Interprétation de a : quand la puissance augmente de 1 kW, le débit augmente d'environ 4,55 L/min.

Interprétation de b : c'est la valeur prévue du débit pour $x=0$, soit 98,5 L/min.

Ce chiffre n'a AUCUN sens physique : une pompe à l'arrêt (puissance nulle) ne débite rien. L'ordonnée à l'origine est ici un simple paramètre d'ajustement, valable seulement dans la plage des mesures.

Moralité : on interprète a presque toujours, b seulement si $x=0$ appartient (ou est proche) du domaine étudié.

Réponse. $a=4{,}55$ L/min par kW · $b=98{,}5$ L/min · b n'a pas de sens physique ici (une

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

pompe à l'arrêt ne débite pas).

Rappel de cours. a se lit « variation de y pour 1 unité de x » · b est la valeur prédite en $x = 0$, pertinente seulement si $x = 0$ a un sens.

Erreur fréquente. Annoncer que « le débit augmente de 4,55% » : a est une variation ABSOLUE en L/min, pas un pourcentage.

Correction de l'exercice 4 – Prévoir par interpolation

Pour estimer y connaissant x, on remplace x dans l'équation.

$y = 19{,}4 \times 3{,}5 + 1{,}8 = 67{,}9 + 1{,}8 = 69{,}7$ kPa.

Pour estimer x connaissant y, on résout l'équation $19{,}4x + 1{,}8 = 70$.

$19{,}4x = 68{,}2$, donc $x = \dfrac{68{,}2}{19{,}4} \approx 3{,}52$ V.

Les deux valeurs cherchées, 3,5 V et 70 kPa, sont à l'intérieur de la plage des mesures : il s'agit d'INTERPOLATION, la prévision est fiable.

Contrôle de cohérence entre les deux réponses : à 3,5 V correspondent 69,7 kPa, et à 70 kPa correspondent 3,52 V — les deux calculs sont bien réciproques ✔.

Réponse. 69,7 kPa pour 3,5 V · environ 3,52 V pour 70 kPa.

Rappel de cours. Prévoir y : on remplace x. Prévoir x : on RÉSOUT l'équation. Ce sont deux opérations différentes.

Erreur fréquente. Diviser 70 par 19,4 en oubliant de retirer d'abord le 1,8 : on trouverait 3,61 V, une erreur d'étalonnage de 0,1 V.

Correction de l'exercice 5 – Moyennes de deux séries de relevés

$\overline{x} = \dfrac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12}{6} = \dfrac{42}{6} = 7$ °C.

Somme des consommations : $210 + 192 + 174 + 156 + 138 + 120 = 990$.

$\overline{y} = \dfrac{990}{6} = 165$ m³. Le point moyen est $G(7\,;165)$.

Écarts successifs : $192 - 210 = -18$, puis -18, -18, -18. Ils sont TOUS égaux, pour un pas constant de 2 °C en abscisse.

Le nuage est donc exactement aligné : les points sont sur une droite de coefficient directeur $\dfrac{-18}{2} = -9$.

Équation : $y = -9x + b$ avec le passage par $(2\,;210)$: $210 = -18 + b$, donc $b = 228$ et $y = -9x + 228$.

Contrôle : cette droite passe-t-elle par G ? $-9 \times 7 + 228 = -63 + 228 = 165$ ✔.

Réponse. $\overline{x} = 7$ °C, $\overline{y} = 165$ m³ · nuage exactement aligné sur $y = -9x + 228$.

Rappel de cours. Écarts de y constants pour des écarts de x constants ⇒ points parfaitement alignés (situation affine).

Erreur fréquente. Conclure « nuage aligné » sans vérifier que le PAS des abscisses est lui aussi constant : les écarts de y ne se comparent qu'à pas d'abscisse égal.

Correction de l'exercice 6 – Droite passant par deux points du nuage

Coefficient directeur : $a = \dfrac{100 - 22}{5 - 1} = \dfrac{78}{4} = 19{,}5$.

On détermine b avec le point $(1\,;22)$: $22 = 19{,}5 \times 1 + b$, donc $b = 2{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Équation : $y = 19{,}5x + 2{,}5$.

Contrôle avec l'autre point : $19{,}5 \times 5 + 2{,}5 = 97{,}5 + 2{,}5 = 100$ ✔.

Prévision en $x = 3$: $19{,}5 \times 3 + 2{,}5 = 58{,}5 + 2{,}5 = 61$ kPa, alors que la mesure vaut 58 kPa. L'écart est de 3 kPa.

Cette droite « des extrêmes » est simple à obtenir mais elle ne tient compte que de deux mesures. La droite d'ajustement de la calculatrice, $y = 19{,}4x + 1{,}8$, donne en $x = 3$ la valeur 60 kPa : elle utilise les cinq points et colle mieux à l'ensemble.

Réponse. $y = 19{,}5x + 2{,}5$ · elle prévoit 61 kPa en $x = 3$ contre 58 mesurés (écart 3 kPa).

Rappel de cours. Droite par deux points : $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, puis b en réinjectant un point.

Erreur fréquente. Inverser le quotient et écrire $a = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$: on obtiendrait une pente de 0,05, absurde ici.

Correction de l'exercice 7 – Interpolation ou extrapolation ?

$x = 2{,}4$: $y = 19{,}4 \times 2{,}4 + 1{,}8 = 46{,}56 + 1{,}8 = 48{,}36$ kPa.

$x = 9$: $y = 19{,}4 \times 9 + 1{,}8 = 174{,}6 + 1{,}8 = 176{,}4$ kPa.

2,4 appartient à l'intervalle des mesures $[1\,;5]$: c'est une INTERPOLATION. La prévision est fiable, on reste dans le domaine où le modèle a été validé.

9 est en dehors de $[1\,;5]$, et même très loin : c'est une EXTRAPOLATION. La prévision est à prendre avec prudence.

Risques concrets de cette extrapolation : le capteur peut saturer au-delà d'une certaine pression, sa réponse peut cesser d'être linéaire, ou la plage 9 V dépasser simplement ses limites d'emploi.

Règle pratique : plus on s'éloigne de l'intervalle des mesures, moins la prévision vaut. Une extrapolation doit toujours être signalée comme telle.

Réponse. 48,36 kPa en 2,4 V (interpolation, fiable) · 176,4 kPa en 9 V (extrapolation hors plage d'étalonnage, peu fiable).

Rappel de cours. Interpolation : à l'intérieur de la plage des mesures. Extrapolation : à l'extérieur — le modèle n'y a jamais été vérifié.

Erreur fréquente. Traiter les deux prévisions sur le même plan. Le calcul est identique, la CONFIANCE n'a rien à voir.

Correction de l'exercice 8 – Résidus d'un ajustement

Valeurs prévues : $x = 1 \to 21{,}2$; $x = 2 \to 40{,}6$; $x = 3 \to 60$; $x = 4 \to 79{,}4$; $x = 5 \to 98{,}8$.

Résidu en $x = 1$: $22 - 21{,}2 = +0{,}8$ kPa.

Résidu en $x = 2$: $41 - 40{,}6 = +0{,}4$ kPa.

Résidu en $x = 3$: $58 - 60 = -2$ kPa.

Résidu en $x = 4$: $79 - 79{,}4 = -0{,}4$ kPa.

Résidu en $x = 5$: $100 - 98{,}8 = +1{,}2$ kPa.

Le résidu le plus grand en valeur absolue est celui de $x = 3$ V : -2 kPa. C'est la mesure la moins bien décrite par le modèle, mais l'écart reste faible (environ 3,4% de 58).

Somme des résidus : $0{,}8 + 0{,}4 - 2 - 0{,}4 + 1{,}2 = 0$.

Ce n'est pas un hasard : la droite d'ajustement des moindres carrés équilibre exactement les écarts au-dessus et en dessous. C'est un excellent contrôle de calcul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Résidus +0,8 ; +0,4 ; −2 ; −0,4 ; +1,2 kPa · le plus gros écart est en $x = 3$ V · leur somme vaut 0.

Rappel de cours. Résidu = mesuré − prévu. Pour la droite d'ajustement, la somme des résidus est nulle.

Erreur fréquente. Calculer « prévu − mesuré » : tous les signes s'inversent. L'ordre de la soustraction fait partie de la définition.

Correction de l'exercice 9 – Vérifier qu'une droite passe par le point moyen

$\overline{x} = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = \dfrac{21}{6} = 3{,}5.$

Somme des y : $28 + 29 + 39 + 45 + 47 + 58 = 246$, donc $\overline{y} = \dfrac{246}{6} = 41$.

Point moyen : $G(3{,}5\,;41)$.

Test du passage par G : on calcule l'image de 3,5 par la droite.
$6 \times 3{,}5 + 20 = 21 + 20 = 41$.

On obtient exactement $\overline{y} = 41$: la droite passe bien par G ✔. C'est une propriété de toute droite d'ajustement des moindres carrés, et donc un contrôle de l'équation donnée.

Interprétation de $a = 6$: chaque pièce par minute de cadence supplémentaire fait monter le taux de rebut d'environ 6 ‰.

Conséquence industrielle : accélérer la cadence coûte en qualité. Passer de 3 à 5 pièces/min ferait passer le taux de rebut d'environ 38 ‰ à 50 ‰ selon le modèle.

Réponse. $G(3{,}5\,;41)$ · $6 \times 3{,}5 + 20 = 41$, la droite passe par G · chaque pièce/min de plus ajoute 6 ‰ de rebut.

Rappel de cours. La droite d'ajustement des moindres carrés passe TOUJOURS par le point moyen : le test $a\overline{x} + b = \overline{y}$ valide l'équation.

Erreur fréquente. Tester le passage par un point du nuage au lieu du point moyen : la droite ne passe généralement par AUCUN point mesuré.

Correction de l'exercice 10 – Antécédent par une droite d'ajustement

$y = -9 \times 7{,}5 + 228 = -67{,}5 + 228 = 160{,}5$ m³.

On résout $-9x + 228 = 150$, soit $-9x = -78$, donc $x = \dfrac{78}{9} \approx 8{,}67$ °C.

Pour la dernière question, on résout l'inéquation $-9x + 228 < 120$.

$-9x < -108$, puis on divise par -9 en INVERSANT le sens : $x > 12$.

La consommation passerait sous 120 m³ pour une température supérieure à 12 °C.

Attention : 12 °C est la borne supérieure de la plage étudiée. Au-delà, on quitte le domaine des mesures — et physiquement, la consommation de chauffage ne descend pas indéfiniment : elle tend vers une consommation résiduelle (eau chaude, cuisine), que ce modèle affine ne décrit pas.

Réponse. 160,5 m³ à 7,5 °C · 150 m³ vers 8,67 °C · sous 120 m³ pour $x > 12$ °C, mais hors plage de validité.

Rappel de cours. Diviser une inéquation par un nombre négatif change le sens de l'inégalité : $-9x < -108 \Leftrightarrow x > 12$.

Erreur fréquente. Conserver le sens de l'inégalité et conclure $x < 12$, c'est-à-dire exactement l'inverse de la réponse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Quand l’extrapolation devient absurde

$y = -9 \times 30 + 228 = -270 + 228 = -42$ m³.

Une consommation de -42 m³ n’a aucun sens : on ne consomme pas une quantité négative de gaz.

Le modèle est donc invalide à 30 °C. Ce n’est pas le calcul qui est faux, c’est l’usage du modèle hors de son domaine de validité $[2\,;12]$.

Recherche du seuil : $-9x + 228 < 0$ équivaut à $228 < 9x$, soit $x > \dfrac{228}{9} \approx 25{,}3$ °C.

Au-delà d’environ 25,3 °C, le modèle affine prévoit une consommation négative — preuve qu’il ne peut pas être prolongé aussi loin.

Modèle plus réaliste : la consommation décroît avec la température puis se stabilise à un palier (eau chaude sanitaire, cuisson) indépendant du chauffage. Un ajustement affine ne peut pas décrire ce palier ; on changerait de modèle pour aller plus loin.

Réponse. Le modèle prévoit -42 m³, résultat absurde · il n’est pas valable hors de $[2\,;12]$ · il prévoit des valeurs négatives dès $x > 25{,}3$ °C environ.

Rappel de cours. Un ajustement affine n’est valable que sur la plage des mesures. Toute valeur prédite doit être confrontée au sens physique.

Erreur fréquente. Recopier -42 m³ comme une prévision. Un résultat non physique doit être signalé et attribué au modèle, pas au calcul.

Correction de l’exercice 12 – Sensibilité et décalage d’un capteur

La sensibilité est le coefficient directeur : 19,4 kPa par volt. Elle dit de combien la pression varie pour 1 V de variation en sortie.

Écart relatif à la valeur annoncée : $\dfrac{|19{,}4 - 20|}{20} = \dfrac{0{,}6}{20} = 0{,}03$, soit 3%.

3% < 5% : l’écart est ACCEPTABLE, le capteur est conforme à la tolérance annoncée.

Correction du décalage : on retranche 1,8 à chaque valeur de y, donc la nouvelle relation est $y' = 19{,}4x + 1{,}8 - 1{,}8 = 19{,}4x$.

Après correction, la relation devient PROPORTIONNELLE : une tension nulle donne une pression nulle, ce qui est physiquement cohérent.

Contrôle : à 3 V, on prévoyait 60 kPa, on prévoit maintenant 58,2 kPa — soit très exactement la mesure 58 kPa à 0,2 près ✔ La correction d’offset a même amélioré l’ajustement sur ce point.

Réponse. Sensibilité 19,4 kPa/V · écart de 3% avec les 20 kPa/V annoncés, donc conforme · après correction : $y' = 19{,}4x$.

Rappel de cours. Écart relatif $= \dfrac{|\text{mesuré} - \text{référence}|}{\text{référence}}$: on divise toujours par la valeur de RÉFÉRENCE.

Erreur fréquente. Diviser par 19,4 au lieu de 20 : la référence est la valeur annoncée par le constructeur, pas celle mesurée.

Correction de l’exercice 13 – Comparer deux ajustements

Résidus de D_1 (calculés précédemment) : +0,8 ; +0,4 ; −2 ; −0,4 ; +1,2.

Somme de leurs carrés : 0,64 + 0,16 + 4 + 0,16 + 1,44 = 6,4.

Valeurs prévues par D_2 : $x = 1 \to 22$; $x = 2 \to 41{,}5$; $x = 3 \to 61$; $x = 4 \to 80{,}5$; $x = 5 \to 100$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Résidus de D_2 : 0 ; −0,5 ; −3 ; −1,5 ; 0.

Somme de leurs carrés : $0 + 0{,}25 + 9 + 2{,}25 + 0 = 11{,}5$.

$6{,}4 < 11{,}5$: la droite D_1 ajuste MIEUX le nuage, au sens des moindres carrés.

C'est logique : D_1 est précisément la droite qui MINIMISE cette somme (d'où le nom « moindres carrés »), alors que D_2 ne s'appuie que sur deux points et ignore les trois autres.

Autre indice révélateur : les résidus de D_2 sont tous négatifs ou nuls (somme −5), signe que la droite passe systématiquement AU-DESSUS du nuage. Ceux de D_1 s'équilibrent (somme nulle).

Réponse. D_1 : somme des carrés = 6,4 · D_2 : 11,5 · D_1 ajuste mieux le nuage.

Rappel de cours. « Meilleur ajustement » = plus petite somme des CARRÉS des résidus. On élève au carré pour que les écarts ne se compensent pas.

Erreur fréquente. Comparer les sommes de résidus sans les élever au carré : celle de D_1 vaut 0, ce qui ne mesure pas la qualité mais seulement l'équilibre de l'ajustement.

Correction de l'exercice 14 – Effet d'un changement d'unité

Passer de L/min à L/h multiplie toutes les ordonnées par 60 : on pose $Y = 60y$.

$Y = 60(4{,}55x + 98{,}5) = 273x + 5\,910$. La nouvelle équation est $Y = 273x + 5\,910$, en L/h.

Les DEUX coefficients sont multipliés par 60 : la pente comme l'ordonnée à l'origine, puisque tous deux s'expriment en unités de y.

Pour l'abscisse, 1 kW = 1 000 W : si X est la puissance en watts, alors $x = \dfrac{X}{1\,000}$.

En remplaçant : $y = 4{,}55 \times \dfrac{X}{1\,000} + 98{,}5 = 0{,}00455\,X + 98{,}5$.

Ici seul le coefficient directeur change (divisé par 1 000) : l'ordonnée à l'origine ne dépend pas de l'unité de x, puisqu'elle s'exprime en unités de y.

Contrôle sur un point : $x = 20$ kW donne $y = 91 + 98{,}5 = 189{,}5$ L/min. Avec $X = 20\,000$ W : $0{,}00455 \times 20\,000 + 98{,}5 = 91 + 98{,}5 = 189{,}5$ ✔ Même prévision, comme il se doit.

Réponse. En L/h : $Y = 273x + 5\,910$ · avec la puissance en W : $y = 0{,}00455X + 98{,}5$.

Rappel de cours. Changer l'unité de y affecte a ET b · changer l'unité de x n'affecte que a.

Erreur fréquente. Multiplier l'ordonnée à l'origine lors d'un changement d'unité de x : b est une valeur de y, il n'a rien à voir avec l'unité des abscisses.

Correction de l'exercice 15 – Quand un ajustement affine n'est pas pertinent

Les abscisses progressent d'un pas constant de 20 km/h, ce qui permet de comparer directement les écarts de y.

Écarts : $17 - 6 = 11$; $33 - 17 = 16$; $55 - 33 = 22$; $82 - 55 = 27$.

Ces écarts AUGMENTENT régulièrement (11, 16, 22, 27) : le nuage n'est pas aligné, il s'incurve vers le haut.

Un ajustement affine n'est donc PAS pertinent : il sous-estimerait les distances aux vitesses élevées et les surestimerait au milieu.

Nature de la liaison : quand la vitesse est multipliée par 3 (de 30 à 90), la distance passe de 6 à 55 m, soit environ 9 fois plus — et $9 = 3^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

De même de 50 à 110 (facteur 2,2) : $\frac{82}{17} \approx 4{,}8$, à comparer à $2{,}2^2 = 4{,}84$ ✔.

La distance de freinage est donc à peu près PROPORTIONNELLE AU CARRÉ de la vitesse — un résultat physique classique (l'énergie cinétique est en v^2). C'est un ajustement de type $y = kx^2$, et non affine ; on l'obtiendrait par changement de variable, au programme de Terminale.

Réponse. Écarts 11, 16, 22, 27 : croissants, donc nuage non aligné · ajustement affine non pertinent · la distance varie comme le CARRÉ de la vitesse.

Rappel de cours. Avant tout ajustement affine, on REGARDE le nuage : des écarts croissants signalent une liaison non linéaire.

Erreur fréquente. Ajuster quand même par une droite « parce que la calculatrice en donne une ». La calculatrice fournit toujours une droite, même sur un nuage en forme de parabole.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : étalonnage complet d'un capteur

$\overline{x} = \frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50}{5} = \frac{150}{5} = 30$ °C.

Somme des tensions : $145 + 190 + 232 + 281 + 327 = 1\,175$, donc $\overline{y} = \frac{1\,175}{5} = 235$ mV.

Point moyen $G(30\,;235)$.

Vérification : $4{,}55 \times 30 + 98{,}5 = 136{,}5 + 98{,}5 = 235$ ✔ La droite passe par G, l'équation est cohérente.

Prévision à 35 °C : $y = 4{,}55 \times 35 + 98{,}5 = 159{,}25 + 98{,}5 = 257{,}75$ mV, soit environ 257,8 mV.

Pour 258 mV, on résout $4{,}55x + 98{,}5 = 258$: $4{,}55x = 159{,}5$, donc $x = \frac{159{,}5}{4{,}55} \approx 35{,}05$, soit 35,1 °C.

Cohérence avec la question précédente : 35 °C → 257,8 mV et 258 mV → 35,05 °C ✔ les deux calculs se répondent.

À 200 °C, le modèle prévoit $4{,}55 \times 200 + 98{,}5 = 910 + 98{,}5 = 1\,008{,}5$ mV.

Mais 200 °C est très loin de la plage d'étalonnage $[10\,;50]$: c'est une extrapolation d'un facteur 4. Rien ne garantit que la réponse du capteur reste linéaire, et il peut même être hors de ses limites d'emploi.

Réponse à la question : NON, on ne peut pas utiliser ce modèle à 200 °C. Il faudrait refaire un étalonnage sur une plage couvrant cette température.

Réponse. $G(30\,;235)$ et la droite y passe ✔ · 257,8 mV à 35 °C · 35,1 °C pour 258 mV · à 200 °C, extrapolation non valable.

Rappel de cours. Un étalonnage n'est valable que sur la plage mesurée. Le vérifier fait partie de la réponse, pas seulement le calcul.

Erreur fréquente. Répondre « 1 008,5 mV » sans réserve à la dernière question : le calcul est juste, l'usage du modèle est faux.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : détecter une mesure aberrante

Valeurs prévues : $x = 1 \to 26$; $x = 2 \to 32$; $x = 3 \to 38$; $x = 4 \to 44$; $x = 5 \to 50$; $x = 6 \to 56$.

Résidus (mesuré − prévu) : +2 ; −3 ; +1 ; +1 ; −3 ; +2.

Contrôle : leur somme vaut $2 - 3 + 1 + 1 - 3 + 2 = 0$ ✔, comme attendu pour un ajustement des moindres carrés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Les résidus sont tous compris entre −3 et +2 dB, du même ordre de grandeur : aucune mesure ne se détache franchement. Il n'y a PAS de point aberrant ici — seulement la dispersion normale des mesures.

Pour repérer un point aberrant, on cherche un résidu bien plus grand que les autres (par exemple 3 fois l'écart typique). Ce n'est pas le cas.

Avec la valeur corrigée à $x = 2$, la somme des y devient $246 - 29 + 33 = 250$, d'où $\overline{y} = \dfrac{250}{6} \approx 41{,}67$ dB.

Le point moyen passe de $G(3{,}5\,;41)$ à $G'(3{,}5\,;41{,}67)$: la moyenne a monté de 0,67 dB, soit un sixième des 4 dB de correction ($\frac{4}{6} \approx 0{,}67$) ✔.

Conclusion : une seule mesure corrigée de 4 dB déplace la moyenne de moins de 1 dB. Plus l'effectif est grand, moins une mesure isolée pèse — c'est pour cela qu'on multiplie les relevés.

Réponse. Résidus +2, −3, +1, +1, −3, +2 (somme nulle) · aucun point aberrant · avec la correction, $\overline{y} \approx 41{,}67$ dB, soit +0,67 dB.

Rappel de cours. Une mesure est aberrante quand son résidu est très supérieur aux autres. Des résidus du même ordre traduisent la dispersion normale.

Erreur fréquente. Qualifier d'aberrante la mesure de plus grand résidu par principe. Il faut la comparer aux AUTRES résidus : ici −3 dB est banal.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : prévision et seuil de production

$\overline{x} = \dfrac{0+1+2+3+4+5}{6} = \dfrac{15}{6} = 2{,}5$.

Somme des productions : $120 + 129 + 141 + 153 + 162 + 171 = 876$, donc $\overline{y} = \dfrac{876}{6} = 146$.

Test : $10{,}4 \times 2{,}5 + 119{,}5 = 26 + 119{,}5 = 145{,}5$... on obtient 145,5 et non 146.

L'écart de 0,5 montre que l'équation fournie est ARRONDIE. La droite exacte des moindres carrés passerait par $G(2{,}5\,;146)$; avec une pente de 10,4, son ordonnée à l'origine serait $146 - 26 = 120$.

On poursuit avec l'équation de l'énoncé, en gardant en tête cet arrondi. 2027 correspond à $x = 7$: $y = 10{,}4 \times 7 + 119{,}5 = 72{,}8 + 119{,}5 = 192{,}3$ milliers de pièces.

Seuil de 220 : on résout $10{,}4x + 119{,}5 > 220$, soit $10{,}4x > 100{,}5$, donc $x > \dfrac{100{,}5}{10{,}4} \approx 9{,}66$.

Le premier entier convenant est $x = 10$, soit l'année $2020 + 10 = 2030$.

Contrôle : $x = 9$ donne 213,1 (sous le seuil) et $x = 10$ donne 223,5 (au-dessus) ✔.

Réserve à émettre : $x = 10$ est le double de la dernière année observée. C'est une extrapolation lointaine, qui suppose que la croissance reste linéaire pendant cinq ans de plus — ce qu'aucune capacité d'atelier ne garantit (limite des machines, du personnel, du marché).

Réponse. La droite passe par $(2{,}5\,;145{,}5)$ au lieu de $G(2{,}5\,;146)$: l'équation est arrondie · 192,3 milliers en 2027 · seuil de 220 franchi en 2030 · extrapolation lointaine, à prendre avec prudence.

Rappel de cours. Une équation d'ajustement arrondie ne passe qu'APPROXIMATIVEMENT par le point moyen. L'écart doit être signalé, pas ignoré.

Erreur fréquente. Conclure « la droite ne passe pas par G, donc l'ajustement est faux ». Un écart de 0,5 sur 146 (0,3%) s'explique par l'arrondi des coefficients.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 19 – Type bac : deux séries, un même nuage

On résout $0{,}8x + 52 = 0{,}5x + 62$.

$0{,}8x - 0{,}5x = 62 - 52$, soit $0{,}3x = 10$.

$x = \dfrac{10}{0{,}3} \approx 33{,}3$ m³/h.

Rendement commun : $0{,}8 \times 33{,}33 + 52 \approx 26{,}67 + 52 \approx 78{,}7\%$ (contrôle avec l’autre modèle : $0{,}5 \times 33{,}33 + 62 \approx 16{,}67 + 62 \approx 78{,}7\%$ ✔).

Ce débit appartient à [10 ; 40] (plage A) ET à [30 ; 60] (plage B) : il est dans la zone de RECOUVREMENT [30 ; 40], la seule où les deux modèles sont tous deux valables.

Sont-ils contradictoires ? Non, pas nécessairement. Sur la zone commune [30 ; 40], comparons : à $x = 30$, A prévoit 76% et B 77% ; à $x = 40$, A prévoit 84% et B 82%.

Les écarts (1 puis 2 points de rendement) restent faibles : les deux ajustements sont compatibles sur leur zone commune, ils décrivent simplement des portions différentes d’une courbe qui n’est probablement pas une droite sur [10 ; 60].

Proposition : regrouper les mesures des deux ateliers et refaire UN ajustement sur toute la plage [10 ; 60] — en vérifiant d’abord, sur le nuage complet, qu’un modèle affine y est encore pertinent. Si le nuage s’incurve, il faudra changer de modèle.

Réponse. Même rendement pour $x \approx 33{,}3$ m³/h (environ 78,7%) · ce débit est dans la zone de recouvrement [30 ; 40] · modèles compatibles sur cette zone : regrouper les données et réajuster sur [10 ; 60].

Rappel de cours. Deux ajustements ne sont comparables que sur l’intersection de leurs plages de validité. En dehors, chacun extrapole.

Erreur fréquente. Comparer les coefficients directeurs (0,8 contre 0,5) pour conclure que « l’un des deux se trompe ». Deux droites différentes peuvent parfaitement décrire deux portions d’un même phénomène non linéaire.

Correction de l’exercice 20 – Type bac : ajustement d’un relevé de consommation

$\overline{x} = \dfrac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3$.

Somme des consommations : $30 + 35 + 42 + 51 + 62 = 220$, donc $\overline{y} = \dfrac{220}{5} = 44$ kWh.

Point moyen $G(3 ; 44)$.

Test : $8 \times 3 + 20 = 24 + 20 = 44$ ✔ La droite passe exactement par G, l’équation est cohérente.

Coefficient directeur 8 : chaque cycle supplémentaire consomme environ 8 kWh.

Ordonnée à l’origine 20 : c’est la consommation prévue pour 0 cycle, soit 20 kWh. Ici elle a un sens physique — c’est la consommation de maintien en température du four, indépendante de la production.

Estimation à 6 cycles : $y = 48 + 20 = 68$ kWh. C’est une extrapolation d’un seul cycle au-delà des mesures : raisonnable.

Estimation à 20 cycles : $y = 160 + 20 = 180$ kWh. Cette fois on est quatre fois au-delà de la plage observée : l’estimation est fragile (le four ne pourrait peut-être même pas enchaîner 20 cycles par jour).

Dernière question : calculons les résidus. Valeurs prévues : 28 ; 36 ; 44 ; 52 ; 60. Résidus : +2 ; −1 ; −2 ; −1 ; +2.

Leur somme est nulle ✔, mais leur répartition est régulière : positifs aux extrémités,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

négatifs au milieu. Ce n’est pas du hasard, c’est la signature d’un nuage légèrement INCURVÉ vers le haut.

Réponse nuancée : l’ajustement affine est acceptable (résidus de 2 kWh au plus, soit moins de 5%), mais la courbure suggère qu’un modèle non linéaire décrirait mieux la consommation — ce que confirment les écarts successifs de y : 5, 7, 9, 11, croissants.

Réponse. $G(3\,;44)$ et $8\times 3+20=44$ ✔ · 8 kWh par cycle, 20 kWh de maintien à vide · 68 kWh à 6 cycles, 180 kWh à 20 cycles (extrapolation fragile) · résidus +2, −1, −2, −1, +2 : légère courbure du nuage.

Rappel de cours. Des résidus dont les signes suivent un motif régulier (+ − − − +) signalent une COURBURE : le modèle affine n’est pas le meilleur.

Erreur fréquente. Se contenter de « la somme des résidus est nulle, donc l’ajustement est bon ». Cette somme est nulle par construction : c’est la RÉPARTITION des signes qui renseigne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).