Trigonométrie — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

En STI2D, la trigonométrie n'est pas là pour mesurer des triangles : elle sert à décrire tout ce qui OSCILLE — une tension alternative, un courant, une vibration, un mouvement de piston. La grandeur de référence est le signal $u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, dont il faut savoir lire l'amplitude A, la pulsation ω (donc la période et la fréquence) et la phase φ. Ces 20 exercices corrigés commencent par les bases — radian, cercle trigonométrique, valeurs remarquables, équations $\cos x = a$ — puis les mettent au service des signaux : période et fréquence, valeur instantanée, déphasage entre deux tensions, lecture d'un oscillogramme. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/trigonometrie

Exercice 1 – Degrés et radians

Le radian est l'unité d'angle utilisée en physique : un tour complet vaut 2π radians, soit 360°.

1. Convertis 60°, 150° et 225° en radians.

2. Convertis $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{6}$ en degrés.

Exercice 2 – Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

On considère les angles 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

1. Donne les valeurs exactes de leur cosinus et de leur sinus.

Exercice 3 – Signe du cosinus et du sinus

On considère les angles $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ et $x_3 = -\frac{\pi}{3}$.

1. Dans quel quadrant se situe chacun de ces angles ?

2. Donne le signe de son cosinus et de son sinus.

Exercice 4 – Périodicité et parité

On sait que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

1. Déduis $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Déduis $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)$ et $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Amplitude, période et fréquence

Une tension est modélisée par $u(t) = 12\cos(100\pi t)$, où u est en volts et t en secondes.

1. Donne l'amplitude de cette tension.

2. Calcule sa période, puis sa fréquence.

Exercice 6 – Résoudre cos x = a

On cherche toutes les solutions de $\cos x = \dfrac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

1. Résous cette équation, puis celle de $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur le même intervalle.

Exercice 7 – Résoudre sin x = a

On cherche les solutions de $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi\,;\pi]$.

1. Résous cette équation, puis $\sin x = 1$ sur le même intervalle.

Exercice 8 – Relation fondamentale

Soit x un angle du quatrième quadrant (c'est-à-dire $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$) tel que $\cos x = 0{,}8$.

1. Calcule $\sin x$.

2. Que vaut $\sin x$ si l'on sait seulement que $\cos x = 0{,}8$?

Exercice 9 – Angles associés

On donne $\cos\dfrac{\pi}{5} \approx 0{,}809$ et $\sin\dfrac{\pi}{5} \approx 0{,}588$.

1. Calcule $\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right)$.

2. Calcule $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 10 – Mesure principale d'un angle

On considère les angles de mesures $\dfrac{17\pi}{4}$, $-\dfrac{25\pi}{6}$ et $\dfrac{9\pi}{2}$.

1. Donne la mesure principale de chacun, c'est-à-dire la mesure appartenant à $]-\pi\,;\pi]$.

Exercice 11 – Signal sinusoïdal : tous les paramètres

Un courant est modélisé par $i(t) = 4\cos\left(200\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, avec i en ampères et t en secondes.

1. Donne l'amplitude, la pulsation, la période, la fréquence et la phase à l'origine.

2. Calcule $i(0)$.

3. Calcule $i(2{,}5 \times 10^{-3})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Écrire un signal à partir de ses caractéristiques

Une tension sinusoïdale a une amplitude de 325 V, une fréquence de 50 Hz, et elle est maximale à l'instant $t = 0$.

1. Détermine la pulsation ω.

2. Écris l'expression de $u(t)$.

3. À quels instants de la première période la tension est-elle nulle ?

Exercice 13 – Déphasage entre deux signaux

Dans un circuit, la tension et le courant sont $u(t) = 24\cos(100\pi t)$ et $i(t) = 3\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Ces deux signaux ont-ils la même fréquence ?

2. Calcule le déphasage du courant par rapport à la tension, en radians puis en degrés.

3. Traduis ce déphasage en retard temporel.

Exercice 14 – Instants où un signal atteint une valeur

Une tension vaut $u(t) = 100\cos(20\pi t)$ volts, t en secondes.

1. Calcule la période.

2. Détermine les instants de la première période où $u(t) = 50$ V.

Exercice 15 – Retrouver la phase à l'origine

Une tension sinusoïdale d'amplitude 12 V et de fréquence 50 Hz vaut 6 V à l'instant $t = 0$, et elle est alors décroissante.

1. Détermine la pulsation ω.

2. Détermine les deux valeurs possibles de la phase à l'origine φ.

3. Utilise l'information « décroissante » pour trancher, puis écris $u(t)$.

Exercice 16 – Type bac : la tension du secteur

La tension du réseau domestique français est sinusoïdale, de valeur efficace $U_{\text{eff}} = 230$ V et de fréquence 50 Hz. On rappelle que l'amplitude et la valeur efficace sont liées par $A = U_{\text{eff}}\sqrt{2}$. La tension est nulle et croissante à $t = 0$.

1. Calcule l'amplitude A, arrondie au volt.

2. Détermine ω puis l'expression de $u(t)$ sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$.

3. Calcule $u(4\text{ ms})$.

4. Pendant quelle fraction de la période la tension dépasse-t-elle 230 V ?

Exercice 17 – Type bac : deux signaux en quadrature

Deux capteurs d'un codeur incrémental délivrent $u_1(t) = 5\cos(40\pi t)$ et $u_2(t) = 5\cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, en volts.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Calcule la période commune.

2. Justifie qu'on parle de signaux « en quadrature ».

3. Calcule u_1 et u_2 à $t = 0$, puis à $t = 12{,}5$ ms.

4. Vérifie que $u_1^2 + u_2^2$ est constant.

Exercice 18 – Type bac : lire un oscillogramme

Sur un oscilloscope, un signal sinusoïdal oscille entre -6 V et $+6$ V. Deux maximums consécutifs sont séparés de 4 ms, et le premier maximum est observé à $t = 1$ ms.

1. Détermine l'amplitude, la période et la fréquence.

2. Détermine la pulsation ω.

3. Détermine la phase à l'origine φ, puis l'expression du signal.

4. Calcule la valeur du signal à $t = 0$.

Exercice 19 – Type bac : durée de fonctionnement d'un seuil

Un système de sécurité se déclenche lorsque la tension $u(t) = 20\cos(100\pi t)$ volts dépasse 10 V en valeur absolue.

1. Résous $\cos(100\pi t) = 0{,}5$ sur la première période.

2. Détermine les intervalles de temps, sur la première période, où $u(t) > 10$ V.

3. Quelle proportion de la période le système passe-t-il au-dessus de 10 V (en valeur absolue) ?

Exercice 20 – Type bac : régler une fréquence de découpage

Un onduleur produit une tension $u(t) = A\cos(\omega t)$. Le cahier des charges impose une amplitude de 48 V et une durée de 1,5 ms entre le maximum et le premier passage par zéro.

1. Détermine la période, puis la fréquence du signal.

2. Donne l'expression de $u(t)$.

3. Calcule $u(1\text{ ms})$ et $u(3\text{ ms})$.

4. Le cahier des charges impose aussi $|u| \leq 40$ V pendant au moins la moitié de la période. Est-ce vérifié ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Degrés et radians

La conversion repose sur la proportionnalité $180° \leftrightarrow \pi$ rad : pour passer des degrés aux radians, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$.

$60° = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad.

$150° = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ rad (en simplifiant par 30).

$225° = \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$ rad (en simplifiant par 45).

Dans l'autre sens, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$: $\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \times 180}{4} = 135°$.

$\frac{7\pi}{6} = \frac{7 \times 180}{6} = 7 \times 30 = 210°$.

Contrôle d'ordre de grandeur : 1 rad ≈ 57,3°. Un angle de $\frac{7\pi}{6} \approx 3{,}67$ rad doit donc valoir environ 210° ✔.

Réponse. $60° = \frac{\pi}{3} \cdot 150° = \frac{5\pi}{6} \cdot 225° = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{3\pi}{4} = 135° \cdot \frac{7\pi}{6} = 210°$.

Rappel de cours. $180° = \pi$ rad. Degrés → radians : $\times \frac{\pi}{180}$ · radians → degrés : $\times \frac{180}{\pi}$.

Erreur fréquente. Mélanger les deux facteurs. Contrôle immédiat : un résultat en radians doit être un « petit » nombre (moins de 6,3 pour un angle inférieur à un tour).

Correction de l'exercice 2 – Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

Ces valeurs se lisent sur le cercle trigonométrique : le cosinus est l'ABSCISSE du point, le sinus son ORDONNÉE.

$\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$ (le point est en $(1\,;0)$).

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (par symétrie : le point est sur la bissectrice).

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ (le point est en $(0\,;1)$).

Moyen mnémotechnique : de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le cosinus DÉCROÎT de 1 à 0 en passant par $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$; le sinus fait l'inverse. Et $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$, ce qui permet de contrôler l'ordre.

Réponse. cos : 1 ; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0 · sin : 0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1.

Rappel de cours. Sur le cercle trigonométrique, M associé à l'angle x a pour coordonnées $(\cos x\,;\sin x)$.

Erreur fréquente. Échanger $\cos \frac{\pi}{6}$ et $\cos \frac{\pi}{3}$. Repère utile : $\frac{\pi}{3} = 60°$ est « presque en haut », donc son cosinus est PETIT ($\frac{1}{2}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Signe du cosinus et du sinus

Repères : le premier quadrant va de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le deuxième de $\frac{\pi}{2}$ à π, le troisième de π à $\frac{3\pi}{2}$, le quatrième de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π.

$x_1 = \frac{2\pi}{3} = 120°$: deuxième quadrant (en haut à gauche). Donc $\cos x_1 < 0$ et $\sin x_1 > 0$.

$x_2 = \frac{5\pi}{4} = 225°$: troisième quadrant (en bas à gauche). Donc $\cos x_2 < 0$ et $\sin x_2 < 0$.

$x_3 = -\frac{\pi}{3} = -60°$: on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, on arrive en bas à droite, dans le quatrième quadrant. Donc $\cos x_3 > 0$ et $\sin x_3 < 0$.

Vérification par les valeurs : $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✔ ; $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✔.

Règle à retenir : le cosinus est positif à DROITE de l'axe vertical, le sinus est positif AU-DESSUS de l'axe horizontal.

Réponse. $\frac{2\pi}{3}$: 2e quadrant, cos < 0 et sin > 0 · $\frac{5\pi}{4}$: 3e quadrant, les deux négatifs · $-\frac{\pi}{3}$: 4e quadrant, cos > 0 et sin < 0.

Rappel de cours. Cosinus = abscisse (positif à droite) · sinus = ordonnée (positif en haut).

Erreur fréquente. Croire qu'un angle négatif a forcément un cosinus négatif : $\cos(-\frac{\pi}{3}) = +\frac{1}{2}$. Le signe de l'angle et celui du cosinus n'ont aucun rapport direct.

Correction de l'exercice 4 – Périodicité et parité

Le cosinus est une fonction PAIRE : $\cos(-x) = \cos x$. Donc $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le sinus est une fonction IMPAIRE : $\sin(-x) = -\sin x$. Donc $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Géométriquement : les angles x et $-x$ donnent deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses — même abscisse (même cosinus), ordonnées opposées (sinus opposés).

Le cosinus est PÉRIODIQUE de période 2π : ajouter un tour complet ne change pas le point du cercle. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour $\frac{13\pi}{6}$, on retire un tour : $\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{13\pi - 12\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

Donc $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Réponse. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ · $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ · $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \cos\frac{13\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rappel de cours. $\cos(-x) = \cos x$ (paire) · $\sin(-x) = -\sin x$ (impaire) · $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Erreur fréquente. Écrire $\sin(-x) = \sin x$: le sinus change de signe. C'est l'erreur qui inverse tous les déphasages d'un exercice de physique.

Correction de l'exercice 5 – Amplitude, période et fréquence

Pour un signal $u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, l'amplitude est $|A|$. Ici $A = 12$: l'amplitude vaut 12 V (la tension varie entre −12 V et +12 V).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La pulsation est le coefficient de t : $\omega = 100\pi$ rad/s.

La période se calcule par $T = \frac{2\pi}{\omega}$: $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{2}{100} = 0{,}02$ s.

La fréquence est l'inverse de la période : $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02} = 50$ Hz.

C'est exactement la fréquence du réseau électrique français ✔ — un contrôle de vraisemblance utile.

Lecture physique : le signal effectue 50 oscillations complètes par seconde, chacune durant 20 millisecondes.

Réponse. Amplitude 12 V · période $T = 0{,}02$ s · fréquence $f = 50$ Hz.

Rappel de cours. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Erreur fréquente. Prendre $\omega = 100$ en oubliant le π : on trouverait $T \approx 0{,}063$ s et $f \approx 16$ Hz, valeurs sans rapport avec le réseau.

Correction de l'exercice 6 – Résoudre cos x = a

On cherche les points du cercle d'abscisse $\frac{1}{2}$. Il y en a DEUX : un au-dessus de l'axe des abscisses, un en dessous, symétriques.

La solution de référence est $x = \frac{\pi}{3}$ (car $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$).

La seconde est son opposée, ramenée dans $[0\,;2\pi]$: $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

Donc $\cos x = \frac{1}{2}$ a pour solutions $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

Pour $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: la référence est $\frac{\pi}{4}$ (dont le cosinus vaut $+\frac{\sqrt{2}}{2}$), et le cosinus étant négatif, on se place à GAUCHE de l'axe vertical.

Les solutions sont $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ et $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

Contrôle : $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✔ et $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✔.

Réponse. $\cos x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ · $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$.

Rappel de cours. $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$. Sur un tour, il y a donc DEUX solutions (sauf si $\cos x = \pm 1$).

Erreur fréquente. N'en donner qu'une. Sur $[0\,;2\pi]$, une équation en cosinus a presque toujours deux solutions, symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Correction de l'exercice 7 – Résoudre sin x = a

On cherche les points du cercle d'ORDONNÉE $-\frac{1}{2}$: ils sont en bas, symétriques par rapport à l'axe vertical.

La référence est $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$: une première solution est $x = -\frac{\pi}{6}$.

La seconde est symétrique par rapport à l'axe vertical : $x = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$.

Contrôle : $-\frac{5\pi}{6} = -150°$, dont le sinus vaut bien $-\frac{1}{2}$ ✔. Les deux solutions appartiennent à $]-\pi\,;\pi]$ ✔.

Pour $\sin x = 1$: le point d'ordonnée 1 est UNIQUE sur le cercle, c'est le sommet.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc la seule solution est $x = \frac{\pi}{2}$.

À retenir : les valeurs extrêmes ±1 ne donnent qu'une solution par tour, alors qu'une valeur strictement comprise entre −1 et 1 en donne deux.

Réponse. $\sin x = -\frac{1}{2}$: $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$ · $\sin x = 1$: $x = \frac{\pi}{2}$ seulement.

Rappel de cours. $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$: symétrie par rapport à l'axe des ORDONNÉES.

Erreur fréquente. Utiliser la symétrie du cosinus (par rapport à l'axe des abscisses) pour une équation en sinus : les solutions seraient fausses.

Correction de l'exercice 8 – Relation fondamentale

La relation fondamentale est $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, valable pour tout angle.

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$.

Donc $\sin x = 0{,}6$ ou $\sin x = -0{,}6$: le carré ne donne pas le signe.

C'est l'information sur le quadrant qui tranche. Dans le quatrième quadrant, le sinus est NÉGATIF, donc $\sin x = -0{,}6$.

Sans cette précision, les deux valeurs ±0,6 sont possibles : $\cos x = 0{,}8$ correspond à deux angles, l'un dans le premier quadrant ($\sin x = 0{,}6$), l'autre dans le quatrième ($\sin x = -0{,}6$).

Contrôle : $0{,}8^2 + (-0{,}6)^2 = 0{,}64 + 0{,}36 = 1$ ✔ (on reconnaît le triangle 3-4-5, à l'échelle $\frac{1}{5}$).

Réponse. $\sin x = -0{,}6$ dans le quatrième quadrant · sans information de quadrant, $\sin x = \pm 0{,}6$.

Rappel de cours. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne la VALEUR ABSOLUE ; le quadrant donne le SIGNE.

Erreur fréquente. Écrire $\sin x = 1 - \cos x = 0{,}2$: la relation porte sur les CARRÉS, pas sur les valeurs.

Correction de l'exercice 9 – Angles associés

Formules des angles associés : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -0{,}809$ et $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = 0{,}588$.

Pour l'angle complémentaire : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5} \approx 0{,}588$.

Pour l'angle opposé par le sommet : $\cos(\pi + x) = -\cos x$, donc $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) \approx -0{,}809$.

Contrôle : $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} = 144°$ est dans le deuxième quadrant, où le cosinus est négatif et le sinus positif ✔. Et $\pi + \frac{\pi}{5} = 216°$ est dans le troisième, cosinus négatif ✔.

Méthode générale : plutôt que d'apprendre huit formules, on place l'angle sur le cercle et on lit les signes. Les valeurs sont toujours les mêmes à un signe près.

Réponse. $\cos(\pi - \frac{\pi}{5}) \approx -0{,}809$ et $\sin(\pi - \frac{\pi}{5}) \approx 0{,}588$ · $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}) \approx 0{,}588$ · $\cos(\pi + \frac{\pi}{5}) \approx -0{,}809$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ · $\sin(\pi - x) = \sin x$ · $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ · $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

Erreur fréquente. Confondre $\pi - x$ (symétrie verticale) et $\pi + x$ (symétrie centrale) : le sinus change de signe dans le second cas, pas dans le premier.

Correction de l'exercice 10 – Mesure principale d'un angle

Deux mesures d'un même angle diffèrent d'un multiple de 2π : on ajoute ou retire des tours jusqu'à tomber dans $]-\pi\,;\pi]$.

$\frac{17\pi}{4}$: on retire $2\pi = \frac{8\pi}{4}$, ce qui donne $\frac{9\pi}{4}$; encore 2π, et l'on obtient $\frac{\pi}{4}$.

$\frac{\pi}{4} \in\,]-\pi\,;\pi]$: c'est la mesure principale.

$-\frac{25\pi}{6}$: on ajoute $2\pi = \frac{12\pi}{6} \to -\frac{13\pi}{6}$; on ajoute encore $\frac{12\pi}{6} \to -\frac{\pi}{6}$.

$-\frac{\pi}{6}$ est bien dans $]-\pi\,;\pi]$: c'est la mesure principale.

$\frac{9\pi}{2}$: on retire $2\pi = \frac{4\pi}{2} \to \frac{5\pi}{2}$; puis encore $\to \frac{\pi}{2}$. Mesure principale : $\frac{\pi}{2}$.

Contrôle rapide : $\frac{17\pi}{4} = 765°$, et $765 - 2\times 360 = 45°$ ✔ ; $-\frac{25\pi}{6} = -750°$, et $-750 + 2\times 360 = -30°$ ✔.

Réponse. $\frac{17\pi}{4} \to \frac{\pi}{4}$ · $-\frac{25\pi}{6} \to -\frac{\pi}{6}$ · $\frac{9\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$.

Rappel de cours. Mesure principale : l'unique mesure dans $]-\pi\,;\pi]$. On ajoute ou retire 2π autant de fois qu'il faut.

Erreur fréquente. S'arrêter à $\frac{9\pi}{4}$: cette valeur (405°) est supérieure à π, il reste un tour à retirer.

Correction de l'exercice 11 – Signal sinusoïdal : tous les paramètres

Identification par rapport à $A\cos(\omega t + \varphi)$: $A = 4$, $\omega = 200\pi$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Amplitude : 4 A (le courant oscille entre -4 A et 4 A).

Période : $T = \frac{2\pi}{200\pi} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ s, soit 10 ms.

Fréquence : $f = \frac{1}{T} = 100$ Hz.

Phase à l'origine : $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad, soit 60°.

$i(0) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ A.

Pour $t = 2{,}5 \times 10^{-3}$ s : l'argument vaut $200\pi \times 2{,}5 \times 10^{-3} + \frac{\pi}{3} = 0{,}5\pi + \frac{\pi}{3}$.

$0{,}5\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

$i = 4\cos\frac{5\pi}{6} = 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \approx -3{,}46$ A.

Cohérence : $t = 2{,}5$ ms représente un quart de période (10 ms), l'argument a donc avancé de $\frac{\pi}{2}$ — ce qu'on retrouve bien : $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ✔.

Réponse. $A = 4$ A, $\omega = 200\pi$ rad/s, $T = 10$ ms, $f = 100$ Hz, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ · $i(0) = 2$ A · $i(2{,}5$ ms $) = -2\sqrt{3} \approx -3{,}46$ A.

Rappel de cours. $i(0) = A\cos\varphi$: la phase à l'origine détermine la valeur de départ du

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

signal.

Erreur fréquente. Oublier la phase dans le calcul de $i(0)$: on annoncerait 4 A, alors que le signal ne démarre pas à son maximum.

Correction de l'exercice 12 – Écrire un signal à partir de ses caractéristiques

$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi$ rad/s (soit environ 314 rad/s).

Le signal est maximal en $t = 0$, donc $u(0) = A$, ce qui impose $\cos\varphi = 1$, donc $\varphi = 0$.

Expression : $u(t) = 325\cos(100\pi t)$.

Tension nulle : $\cos(100\pi t) = 0$, donc $100\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

En divisant par 100π : $t = \frac{1}{200} + \frac{k}{100}$.

La période vaut $T = 0{,}02$ s. Dans $[0\,;0{,}02[$, les valeurs sont $t = \frac{1}{200} = 0{,}005$ s ($k = 0$) et $t = 0{,}005 + 0{,}01 = 0{,}015$ s ($k = 1$).

La tension s'annule donc à 5 ms et à 15 ms, soit deux fois par période — ce qui est logique : une sinusoïde traverse zéro deux fois par cycle.

Contrôle : $u(0{,}005) = 325\cos(100\pi \times 0{,}005) = 325\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ✔.

Réponse. $\omega = 100\pi$ rad/s · $u(t) = 325\cos(100\pi t)$ · tension nulle à $t = 5$ ms et $t = 15$ ms.

Rappel de cours. Maximum en $t = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ · $\cos X = 0 \Leftrightarrow X = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Erreur fréquente. Écrire $\cos X = 0 \Leftrightarrow X = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$: le cosinus s'annule DEUX fois par tour, donc le pas est π, pas 2π.

Correction de l'exercice 13 – Déphasage entre deux signaux

Les deux signaux ont la même pulsation $\omega = 100\pi$ rad/s, donc la même période $T = 0{,}02$ s et la même fréquence 50 Hz ✔.

Le déphasage est la différence des phases : $\varphi_i - \varphi_u = -\frac{\pi}{4} - 0 = -\frac{\pi}{4}$ rad.

En degrés : $-\frac{\pi}{4} = -45°$.

Le signe négatif signifie que le courant est EN RETARD sur la tension (son maximum arrive plus tard).

Retard temporel : un déphasage de 2π correspond à une période entière T. Donc un déphasage de $\frac{\pi}{4}$ correspond à $\frac{\pi/4}{2\pi} \times T = \frac{T}{8}$.

$\frac{T}{8} = \frac{0{,}02}{8} = 0{,}0025$ s, soit 2,5 ms.

Contrôle : le maximum de u est en $t = 0$. Celui de i vérifie $100\pi t - \frac{\pi}{4} = 0$, donc $t = \frac{1}{400} = 0{,}0025$ s ✔ Le courant atteint bien son maximum 2,5 ms après la tension.

Interprétation physique : ce retard est la signature d'un circuit inductif (bobine, moteur). C'est lui qu'on corrige en « relevant le facteur de puissance ».

Réponse. Même fréquence 50 Hz · déphasage $-\frac{\pi}{4}$ rad, soit $-45°$: le courant est en retard · retard de $\frac{T}{8} = 2{,}5$ ms.

Rappel de cours. Déphasage $\Delta\varphi$ et retard Δt sont liés par $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$.

Erreur fréquente. Comparer deux signaux de fréquences différentes : la notion de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

déphasage constant n'a alors plus de sens. On vérifie TOUJOURS l'égalité des pulsations d'abord.

Correction de l'exercice 14 – Instants où un signal atteint une valeur

$T = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ s.

On résout $100\cos(20\pi t) = 50$, soit $\cos(20\pi t) = 0{,}5$.

Les solutions de $\cos X = 0{,}5$ sont $X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $X = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Premier cas : $20\pi t = \frac{\pi}{3}$ donne $t = \frac{1}{60} \approx 0{,}0167$ s.

Second cas : $20\pi t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ donne $t = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833$ s.

Les deux instants appartiennent à $[0\,;0{,}1]$ ✔. La tension atteint 50 V deux fois par période : une fois en descendant, une fois en remontant.

Contrôle de symétrie : 0,0167 et 0,0833 sont symétriques par rapport à $\frac{T}{2} = 0{,}05$ s ($0{,}05 - 0{,}0167 = 0{,}0333$ et $0{,}0833 - 0{,}05 = 0{,}0333$) ✔, ce qui traduit la symétrie du cosinus.

Réponse. $T = 0{,}1$ s · $u(t) = 50$ V pour $t = \frac{1}{60} \approx 16{,}7$ ms et $t = \frac{1}{12} \approx 83{,}3$ ms.

Rappel de cours. On isole le cosinus, on résout sur l'argument, PUIS on revient au temps en divisant par ω.

Erreur fréquente. Diviser directement l'équation par cos ou « passer cos de l'autre côté ». L'inconnue est dans l'argument : il faut d'abord résoudre en $X = \omega t$.

Correction de l'exercice 15 – Retrouver la phase à l'origine

$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi$ rad/s.

On cherche $u(t) = 12\cos(100\pi t + \varphi)$ avec $u(0) = 6$.

$u(0) = 12\cos\varphi = 6$, donc $\cos\varphi = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Les deux solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ sont $\varphi = \frac{\pi}{3}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

Pour trancher, on regarde le sens de variation en $t = 0$, c'est-à-dire le signe de $u'(0)$.

$u'(t) = -12 \times 100\pi\sin(100\pi t + \varphi)$, donc $u'(0) = -1\,200\pi\sin\varphi$.

Avec $\varphi = \frac{\pi}{3}$: $\sin\varphi > 0$, donc $u'(0) < 0$ — la tension DÉCROÎT ✔ C'est le cas décrit par l'énoncé.

Avec $\varphi = -\frac{\pi}{3}$: $\sin\varphi < 0$, donc $u'(0) > 0$, la tension croîtrait ✘

Conclusion : $\varphi = \frac{\pi}{3}$ et $u(t) = 12\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Contrôle : $u(0) = 12\cos\frac{\pi}{3} = 6$ V ✔, et le maximum a été atteint AVANT $t = 0$ (à $t = -\frac{1}{300}$ s), ce qui est cohérent avec une tension déjà en train de redescendre.

Réponse. $\omega = 100\pi$ rad/s · $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ donne $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$ · la décroissance impose $\varphi = \frac{\pi}{3}$, donc $u(t) = 12\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Rappel de cours. La valeur initiale donne $\cos\varphi$ (deux possibilités), le SENS DE VARIATION initial (signe de $-\sin\varphi$) lève l'ambiguïté.

Erreur fréquente. Choisir φ au hasard entre les deux valeurs : le signal obtenu serait en

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

avance au lieu d'être en retard, et tous les calculs d'instants seraient décalés.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : la tension du secteur

$A = 230\sqrt{2} \approx 325{,}27$, soit $A \approx 325$ V.

$\omega = 2\pi f = 100\pi$ rad/s.

La tension est nulle et croissante en $t = 0$. Avec un cosinus, $u(0) = A\cos\varphi = 0$ impose $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Pour savoir lequel, on regarde la croissance : avec $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, on a $u(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\sin(\omega t)$, qui est bien croissante en 0 ✔. Avec $+\frac{\pi}{2}$, on obtiendrait $-A\sin(\omega t)$, décroissante.

Donc $u(t) = 325\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$, ce qui s'écrit aussi $u(t) = 325\sin(100\pi t)$.

$u(4\text{ ms})$: l'argument vaut $100\pi \times 0{,}004 = 0{,}4\pi$ rad.

$u = 325\sin(0{,}4\pi) = 325\sin(72°) \approx 325 \times 0{,}951 \approx 309{,}1$ V.

Dernière question : $u(t) > 230$ équivaut à $325\sin(100\pi t) > 230$, soit $\sin(100\pi t) > \dfrac{230}{325} \approx 0{,}7077$.

Or $\dfrac{230}{325} = \dfrac{230}{230\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ exactement : la valeur efficace correspond précisément au sinus de $\frac{\pi}{4}$.

$\sin X > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $\frac{\pi}{4} < X < \frac{3\pi}{4}$, soit un intervalle d'argument de longueur $\frac{\pi}{2}$.

Sur une période complète (argument de 0 à 2π), cela représente $\dfrac{\pi/2}{2\pi} = \dfrac{1}{4}$ de la période — mais uniquement dans l'alternance positive.

Conclusion : la tension dépasse +230 V pendant un quart de la période, soit 5 ms. En valeur absolue ($|u| > 230$ V), ce serait la moitié du temps, la même durée se répétant dans l'alternance négative.

Réponse. $A \approx 325$ V · $u(t) = 325\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 325\sin(100\pi t)$ · $u(4\text{ ms}) \approx 309$ V · la tension dépasse 230 V pendant $\frac{T}{4} = 5$ ms par période.

Rappel de cours. $A = U_{\text{eff}}\sqrt{2}$. Un signal nul et CROISSANT en $t = 0$ s'écrit $A\sin(\omega t)$, c'est-à-dire $A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$.

Erreur fréquente. Confondre 230 V (valeur efficace, celle qui chauffe) et 325 V (amplitude, valeur crête). Le 230 V d'une prise n'est jamais la valeur maximale atteinte.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : deux signaux en quadrature

$T = \dfrac{2\pi}{40\pi} = 0{,}05$ s, soit 50 ms pour les deux signaux.

Le déphasage vaut $-\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire un QUART de tour ($\frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4}$) : d'où le nom de quadrature. Le retard temporel est $\dfrac{T}{4} = 12{,}5$ ms.

En $t = 0$: $u_1(0) = 5\cos 0 = 5$ V et $u_2(0) = 5\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ V.

En $t = 12{,}5$ ms $= 0{,}0125$ s : l'argument de u_1 vaut $40\pi \times 0{,}0125 = 0{,}5\pi = \frac{\pi}{2}$, donc $u_1 = 5\cos\frac{\pi}{2} = 0$ V.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour u_2 : argument $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, donc $u_2 = 5\cos 0 = 5$ V.

Les rôles se sont échangés : u_2 reproduit u_1 avec un quart de période de retard. C'est ce décalage qui permet au codeur de déterminer le SENS de rotation.

Dernière question : $u_2(t) = 5\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 5\sin(\omega t)$.

Donc $u_1^2 + u_2^2 = 25\cos^2(\omega t) + 25\sin^2(\omega t) = 25(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) = 25$.

La somme des carrés vaut donc constamment 25 V², quel que soit t ✔.

Contrôle sur les valeurs calculées : en $t = 0$, $5^2 + 0^2 = 25$ ✔ ; en $t = 12{,}5$ ms, $0^2 + 5^2 = 25$ ✔.

Utilité pratique : cette propriété sert à contrôler en continu le bon fonctionnement du codeur — si la somme des carrés décroche, c'est qu'un capteur est défaillant.

Réponse. $T = 50$ ms · déphasage de $\frac{\pi}{2}$, soit $\frac{T}{4} = 12{,}5$ ms (quadrature) · $u_1(0) = 5$ V et $u_2(0) = 0$ V, valeurs échangées à 12,5 ms · $u_1^2 + u_2^2 = 25$ V² constamment.

Rappel de cours. $\cos\left(X - \frac{\pi}{2}\right) = \sin X$: c'est ce qui transforme deux signaux en quadrature en un couple (cos ; sin), de somme des carrés constante.

Erreur fréquente. Croire que deux signaux en quadrature sont « opposés ». Opposés, ce serait un déphasage de π ; la quadrature, c'est $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : lire un oscillogramme

Le signal varie entre −6 et +6 V : l'amplitude est $A = 6$ V (la moitié de l'amplitude crête à crête de 12 V).

L'écart entre deux maximums consécutifs est la PÉRIODE : $T = 4$ ms $= 0{,}004$ s.

Fréquence : $f = \frac{1}{0{,}004} = 250$ Hz.

Pulsation : $\omega = 2\pi f = 500\pi$ rad/s (environ 1 571 rad/s).

Le signal est maximal en $t = 1$ ms, donc son argument y est nul : $\omega \times 0{,}001 + \varphi = 0$.

$500\pi \times 0{,}001 = 0{,}5\pi$, donc $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Expression : $u(t) = 6\cos\left(500\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Valeur en $t = 0$: $u(0) = 6\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ V.

Contrôle de cohérence : le signal est nul en $t = 0$, maximal à 1 ms (soit $\frac{T}{4}$ plus tard) — c'est exactement le comportement d'un sinus, et l'on a bien $u(t) = 6\sin(500\pi t)$ ✔.

Vérification du maximum : $u(0{,}001) = 6\sin(500\pi \times 0{,}001) = 6\sin\frac{\pi}{2} = 6$ V ✔.

Réponse. $A = 6$ V, $T = 4$ ms, $f = 250$ Hz · $\omega = 500\pi$ rad/s · $u(t) = 6\cos\left(500\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 6\sin(500\pi t)$ · $u(0) = 0$ V.

Rappel de cours. Un maximum à l'instant t_0 impose $\omega t_0 + \varphi = 0$, donc $\varphi = -\omega t_0$.

Erreur fréquente. Prendre l'amplitude crête à crête (12 V) pour A. L'amplitude est la moitié de l'écart total.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : durée de fonctionnement d'un seuil

Période : $T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02$ s.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\cos(100\pi t) = 0{,}5$ donne $100\pi t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $100\pi t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Premier cas : $t = \frac{1}{300} \approx 0{,}003\,33$ s.

Second cas, avec $k = 1$: $100\pi t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, donc $t = \frac{5}{300} = \frac{1}{60} \approx 0{,}016\,67$ s.

Pour $u(t) > 10$, il faut $\cos(100\pi t) > 0{,}5$, ce qui correspond à un argument compris entre $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ (modulo 2π).

En temps, sur $[0\,;0{,}02]$: cela donne $t \in [0\,;0{,}003\,33[$ puis $t \in]0{,}016\,67\,;0{,}02]$.

Durée totale au-dessus de 10 V :
$0{,}003\,33 + (0{,}02 - 0{,}016\,67) = 0{,}003\,33 + 0{,}003\,33 = 0{,}006\,67$ s.

Proportion : $\frac{0{,}006\,67}{0{,}02} = \frac{1}{3}$, soit un tiers de la période.

Calcul direct de cette proportion : l'argument parcourt un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$ sur les 2π d'une période, soit $\frac{1}{3}$ ✔.

Pour $|u(t)| > 10$, il faut ajouter l'alternance négative, qui par symétrie dure aussi un tiers de période : au total $\frac{2}{3}$ de la période, soit environ 13,3 ms sur 20 ms.

Conclusion pour le système : il est déclenché les deux tiers du temps. Si l'on voulait un déclenchement moins fréquent, il faudrait relever le seuil — par exemple à $10\sqrt{2} \approx 14{,}1$ V, la proportion tomberait à la moitié.

Réponse. $t = \frac{1}{300}$ s et $t = \frac{1}{60}$ s · $u(t) > 10$ V sur $[0\,;\frac{1}{300}[\cup]\frac{1}{60}\,;0{,}02]$ · le seuil $|u| > 10$ V est franchi pendant $\frac{2}{3}$ de la période.

Rappel de cours. Une inéquation trigonométrique se résout d'abord sur l'ARGUMENT, puis se traduit en temps en divisant par ω.

Erreur fréquente. Oublier que l'intervalle de solutions est « à cheval » sur le début et la fin de la période : il faut bien deux morceaux sur $[0\,;T]$.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : régler une fréquence de découpage

Entre un maximum et le passage par zéro suivant, il s'écoule un QUART de période.

Donc $\frac{T}{4} = 1{,}5$ ms, soit $T = 6$ ms $= 0{,}006$ s.

Fréquence : $f = \frac{1}{0{,}006} \approx 166{,}7$ Hz.

Pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}006} = \frac{1\,000\pi}{3} \approx 1\,047$ rad/s.

Expression : $u(t) = 48\cos\left(\frac{1\,000\pi}{3}\,t\right)$, avec t en secondes.

$u(1\text{ ms})$: l'argument vaut $\frac{1\,000\pi}{3} \times 0{,}001 = \frac{\pi}{3}$, donc $u = 48 \times \frac{1}{2} = 24$ V.

$u(3\text{ ms})$: l'argument vaut $\frac{1\,000\pi}{3} \times 0{,}003 = \pi$, donc $u = 48\cos\pi = -48$ V. C'est le minimum, atteint à la demi-période ✔.

Dernière question : on cherche la proportion du temps où $|u| \leq 40$, c'est-à-dire $|\cos(\omega t)| \leq \frac{40}{48} = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333$.

L'angle dont le cosinus vaut $\frac{5}{6}$ est $\alpha = \arccos(0{,}8333) \approx 0{,}5857$ rad (soit environ 33,6°).

Sur un tour, $|\cos X| \leq \frac{5}{6}$ est vérifié en dehors de deux petits secteurs autour de 0 et de π,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

chacun de largeur 2α.

Proportion du temps : $1 - \dfrac{2 \times 2\alpha}{2\pi} = 1 - \dfrac{2\alpha}{\pi} \approx 1 - \dfrac{1{,}171}{3{,}1416} \approx 1 - 0{,}373 = 0{,}627$.

Soit environ 62,7% de la période, ce qui dépasse la moitié : le cahier des charges est RESPECTÉ ✔.

Contrôle de vraisemblance : une sinusoïde passe une grande partie de son temps loin de ses extrêmes (elle y est « lente »), donc une proportion supérieure à 50% sous 83% de l'amplitude est cohérente.

Réponse. $T = 6$ ms et $f \approx 166{,}7$ Hz · $u(t) = 48\cos\left(\dfrac{1\,000\pi}{3}t\right)$ · $u(1\text{ ms}) = 24$ V et $u(3\text{ ms}) = -48$ V · $|u| \leq 40$ V pendant environ 62,7% de la période : contrainte respectée.

Rappel de cours. Du maximum au zéro suivant : un QUART de période. Du maximum au minimum : une DEMI-période.

Erreur fréquente. Prendre 1,5 ms pour la demi-période : on obtiendrait $T = 3$ ms et une fréquence deux fois trop grande.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).