Variables aléatoires — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Une variable aléatoire, c'est un NOMBRE attaché au résultat d'une expérience : le coût d'une intervention de maintenance, le nombre de pièces défectueuses d'un prélèvement, le gain d'un pari. Donner sa loi, c'est lister ses valeurs possibles avec leurs probabilités ; calculer son espérance, c'est dire vers quelle moyenne on tend quand on répète l'expérience un grand nombre de fois. C'est l'outil de décision par excellence : choisir un contrat de garantie, dimensionner un stock, évaluer un risque. Ces 20 exercices corrigés couvrent la loi de probabilité, l'espérance, la loi de Bernoulli et la fluctuation d'échantillonnage — cette dernière expliquant pourquoi une fréquence observée s'écarte presque toujours de la probabilité théorique. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/variables-aleatoires

Exercice 1 – Reconnaître une variable aléatoire

On prélève une pièce dans une production. On définit X : le coût de traitement de la pièce, égal à 0 € si elle est conforme, 4 € si elle est retouchable et 15 € si elle est à rebuter.

1. Quelles valeurs peut prendre X ?

2. Sachant que 90% des pièces sont conformes, 7% retouchables et 3% à rebuter, donne la loi de X.

Exercice 2 – Loi de probabilité d'un jeu

On lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat est 6, on gagne 5 € ; si c'est 4 ou 5, on gagne 1 € ; sinon on ne gagne rien. On note G le gain.

1. Donne la loi de probabilité de G.

2. Calcule $P(G \geq 1)$.

Exercice 3 – Compléter une loi de probabilité

Une variable aléatoire X a la loi suivante, où a est inconnu :

$P(X = 10) = 0{,}45 \cdot P(X = 20) = 0{,}30 \cdot P(X = 50) = a \cdot P(X = 100) = 0{,}05$

1. Détermine a.

2. Calcule $P(X \leq 20)$ et $P(X > 20)$.

Exercice 4 – Calculer une espérance

On reprend le coût de traitement d'une pièce : $P(X{=}0) = 0{,}90$, $P(X{=}4) = 0{,}07$, $P(X{=}15) = 0{,}03$.

1. Calcule l'espérance $E(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Interprète ce résultat, et estime le coût de traitement de 10 000 pièces.

Exercice 5 – Loi de Bernoulli et son espérance

Un test de conformité est réussi avec une probabilité 0,96. On note X la variable qui vaut 1 si le test est réussi et 0 sinon.

1. Donne la loi de X et son nom.

2. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 6 – Ce jeu est-il équitable ?

Une fête d'entreprise propose un jeu : la mise est de 2 €. On tire une boule dans une urne contenant 20 boules dont 2 rouges et 5 vertes. Une boule rouge rapporte 10 €, une verte 3 €, les autres ne rapportent rien.

1. Donne la loi du GAIN ALGÉBRIQUE G (gain reçu moins la mise).

2. Calcule $E(G)$ et dis si le jeu est équitable.

Exercice 7 – Loi d'une variable définie sur un arbre

Deux composants indépendants sont testés. Chacun est défectueux avec une probabilité 0,2. On note X le nombre de composants défectueux.

1. Donne la loi de X.

2. Calcule $E(X)$ et commente le résultat.

Exercice 8 – Décider avec l'espérance

Un atelier doit choisir entre deux machines. La machine A ne tombe jamais en panne mais coûte 3 000 € par an d'entretien. La machine B ne coûte que 900 € d'entretien, mais elle subit chaque année une panne coûtant 12 000 € avec une probabilité 0,15.

1. Donne la loi du coût annuel C_B de la machine B.

2. Calcule $E(C_B)$ et compare avec la machine A.

3. Quelle machine choisir ?

Exercice 9 – Probabilités cumulées

Le nombre X d'interventions de maintenance par mois sur une ligne suit la loi :

$P(X=0) = 0{,}25 \cdot P(X=1) = 0{,}35 \cdot P(X=2) = 0{,}22 \cdot P(X=3) = 0{,}12 \cdot P(X=4) = 0{,}06$

1. Calcule $P(X \geq 2)$ et $P(1 \leq X \leq 3)$.

2. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 10 – Espérance d'un coût transformé

Le nombre X de pièces défectueuses par lot suit la loi $P(X=0) = 0{,}5$, $P(X=1) = 0{,}3$, $P(X=2) = 0{,}2$. Le coût de traitement d'un lot, en euros, est $C = 20 + 35X$ (un forfait plus le coût par pièce défectueuse).

1. Donne la loi de C.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calcule $E(C)$ de deux façons.

Exercice 11 – Budget de maintenance prévisionnel

Sur une machine, le coût annuel de maintenance dépend du niveau d'usure constaté : 1 200 € (usure faible, probabilité 0,55), 3 500 € (usure moyenne, probabilité 0,30), 9 000 € (usure forte, probabilité 0,15).

1. Calcule le coût annuel moyen prévisionnel.

2. L'atelier possède 8 machines identiques et indépendantes. Quel budget annuel prévoir ?

3. Un contrat forfaitaire « tout compris » est proposé à 3 000 € par machine et par an. Est-il intéressant ?

Exercice 12 – Déterminer une mise pour un jeu équitable

Un stand propose de tirer une boule dans une urne de 25 boules : 1 boule « or » rapporte 40 €, 4 boules « argent » rapportent 10 €, les autres ne rapportent rien. La mise m est à déterminer.

1. Exprime l'espérance du gain algébrique en fonction de m.

2. Détermine m pour que le jeu soit équitable.

3. Quelle mise faut-il fixer pour que l'organisateur gagne en moyenne 1 € par partie ?

Exercice 13 – Garantie et espérance de coût

Un fabricant vend un appareil 240 €. Il constate que 6% des appareils tombent en panne pendant la garantie : la réparation lui coûte alors 80 €, et 1% doivent être intégralement remplacés, pour un coût de 240 €.

1. Donne la loi du coût C du service après-vente pour un appareil.

2. Calcule $E(C)$.

3. Le fabricant propose une extension de garantie à 15 € qui doublerait la durée de couverture (et donc, estime-t-il, les taux de panne). Cette extension est-elle rentable pour lui ?

Exercice 14 – Fluctuation d'échantillonnage

Une production contient 20% de pièces de premier choix. On prélève au hasard des échantillons de 50 pièces. Cinq échantillons donnent respectivement 7, 12, 9, 14 et 11 pièces de premier choix.

1. Calcule la fréquence de pièces de premier choix dans chaque échantillon.

2. Combien en attendait-on par échantillon ?

3. Ces écarts remettent-ils en cause la proportion annoncée de 20% ?

Exercice 15 – Choisir un niveau de stock

Un atelier vend des modules dont la demande hebdomadaire D suit la loi : $P(D = 10) = 0{,}2$, $P(D = 20) = 0{,}5$, $P(D = 30) = 0{,}3$. Chaque module vendu rapporte 40 €, chaque module produit mais non vendu coûte 15 € (stockage et perte). L'atelier

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

doit choisir de produire 20 ou 30 modules.

1. Calcule l'espérance de la demande.

2. Calcule l'espérance de gain si l'atelier produit 20 modules.

3. Même calcul pour 30 modules, puis conclus.

Exercice 16 – Type bac : loi, espérance et décision

Un atelier assemble des cartes. Le temps d'assemblage d'une carte, en minutes, est une variable aléatoire T de loi :

$P(T = 8) = 0{,}40 \cdot P(T = 10) = 0{,}35 \cdot P(T = 12) = 0{,}20 \cdot P(T = 20) = 0{,}05$

1. Calcule $E(T)$ et interprète.

2. Calcule $P(T \leq 10)$ et $P(T \geq 12)$.

3. Un opérateur travaille 7 heures par jour. Combien de cartes peut-il assembler en moyenne par jour ?

4. L'atelier doit livrer 200 cartes en une semaine de 5 jours. Combien d'opérateurs faut-il prévoir ?

Exercice 17 – Type bac : production avec pannes

Une ligne produit 500 pièces par jour quand tout va bien. Chaque jour, indépendamment, elle subit une panne courte avec une probabilité 0,20 (production réduite à 380 pièces) ou une panne longue avec une probabilité 0,05 (production réduite à 150 pièces). On note N la production journalière.

1. Donne la loi de N.

2. Calcule $E(N)$.

3. Sur 20 jours ouvrés, quelle production totale prévoir ?

4. Un client demande 9 000 pièces en 20 jours. L'engagement est-il tenable ?

Exercice 18 – Type bac : fluctuation et taille d'échantillon

Un lot contient 10% de pièces hors tolérance. On prélève des échantillons et on relève la fréquence f de pièces hors tolérance. Sur des échantillons de taille 20, on observe des fréquences allant de 0 à 0,25 ; sur des échantillons de taille 500, de 0,076 à 0,124.

1. Combien de pièces hors tolérance attend-on dans un échantillon de 20 ? de 500 ?

2. Interprète les deux plages de fréquences observées.

3. Un échantillon de 20 pièces contenant 3 pièces hors tolérance suffit-il à conclure que le lot dépasse 10% ?

4. Même question avec 75 pièces hors tolérance sur un échantillon de 500.

Exercice 19 – Type bac : paramètre inconnu dans une loi

Un fournisseur propose un contrat : l'atelier paye 50 € par livraison, et reçoit une compensation de 300 € si la livraison est en retard. La probabilité de retard est p, inconnue. On note G le gain algébrique de l'atelier sur une livraison.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Donne la loi de G en fonction de p.

2. Exprime $E(G)$ en fonction de p.

3. Pour quelle valeur de p le contrat est-il équilibré pour l'atelier ?

4. Le fournisseur annonce $p = 0{,}12$. Le contrat est-il avantageux pour l'atelier ?

Exercice 20 – Type bac : même espérance, risques différents

Deux stratégies de maintenance ont été chiffrées pour l'année. Stratégie A : coût certain de 6 000 €. Stratégie B : coût de 2 000 € avec une probabilité 0,8, et de 22 000 € avec une probabilité 0,2.

1. Calcule l'espérance de coût de chaque stratégie.

2. Donne l'étendue des coûts possibles pour chacune.

3. Quelle stratégie recommander, et pourquoi l'espérance ne suffit-elle pas à décider ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).