Dérivation et variations — Première STMG

25 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Dériver, en gestion, c'est mesurer ce que coûte ou rapporte l'unité SUIVANTE. Le nombre dérivé $C'(q)$ porte d'ailleurs un nom dans les entreprises : le coût marginal, c'est-à-dire le coût de production d'un article de plus. Ces 25 exercices installent le nombre dérivé, la tangente et les formules de dérivation, puis le résultat central du chapitre : le SIGNE de la dérivée donne les variations, donc les optimums. On reprend le modèle d'entreprise du chapitre précédent pour retrouver par le calcul ce qu'on y avait deviné graphiquement — la production optimale de 30 articles, et la valeur exacte du coût moyen minimal. Les deux derniers exercices démontrent deux résultats que tout gestionnaire utilise : on produit tant que la recette marginale dépasse le coût marginal, et le coût moyen est minimal exactement là où il croise le coût marginal.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-stmg/derivation-variations

Exercice 1 – Du taux de variation au nombre dérivé

Le coût de production, en euros, de q articles est $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$. On s'intéresse à ce que coûte l'augmentation de la production autour de $q = 10$.

1. Calcule le taux de variation de C entre 10 et 15, puis entre 10 et 11.

2. Que semblent devenir ces taux quand l'écart se resserre ?

Exercice 2 – Les dérivées à connaître

Donne la dérivée de chacune de ces fonctions : $f(x) = 4\,000$; $g(x) = 100x$; $h(x) = x^2$; $k(x) = x^3$; $m(x) = 5x^2 + 100x + 4\,000$.

Exercice 3 – Dériver un coût et un bénéfice

On garde $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$ et $B(q) = -5q^2 + 300q - 4\,000$.

1. Calcule $C'(q)$ et $B'(q)$.

2. Calcule $C'(20)$, $B'(20)$ et $B'(40)$, puis interprète les signes.

Exercice 4 – Nombre dérivé et tangente

Toujours avec $B(q) = -5q^2 + 300q - 4\,000$, donc $B'(q) = -10q + 300$.

1. Calcule $B'(10)$, $B'(30)$ et $B'(50)$.

2. Interprète chaque résultat en termes de tangente à la courbe du bénéfice.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Équation d'une tangente

Détermine l'équation de la tangente à la courbe du coût $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$ au point d'abscisse $q = 10$.

Exercice 6 – Coût marginal et coût du dernier article

Le coût marginal est modélisé par la dérivée $C'(q) = 10q + 100$.

1. Calcule $C'(20)$, puis le coût réel du vingt-et-unième article, c'est-à-dire $C(21) - C(20)$.

2. Compare les deux résultats et explique l'écart.

3. Le coût marginal augmente-t-il avec la production ? Qu'est-ce que cela signifie ?

Exercice 7 – Signe de la dérivée et production optimale

Étudie le signe de $B'(q) = -10q + 300$ et déduis-en le tableau de variations de B sur $[0\,;60]$, puis la production optimale.

Exercice 8 – Un coût toujours croissant

Une autre entreprise a pour coût total $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 1\,000$ euros.

1. Calcule $C'(q)$.

2. Résous $C'(q) = 400$ et déduis-en l'axe de symétrie de la parabole représentant C'.

3. Montre que $C'(q) > 0$ pour tout q, puis conclus sur le sens de variation de C. Ce résultat est-il économiquement attendu ?

Exercice 9 – Bénéfice à deux extremums

Le bénéfice, en euros, d'une entreprise est $B(q) = -q^3 + 24q^2 - 45q - 400$ pour q articles vendus, avec $0 \leq q \leq 22$.

1. Calcule $B'(q)$ et vérifie que $B'(q) = -3(q-1)(q-15)$.

2. Dresse le tableau de variations de B.

3. Donne le bénéfice maximal et la production correspondante.

Exercice 10 – Recette avec un prix qui baisse

Pour vendre davantage, un commerçant baisse son prix : il vend q articles au prix unitaire de $600 - 2q$ euros, pour $0 \leq q \leq 300$.

1. Exprime la recette $R(q)$ et développe-la.

2. Calcule $R'(q)$, puis $R'(100)$, et interprète ce nombre.

3. Pour quelle quantité la recette est-elle maximale ? Que vaut-elle ?

Exercice 11 – Vitesse de variation d'un chiffre d'affaires

Le chiffre d'affaires mensuel d'une boutique en ligne, en milliers d'euros, est modélisé par $f(t) = -0{,}5t^2 + 8t + 40$, où $t \in [0\,;12]$ est le nombre de mois écoulés depuis son ouverture.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Calcule $f'(t)$, puis $f'(2)$ et $f'(10)$. Interprète ces deux nombres.

2. Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;12]$.

3. Quel est le chiffre d'affaires mensuel maximal ?

Exercice 12 – Coût minimal par le signe de la dérivée

Le coût de production d'une entreprise, en centaines d'euros, est $C(x) = x^3 - 12x + 20$, où $x \in [0\,;5]$ est la quantité produite en centaines d'articles.

1. Calcule $C'(x)$ et montre que $C'(x) = 3(x-2)(x+2)$.

2. Étudie le signe de $C'(x)$ sur $[0\,;5]$ et dresse le tableau de variations de C.

3. Pour quelle production le coût est-il minimal ? Que vaut-il ?

Exercice 13 – Zone de rentabilité et production optimale

On reprend le modèle d'entreprise du chapitre : chaque article est vendu 400 € et le coût de production de q articles est $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$ euros, pour $0 \leq q \leq 60$.

1. Montre que le bénéfice s'écrit $B(q) = -5q^2 + 300q - 4\,000$, puis vérifie que $B(q) = -5(q-20)(q-40)$.

2. Pour quelles quantités l'entreprise est-elle rentable ?

3. Calcule $B'(q)$ et détermine la production qui rend le bénéfice maximal.

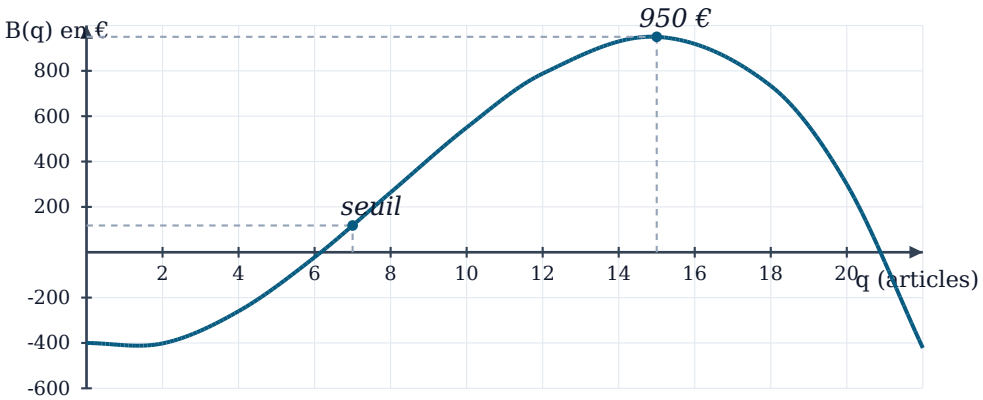
Exercice 14 – Étude complète d'un bénéfice cubique

On reprend $B(q) = -q^3 + 24q^2 - 45q - 400$, de dérivée $B'(q) = -3(q-1)(q-15)$, sur $[0\,;22]$. Le graphique ci-dessous représente cette fonction.

1. Détermine, par balayage, le seuil de rentabilité (première quantité rendant le bénéfice positif).

2. À partir de quelle quantité l'entreprise repasse-t-elle en perte ?

3. Un actionnaire propose de produire 20 articles « pour vendre plus ». Que lui répondre ?



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Recette marginale et coût marginal

On revient au modèle $R(q) = 400q$ et $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$.

1. Calcule $R'(q)$ et $C'(q)$, et interprète chacune.

2. Résous $R'(q) = C'(q)$.

3. Compare le résultat à la production optimale et explique le lien.

Exercice 16 – Estimer un coût avec la tangente

Une entreprise produit actuellement 30 articles, pour un coût total de $C(30) = 11\,500$ €, avec $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$.

1. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de C au point d'abscisse 30.

2. Utilise-la pour estimer le coût de 31 articles, puis compare à la valeur exacte.

3. Jusqu'où cette estimation reste-t-elle acceptable ?

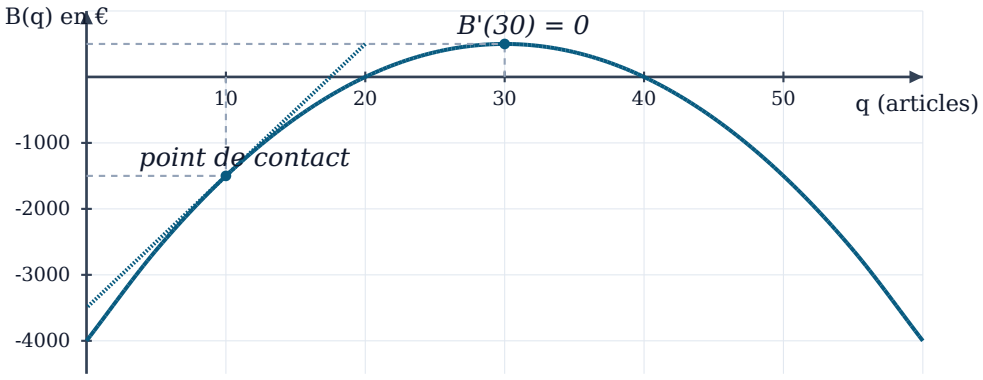
Exercice 17 – Lire des tangentes sur un graphique

La courbe ci-dessous est celle du bénéfice $B(q) = -5q^2 + 300q - 4\,000$, tracée avec sa tangente au point d'abscisse 10 (en pointillés).

1. Lis $B(10)$ et le coefficient directeur de la tangente, puis donne $B'(10)$.

2. Retrouve l'équation de cette tangente par le calcul.

3. En quel point la tangente à la courbe est-elle horizontale ? Que vaut alors B' ?



Exercice 18 – Rentabilité d'une tournée de livraison

Une entreprise de livraison facture 28 € chaque dizaine de colis livrés. Le coût d'une tournée de q dizaines de colis est $C(q) = 0{,}5q^2 + 8q + 50$ euros, pour $q \in [1\,;30]$.

1. Exprime le bénéfice $B(q)$ d'une tournée.

2. Calcule $B'(q)$ et étudie les variations de B sur $[1\,;30]$.

3. Combien de colis faut-il livrer pour que le bénéfice soit maximal ? Compare alors le coût marginal $C'(q)$ au prix facturé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Prévoir avec la tangente

Le nombre de visiteurs d'un salon professionnel, en centaines, est modélisé par $f(t) = t^2 + 2t + 50$, où t est le nombre d'heures écoulées depuis l'ouverture.

1. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4.

2. Utilise cette tangente pour estimer $f(4{,}5)$.

3. Compare avec la valeur exacte de $f(4{,}5)$.

Exercice 20 – Quand le prix de vente change

On garde le coût de production du chapitre, $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$ euros pour q articles. Le prix de vente unitaire, noté p, dépend du marché.

1. Pour un prix p donné, exprime $B(q)$ puis $B'(q)$.

2. Détermine la production optimale et le bénéfice maximal pour $p = 400$ €, puis pour $p = 500$ €.

3. Même question pour $p = 300$ €. Que peut-on conseiller à l'entreprise ?

Exercice 21 – Prix optimal par la dérivée

Une étude de marché donne la demande $D(p) = 1\,000 - 20p$ articles lorsque le prix unitaire est de p euros. La recette est donc $R(p) = 1\,000p - 20p^2$.

1. Calcule $R'(p)$ et étudie son signe.

2. Détermine le prix qui maximise la recette, ainsi que la recette et la quantité vendue.

3. Le coût unitaire d'achat est de 10 € par article. Le prix optimal change-t-il si l'on raisonne sur le bénéfice ?

Exercice 22 – Optimum sous contrainte de capacité

On reprend $B(q) = -q^3 + 24q^2 - 45q - 400$, de dérivée $B'(q) = -3(q-1)(q-15)$. L'atelier ne peut produire que 12 articles au maximum.

1. Détermine le bénéfice maximal réalisable sur $[0\,;12]$.

2. Chiffre le manque à gagner par rapport à l'optimum sans contrainte.

3. Un investissement de 50 000 € permettrait de porter la capacité à 15 articles. Sachant que l'entreprise produit 250 jours par an, en combien de temps serait-il remboursé ?

Exercice 23 – Retrouver une fonction à partir de sa dérivée

Le coût total d'une entreprise s'écrit $C(q) = aq^2 + bq + 3\,000$, où a et b sont deux nombres à déterminer. On sait que le coût marginal vaut 150 € pour 10 articles et 250 € pour 30 articles.

1. Exprime $C'(q)$ en fonction de a et b.

2. Détermine a et b.

3. Calcule le coût total de 20 articles et le coût moyen unitaire correspondant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 24 – Fabriquer la boîte de volume maximal

Une entreprise d'emballage découpe dans une plaque carrée de carton de 30 cm de côté un carré de côté x cm à chaque coin, puis relève les bords pour former une boîte sans couvercle. On a $x \in]0\,;15[$.

1. Montre que le volume de la boîte, en cm³, est $V(x) = x(30-2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$.

2. Calcule $V'(x)$ et montre que $V'(x) = 12(x-5)(x-15)$.

3. Étudie les variations de V et détermine la découpe qui donne la boîte de plus grand volume.

Exercice 25 – Synthèse : conseiller un dirigeant

Une entreprise vend ses articles 400 € pièce, avec un coût $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$. Le dirigeant hésite entre trois décisions : produire 20, 30 ou 40 articles par jour.

1. Calcule pour chaque option le bénéfice, le coût marginal et le coût moyen unitaire.

2. Quelle option conseiller, et pourquoi les deux autres sont-elles écartées ?

3. Le dirigeant objecte : « à 28 articles mon coût unitaire est plus bas qu'à 30, c'est donc là qu'il faut produire ». Que lui répondre ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 25 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Du taux de variation au nombre dérivé

Le taux de variation entre deux quantités a et b vaut $\dfrac{C(b)-C(a)}{b-a}$: c'est le coût moyen d'un article supplémentaire sur cet intervalle.

Calcul des valeurs utiles : $C(10) = 500 + 1\,000 + 4\,000 = 5\,500$ €.

$C(15) = 5 \times 225 + 1\,500 + 4\,000 = 1\,125 + 5\,500 = 6\,625$ €.

Taux entre 10 et 15 : $\dfrac{6\,625 - 5\,500}{15-10} = \dfrac{1\,125}{5} = 225$ € par article.

$C(11) = 5 \times 121 + 1\,100 + 4\,000 = 605 + 5\,100 = 5\,705$ €.

Taux entre 10 et 11 : $\dfrac{5\,705 - 5\,500}{1} = 205$ € — c'est exactement le coût du onzième article.

En resserrant encore : entre 10 et 10,1, le taux vaut 200,50 € ; entre 10 et 10,01, il vaut 200,05 €.

Les taux se rapprochent donc de 200. Cette valeur limite s'appelle le NOMBRE DÉRIVÉ de C en 10, et se note $C'(10)$.

Interprétation en gestion : $C'(10) = 200$ € signifie qu'au niveau de production de 10 articles, produire une unité de plus coûte environ 200 €. C'est le COÛT MARGINAL.

Contrôle de cohérence : le coût réel du onzième article vaut 205 €, très proche des 200 € annoncés par la dérivée. ✔ L'approximation est d'autant meilleure que la production est grande.

À retenir : un taux de variation concerne DEUX quantités et donne un coût moyen ; le nombre dérivé concerne UNE quantité et donne le coût marginal à cet endroit précis.

Réponse. 225 € entre 10 et 15, 205 € entre 10 et 11 · les taux tendent vers 200 € : c'est $C'(10)$, le coût marginal en $q = 10$.

Rappel de cours. Taux de variation = $\dfrac{C(b)-C(a)}{b-a}$ · nombre dérivé $C'(a)$ = sa limite quand b se rapproche de a. En gestion, $C'(q)$ est le coût marginal.

Erreur fréquente. Diviser par b au lieu de $b-a$. Le dénominateur est l'ÉCART entre les deux quantités, ici 5 puis 1.

Correction de l'exercice 2 – Les dérivées à connaître

Le programme de Première STMG repose sur quatre dérivées de référence et deux règles de calcul : $(k)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, puis $(u+v)' = u' + v'$ et $(ku)' = k \times u'$.

$f(x) = 4\,000$ est une fonction constante, donc $f'(x) = 0$. Une constante ne varie pas : sa pente est nulle partout.

En gestion, c'est cohérent : les charges fixes ne changent pas quand la production augmente, donc elles ne coûtent rien « à la marge ».

$g(x) = 100x$: on garde le coefficient et on dérive x, donc $g'(x) = 100 \times 1 = 100$. Chaque unité supplémentaire coûte 100 €.

$h(x) = x^2$ donne $h'(x) = 2x$, et $k(x) = x^3$ donne $k'(x) = 3x^2$.

m est une somme : on dérive terme à terme. $(5x^2)' = 5 \times 2x = 10x$, $(100x)' = 100$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$(4\,000)' = 0$.

Donc $m'(x) = 10x + 100$: c'est le coût marginal du modèle d'entreprise étudié dans tout ce chapitre.

Contrôle sur h : le taux de variation de x^2 entre 3 et 3,01 vaut $\dfrac{9{,}0601 - 9}{0{,}01} = 6{,}01$, très proche de $h'(3) = 6$.

Réponse. $f' = 0$; $g' = 100$; $h' = 2x$; $k' = 3x^2$; $m' = 10x + 100$.

Rappel de cours. $(k)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = k \times u'$: cela suffit pour tout polynôme de degré au plus 3.

Erreur fréquente. Garder la constante : la dérivée de $5x^2 + 100x + 4\,000$ est $10x + 100$, et non $10x + 4\,100$.

Correction de l'exercice 3 – Dériver un coût et un bénéfice

Deux règles suffisent : la dérivée d'une SOMME est la somme des dérivées, et un coefficient constant se conserve.

On dérive donc terme à terme, sans mélanger les termes entre eux.

Pour C : la dérivée de $5q^2$ est $5 \times 2q = 10q$, celle de $100q$ est 100, celle de 4 000 est 0.

Donc $C'(q) = 10q + 100$.

Pour B : la dérivée de $-5q^2$ est $-10q$, celle de $300q$ est 300, celle de $-4\,000$ est 0.

Donc $B'(q) = -10q + 300$.

$C'(20) = 200 + 100 = 300$ € : au niveau de 20 articles, le suivant coûte environ 300 € à produire.

$B'(20) = -200 + 300 = 100$, un nombre POSITIF : à 20 articles, produire une unité de plus fait GAGNER environ 100 €. Il faut donc augmenter la production.

$B'(40) = -400 + 300 = -100$, un nombre NÉGATIF : à 40 articles, produire une unité de plus fait PERDRE 100 €. Il faut réduire la production.

Remarque de forme, utile pour se relire : la dérivée d'un polynôme de degré 2 est de degré 1, et le terme constant disparaît toujours.

Ces deux signes opposés annoncent qu'entre 20 et 40 articles se trouve une quantité où B' s'annule : ce sera l'optimum de production.

Réponse. $C'(q) = 10q + 100$ et $B'(q) = -10q + 300$ · $C'(20) = 300$ € · $B'(20) = 100 > 0$ (produire plus) et $B'(40) = -100 < 0$ (produire moins).

Rappel de cours. On dérive terme à terme. Le signe de $B'(q)$ dit s'il faut augmenter ou réduire la production : positif, on gagne encore ; négatif, on détruit de la valeur.

Erreur fréquente. Conserver le terme constant en écrivant $C'(q) = 10q + 100 + 4\,000$. La dérivée d'une constante est nulle, sans exception.

Correction de l'exercice 4 – Nombre dérivé et tangente

$B'(10) = -100 + 300 = 200$.

$B'(30) = -300 + 300 = 0$.

$B'(50) = -500 + 300 = -200$.

Le nombre dérivé EST le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point considéré.

En $q = 10$: la tangente a pour coefficient directeur 200, elle MONTE. La courbe du

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

bénéfice est en train de croître.

En $q = 30$: le coefficient directeur est nul, la tangente est HORIZONTALE. C'est le sommet de la parabole.

En $q = 50$: le coefficient vaut -200, la tangente DESCEND. Le bénéfice se dégrade.

Cohérence avec le chapitre précédent : le sommet de la parabole, au milieu des seuils de rentabilité 20 et 40, était en $S(30\,;500)$.

On retrouve exactement la même quantité, cette fois par le calcul de la dérivée. ✔ C'est le résultat général : en un extremum, le nombre dérivé s'annule.

Symétrie remarquable : $B'(10) = 200$ et $B'(50) = -200$. Ces deux quantités sont symétriques par rapport à 30, et les pentes y sont opposées.

Attention à ne pas confondre $B'(30) = 0$ et $B(30) = 0$. Le premier dit que la tangente est horizontale, le second dirait que le bénéfice est nul — or il vaut 500 €.

Réponse. $B'(10) = 200$ (tangente montante), $B'(30) = 0$ (tangente horizontale, au sommet), $B'(50) = -200$ (tangente descendante).

Rappel de cours. $B'(a)$ EST le coefficient directeur de la tangente en a. Positif → ça monte · négatif → ça descend · nul → tangente horizontale, donc extremum possible.

Erreur fréquente. Confondre $B'(a)$ et $B(a)$. Le premier est une pente, le second un montant en euros.

Correction de l'exercice 5 – Équation d'une tangente

La formule à connaître est $y = C'(a)(q - a) + C(a)$, où a est l'abscisse du point de contact.

Elle se lit ainsi : c'est la droite de coefficient directeur $C'(a)$ qui passe par le point $(a\,;C(a))$.

Il faut donc DEUX ingrédients : l'ordonnée du point de contact et la pente.

Ordonnée : $C(10) = 500 + 1\,000 + 4\,000 = 5\,500$ €. Le point de contact est $A(10\,;5\,500)$.

Pente : $C'(q) = 10q + 100$, donc $C'(10) = 200$.

On remplace : $y = 200(q - 10) + 5\,500$.

On développe : $y = 200q - 2\,000 + 5\,500$, soit $y = 200q + 3\,500$.

Vérification que la tangente passe bien par le point de contact : pour $q = 10$, $y = 2\,000 + 3\,500 = 5\,500$. ✔

Interprétation économique de cette tangente : elle représente le coût si, à partir de 10 articles, chaque unité supplémentaire coûtait toujours 200 €.

Comparaison avec la réalité : pour $q = 12$, la tangente prévoit 5 900 € alors que le coût réel vaut $C(12) = 720 + 1\,200 + 4\,000 = 5\,920$ €.

L'écart est faible près du point de contact et grandit ensuite : c'est exactement ce qu'on attend d'une approximation par la tangente.

Réponse. $y = 200q + 3\,500$.

Rappel de cours. $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Deux calculs préalables, toujours les mêmes : $f(a)$ puis $f'(a)$.

Erreur fréquente. Oublier la parenthèse $(q - a)$ et écrire $y = 200q + 5\,500$. Cette droite ne toucherait pas la courbe au bon endroit — le test « passe-t-elle par le point de contact ? » le montre aussitôt.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Coût marginal et coût du dernier article

$C'(20) = 10 \times 20 + 100 = 300$ €.

Pour le coût réel, on calcule les deux coûts totaux.
$C(20) = 5 \times 400 + 2\,000 + 4\,000 = 2\,000 + 6\,000 = 8\,000$ €.

$C(21) = 5 \times 441 + 2\,100 + 4\,000 = 2\,205 + 6\,100 = 8\,305$ €.

Coût du vingt-et-unième article : $8\,305 - 8\,000 = 305$ €.

Le coût marginal annonce 300 €, le coût réel est de 305 € : l’écart n’est que de 5 €, soit moins de 2 %.

Explication : la dérivée donne la pente de la tangente EN un point, alors que le coût réel du 21e article correspond à la variation sur tout l’intervalle de 20 à 21.

Comme le coût augmente sur cet intervalle, la variation réelle est un peu supérieure à la pente calculée au début de l’intervalle. C’est pourquoi $C'(20)$ sous-estime légèrement.

En pratique, les gestionnaires utilisent $C'(q)$ sans hésiter : l’approximation est excellente et elle se calcule d’une seule opération.

Troisième question : $C'(q) = 10q + 100$ est une fonction croissante de q, puisque son coefficient directeur 10 est positif.

Le coût marginal augmente donc avec la production : $C'(10) = 200$ €, $C'(20) = 300$ €, $C'(50) = 600$ €.

Signification concrète : plus l’entreprise produit, plus chaque article supplémentaire coûte cher — heures supplémentaires, matières premières achetées en urgence, machines saturées.

C’est précisément ce phénomène qui empêche de produire indéfiniment, et qui donne au bénéfice sa forme de cloche.

Réponse. $C'(20) = 300$ € contre 305 € en réalité : la dérivée sous-estime de 5 € car elle mesure la pente au début de l’intervalle · le coût marginal croît avec la production, ce qui limite la taille rentable de l’activité.

Rappel de cours. $C'(q)$ approche le coût de l’article suivant. L’écart avec le coût réel est faible, et il vient de ce que la dérivée mesure une pente ponctuelle.

Erreur fréquente. Croire que $C'(20)$ donne le coût des 20 premiers articles. Il donne le coût du SUIVANT ; le coût des 20 premiers est $C(20) = 8\,000$ €.

Correction de l’exercice 7 – Signe de la dérivée et production optimale

Résultat central du chapitre : sur un intervalle, si B' est positive alors B est croissante ; si B' est négative, B est décroissante.

On résout d’abord $B'(q) = 0$: $-10q + 300 = 0$ donne $10q = 300$, donc $q = 30$.

Signe de cette expression affine : le coefficient de q vaut -10, il est négatif, donc B' est POSITIVE avant 30 et NÉGATIVE après.

Vérification en deux points : $B'(0) = 300 > 0$ et $B'(60) = -300 < 0$. ✔

Conclusion : B est croissante sur $[0\,;30]$, puis décroissante sur $[30\,;60]$.

La dérivée s’annule en changeant de signe, du positif au négatif : B admet donc un MAXIMUM en $q = 30$.

Valeur de ce maximum : $B(30) = -4\,500 + 9\,000 - 4\,000 = 500$ €.

Tableau de variations : B monte de $B(0) = -4\,000$ € jusqu’à 500 € en $q = 30$, puis redescend jusqu’à $B(60) = -4\,000$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Cohérence avec le chapitre 3 : la symétrie de la parabole entre les seuils 20 et 40 donnait exactement le même sommet. ✔

Ce que la dérivée apporte de plus : elle ne se limite pas aux paraboles. Dès que le modèle de coût est de degré 3, la symétrie ne sert plus, mais la dérivée si.

Lecture de gestion : tant que $q < 30$, $B'(q) > 0$, donc chaque article supplémentaire améliore le résultat. Au-delà, il le dégrade. La production optimale est de 30 articles.

Réponse. B' s'annule en $q = 30$, positive avant et négative après · B croît sur $[0\,;30]$ puis décroît · maximum de 500 € pour 30 articles, comme au chapitre 3.

Rappel de cours. $B' > 0 \rightarrow B$ croissante · $B' < 0 \rightarrow$ décroissante · B' s'annule EN CHANGEANT DE SIGNE → extremum.

Erreur fréquente. Étudier le signe de B au lieu de celui de B'. Ce sont deux tableaux différents : l'un donne les variations, l'autre les quantités rentables.

Correction de l'exercice 8 – Un coût toujours croissant

On dérive terme à terme, avec $(q^3)' = 3q^2$ et $(q^2)' = 2q$: $C'(q) = 3q^2 - 60q + 400$.

$C'(0) = 400$. On cherche les autres quantités qui donnent la même valeur :
$3q^2 - 60q + 400 = 400$ équivaut à $3q^2 - 60q = 0$, soit $3q(q - 20) = 0$.

Les solutions sont $q = 0$ et $q = 20$. Ces deux points de même ordonnée sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole, qui passe donc au milieu : $q = \dfrac{0 + 20}{2} = 10$.

Le coefficient de q^2 vaut $3 > 0$: la parabole est tournée vers le haut et son minimum est atteint sur l'axe, en $q = 10$.

Valeur de ce minimum : $C'(10) = 300 - 600 + 400 = 100$.

Pour toute quantité, $C'(q) \geq 100 > 0$. La dérivée est strictement positive, donc le coût total C est strictement croissant.

C'est économiquement attendu : produire davantage ne peut pas coûter moins cher au TOTAL — on ne défabrique pas des articles.

Ce qui varie, c'est le coût MARGINAL : il baisse de 400 € à 100 € entre 0 et 10 articles (l'organisation se rode), puis remonte ($C'(20) = 400$ €) quand l'outil de production sature.

Réponse. $C'(q) = 3q^2 - 60q + 400$ · axe $q = 10$ · minimum $C'(10) = 100 > 0$, donc $C' > 0$ et C est strictement croissante, ce qui est économiquement normal.

Rappel de cours. Le minimum d'un polynôme de degré 2 tourné vers le haut est atteint sur son axe de symétrie, au milieu de deux valeurs de q qui ont la même image.

Erreur fréquente. Chercher à tout prix des racines : ici C' n'en a pas. Il suffit de montrer que sa plus petite valeur, 100, est positive.

Correction de l'exercice 9 – Bénéfice à deux extremums

Dérivée terme à terme : $B'(q) = -3q^2 + 48q - 45$.

Pour la vérification, on développe la forme proposée :
$-3(q - 1)(q - 15) = -3\left(q^2 - 16q + 15\right)$.

$= -3q^2 + 48q - 45$. ✔ C'est bien la même expression.

Les racines de B' sont donc $q = 1$ et $q = 15$.

Signe : B' est un trinôme de coefficient dominant -3, donc NÉGATIF à l'extérieur des racines et POSITIF entre elles.

Variations qui en découlent : B décroît sur $[0\,;1]$, croît sur $[1\,;15]$, puis décroît sur

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$[15\,;22]$.

Valeurs aux points clés : $B(0) = -400$ € et $B(1) = -1 + 24 - 45 - 400 = -422$ €.

$B(15) = -3\,375 + 5\,400 - 675 - 400 = 950$ € et
$B(22) = -10\,648 + 11\,616 - 990 - 400 = -422$ €.

La dérivée passe du négatif au positif en $q = 1$: c'est un MINIMUM local, de valeur -422 €.

Elle passe du positif au négatif en $q = 15$: c'est un MAXIMUM local, de valeur 950 €.

Sur l'intervalle fermé $[0\,;22]$, on compare les extremums locaux et les bornes : -400, -422, 950 et -422.

Le bénéfice maximal est donc de 950 €, atteint pour une production de 15 articles. ✔

Remarque : un modèle cubique permet ce que le second degré ne permettait pas — un creux au démarrage, puis une phase de forte progression, puis un essoufflement. C'est souvent plus réaliste.

Réponse. $B'(q) = -3q^2 + 48q - 45 = -3(q-1)(q-15)$ · B décroît, croît puis décroît · maximum de 950 € pour 15 articles (minimum local de -422 € en $q = 1$).

Rappel de cours. Quand B' est un trinôme, on applique la règle du signe du second degré : signe de a à l'extérieur des racines, signe opposé entre elles.

Erreur fréquente. Annoncer un maximum en $q = 1$ parce que la dérivée s'y annule. C'est le SENS du changement de signe qui décide : ici la dérivée passe de $-$ à $+$, donc c'est un minimum.

Correction de l'exercice 10 – Recette avec un prix qui baisse

La recette est le prix unitaire multiplié par la quantité vendue : $R(q) = q(600 - 2q)$.

On développe AVANT de dériver, car le programme ne donne pas de règle pour dériver un produit : $R(q) = 600q - 2q^2$.

On dérive terme à terme : $R'(q) = 600 - 4q$.

$R'(100) = 600 - 400 = 200$. C'est la RECETTE MARGINALE : autour de 100 articles, vendre un article de plus rapporte environ 200 € de recette en plus.

$R'(q) = 0$ pour $4q = 600$, soit $q = 150$. Le coefficient de q dans R' est négatif : R' est positive avant 150 et négative après.

La recette croît jusqu'à 150 articles puis décroît : elle est maximale pour $q = 150$.

$R(150) = 150 \times (600 - 300) = 150 \times 300 = 45\,000$ €.

Lecture de gestion : au-delà de 150 articles, la baisse de prix nécessaire pour vendre plus fait perdre plus de recette qu'elle n'en rapporte.

Réponse. $R(q) = 600q - 2q^2$ · $R'(q) = 600 - 4q$, $R'(100) = 200$ € de recette marginale · maximum 45 000 € pour 150 articles.

Rappel de cours. Recette = prix × quantité. Pour dériver un produit, on développe d'abord, puis on dérive terme à terme.

Erreur fréquente. Dériver q et $600 - 2q$ séparément puis multiplier : on obtiendrait $1 \times (-2) = -2$, un résultat faux.

Correction de l'exercice 11 – Vitesse de variation d'un chiffre d'affaires

$f'(t) = -0{,}5 \times 2t + 8 = -t + 8$.

$f'(2) = 6$: deux mois après l'ouverture, le chiffre d'affaires augmente d'environ 6 k€ par mois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f'(10) = -2$: au dixième mois, il baisse d'environ 2 k€ par mois.

$f'(t) \geq 0$ pour $t \leq 8$ et $f'(t) \leq 0$ pour $t \geq 8$: f est croissante sur $[0\,;8]$, décroissante sur $[8\,;12]$.

Valeurs du tableau : $f(0) = 40$, $f(8) = -32 + 64 + 40 = 72$, $f(12) = -72 + 96 + 40 = 64$.

Le maximum est atteint en $t = 8$: 72 k€.

Réponse. $f'(t) = -t + 8 \cdot f'(2) = 6$, $f'(10) = -2 \cdot$ maximum de 72 k€ au huitième mois.

Rappel de cours. Le signe de f' donne le sens de variation ; sa valeur donne la vitesse de variation.

Erreur fréquente. Lire $f'(10) = -2$ comme « le chiffre d'affaires est négatif » : c'est sa VARIATION qui est négative, il vaut encore $f(10) = 70$ k€.

Correction de l'exercice 12 – Coût minimal par le signe de la dérivée

$C'(x) = 3x^2 - 12$.

$3(x-2)(x+2) = 3(x^2 - 4) = 3x^2 - 12$. ✔

Sur $[0\,;5]$, $x + 2 > 0$ et $3 > 0$: $C'(x)$ a le signe de $x - 2$.

$C'(x) < 0$ sur $[0\,;2[$ et $C'(x) > 0$ sur $]2\,;5]$: C décroît sur $[0\,;2]$ puis croît sur $[2\,;5]$.

Valeurs : $C(0) = 20$, $C(2) = 8 - 24 + 20 = 4$, $C(5) = 125 - 60 + 20 = 85$.

Le coût est minimal pour $x = 2$, c'est-à-dire 200 articles : il vaut 4 centaines d'euros, soit 400 €.

Réponse. $C'(x) = 3x^2 - 12 \cdot$ coût minimal de 400 € pour 200 articles.

Rappel de cours. Pour étudier le signe d'une dérivée, on la factorise et on étudie le signe de chaque facteur sur l'intervalle.

Erreur fréquente. Garder la racine $x = -2$: elle n'appartient pas à l'intervalle d'étude $[0\,;5]$.

Correction de l'exercice 13 – Zone de rentabilité et production optimale

Bénéfice = recette − coût : $B(q) = 400q - (5q^2 + 100q + 4\,000) = -5q^2 + 300q - 4\,000$.

On développe la forme proposée :
$-5(q-20)(q-40) = -5(q^2 - 60q + 800) = -5q^2 + 300q - 4\,000$. Les deux écritures sont égales.

Tableau de signes : -5 est négatif, $q - 20$ change de signe en 20 et $q - 40$ en 40. Le produit $(q-20)(q-40)$ est négatif entre 20 et 40, donc $B(q)$ y est POSITIF.

L'entreprise est rentable pour $20 < q < 40$; les SEUILS DE RENTABILITÉ sont 20 et 40 articles, où le bénéfice est nul.

On dérive : $B'(q) = -10q + 300$, qui s'annule pour $q = 30$, est positive avant et négative après.

Le bénéfice croît puis décroît : il est maximal en $q = 30$, et
$B(30) = -4\,500 + 9\,000 - 4\,000 = 500$ €.

Contrôle par la symétrie : 30 est exactement le milieu des deux seuils 20 et 40, car le sommet de la parabole est sur son axe de symétrie.

Réponse. $B(q) = -5(q-20)(q-40) \cdot$ rentable entre 20 et 40 articles · bénéfice maximal 500 € pour 30 articles.

Rappel de cours. Une forme factorisée donne les racines et le signe ; la dérivée donne l'optimum. Pour une parabole, l'optimum est au milieu des racines.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Confondre $B(q) = 0$ (un seuil de rentabilité) et $B'(q) = 0$ (le sommet, où le bénéfice est maximal).

Correction de l'exercice 14 – Étude complète d'un bénéfice cubique

Le seuil de rentabilité est la première quantité pour laquelle $B(q) \geq 0$. Une équation de degré 3 ne se résout pas ici : on procède par balayage.

$B(6) = -216 + 864 - 270 - 400 = -22$ € : encore en perte, mais de peu.

$B(7) = -343 + 1\,176 - 315 - 400 = 118$ € : l'entreprise devient bénéficiaire.

Le seuil de rentabilité est donc de 7 articles, et la justification tient en ces deux calculs encadrants.

Pour le retour en perte, on balaye vers le haut, en s'appuyant sur le fait que B décroît après $q = 15$.

$B(20) = -8\,000 + 9\,600 - 900 - 400 = 300$ € : encore bénéficiaire.

$B(21) = -9\,261 + 10\,584 - 945 - 400 = -22$ € : l'entreprise repasse en perte.

L'activité est donc rentable de 7 à 20 articles inclus.

Réponse à l'actionnaire : produire 20 articles rapporte 300 €, alors que produire 15 articles rapporte 950 €.

Autrement dit, en produisant cinq articles de plus, l'entreprise perd 650 € de bénéfice — plus des deux tiers de son résultat.

L'argument « vendre plus » confond volume et profit : la recette augmente bien, mais le coût augmente plus vite encore.

Vérification de la cohérence avec les variations : B est décroissante après 15, donc toute production supérieure rapporte forcément moins. ✔ Le tableau de variations suffisait à répondre.

Conseil final : viser 15 articles. Si l'objectif est vraiment d'augmenter le volume, il faut d'abord modifier la structure de coûts, pas pousser la production à modèle inchangé.

Réponse. Seuil de rentabilité à 7 articles ($B(6) = -22$ € et $B(7) = 118$ €) · retour en perte à 21 articles · produire 20 articles rapporte 300 € contre 950 € pour 15 : l'actionnaire a tort.

Rappel de cours. Un seuil se justifie toujours par un ENCADREMENT : la quantité précédente ne convient pas, celle trouvée convient.

Erreur fréquente. Confondre « produire plus » et « gagner plus ». Après le maximum, chaque article supplémentaire réduit le bénéfice.

Correction de l'exercice 15 – Recette marginale et coût marginal

$R(q) = 400q$ est une fonction linéaire, donc $R'(q) = 400$.

Interprétation : chaque article supplémentaire rapporte 400 €, quel que soit le niveau de production. C'est la RECETTE MARGINALE, ici constante puisque le prix de vente est fixe.

$C'(q) = 10q + 100$ est le COÛT MARGINAL : ce que coûte l'article suivant, et il augmente avec la production.

On résout $R'(q) = C'(q)$: $400 = 10q + 100$.

$10q = 300$, donc $q = 30$.

C'est exactement la production qui maximise le bénéfice, trouvée plus haut par $B'(q) = 0$. ✔

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le lien est direct, et il se démontre : $B(q) = R(q) - C(q)$, donc $B'(q) = R'(q) - C'(q)$.

Dire « $B'(q) = 0$ » revient donc exactement à dire « $R'(q) = C'(q)$ ». Les deux conditions sont la même, écrite de deux façons.

Lecture économique, et c'est le résultat le plus utile du chapitre : tant que la recette marginale dépasse le coût marginal, chaque article supplémentaire rapporte plus qu'il ne coûte — il faut produire.

Vérification à 20 articles : $R' = 400$ € contre $C'(20) = 300$ €. L'article suivant rapporte 100 € de plus qu'il ne coûte, donc on continue. ✔

Vérification à 40 articles : $R' = 400$ € contre $C'(40) = 500$ €. L'article suivant coûte 100 € de plus qu'il ne rapporte : on produit trop. ✔

Ce critère est celui qu'utilisent réellement les entreprises, parce qu'il se vérifie article par article, sans avoir à recalculer tout le bénéfice.

Réponse. $R'(q) = 400$ € (recette marginale constante) et $C'(q) = 10q + 100$ (coût marginal croissant) · ils s'égalisent en $q = 30$, soit exactement l'optimum de bénéfice · c'est logique puisque $B' = R' - C'$.

Rappel de cours. L'optimum de production vérifie $R'(q) = C'(q)$: on produit tant que l'article suivant rapporte plus qu'il ne coûte.

Erreur fréquente. Chercher où $R(q) = C(q)$ au lieu de $R'(q) = C'(q)$. La première égalité donne le point mort (bénéfice nul), la seconde l'optimum (bénéfice maximal).

Correction de l'exercice 16 – Estimer un coût avec la tangente

Pente : $C'(q) = 10q + 100$, donc $C'(30) = 400$ €.

Équation de la tangente : $y = C'(30)(q - 30) + C(30) = 400(q - 30) + 11\,500$.

On développe : $y = 400q - 12\,000 + 11\,500$, soit $y = 400q - 500$.

Estimation pour 31 articles : $y = 400 \times 31 - 500 = 12\,400 - 500 = 11\,900$ €.

Valeur exacte : $C(31) = 5 \times 961 + 3\,100 + 4\,000 = 4\,805 + 7\,100 = 11\,905$ €.

L'écart n'est que de 5 € sur 11 905 €, soit moins de 0,05 %. L'estimation est excellente.

C'est le principe de l'approximation par la tangente : au voisinage du point de contact, la droite épouse la courbe.

Pour 35 articles : la tangente donne $400 \times 35 - 500 = 13\,500$ €, alors que $C(35) = 6\,125 + 3\,500 + 4\,000 = 13\,625$ €. L'écart monte à 125 €.

Pour 50 articles : la tangente donne 19 500 € contre $C(50) = 12\,500 + 5\,000 + 4\,000 = 21\,500$ € en réalité. L'écart atteint 2 000 €, soit près de 10 %.

L'estimation se dégrade donc rapidement quand on s'éloigne : l'écart passe de 5 € à 125 € puis 2 000 €.

Explication : la courbe de coût s'incurve vers le haut (le coût marginal augmente), alors que la tangente, elle, garde une pente constante de 400 €.

Règle pratique : l'approximation par la tangente est fiable pour quelques unités autour du point d'étude — ce qui suffit à la plupart des décisions de gestion courante.

Réponse. $y = 400q - 500$ · estimation de 11 900 € pour 31 articles, contre 11 905 € en réalité (5 € d'écart) · l'estimation reste bonne à quelques unités près, mais devient mauvaise plus loin (2 000 € d'écart à 50 articles).

Rappel de cours. Près du point de contact, la tangente donne une très bonne estimation. L'écart grandit d'autant plus vite que la courbe s'incurve.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Utiliser la tangente pour estimer un coût très éloigné. À 50 articles, elle sous-estime de 2 000 € — une erreur coûteuse dans un budget.

Correction de l'exercice 17 – Lire des tangentes sur un graphique

Lecture de $B(10)$: on part de $q = 10$, on rejoint la courbe, on lit $-1\,500$ €.

Pour le coefficient directeur, on utilise deux points bien placés de la tangente : elle passe par $(10\,;-1\,500)$ et par $(20\,;500)$.

Coefficient directeur $= \dfrac{500-(-1\,500)}{20-10} = \dfrac{2\,000}{10} = 200$.

Ce coefficient directeur EST le nombre dérivé, donc $B'(10) = 200$.

Vérification par le calcul : $B'(q) = -10q + 300$, donc $B'(10) = -100 + 300 = 200$. ✔

Équation de la tangente : $y = B'(10)(q-10) + B(10) = 200(q-10) - 1\,500$.

On développe : $y = 200q - 2\,000 - 1\,500$, soit $y = 200q - 3\,500$.

Contrôle sur le graphique : cette droite coupe l'axe vertical en $-3\,500$ et vaut 500 en $q = 20$. ✔ C'est bien la droite tracée.

Pour la tangente horizontale, on résout $B'(q) = 0$, soit $-10q + 300 = 0$, donc $q = 30$.

Le nombre dérivé y vaut alors 0, et l'ordonnée du point est $B(30) = 500$ €.

Sur le graphique, c'est le point le plus haut de la courbe : la tangente y est parfaitement horizontale, ce qui se voit à l'œil.

Lecture de gestion : la pente de 200 € en $q = 10$ signifie qu'à ce niveau, chaque article supplémentaire rapporte environ 200 € de bénéfice en plus. Au sommet, il n'y a plus rien à gagner.

Réponse. $B(10) = -1\,500$ € et $B'(10) = 200$, tangente $y = 200q - 3\,500$ · la tangente est horizontale au sommet $(30\,;500)$, où $B'(30) = 0$.

Rappel de cours. Sur un graphique, le nombre dérivé se lit comme un coefficient directeur : on avance de 1 et on mesure la montée — sur la TANGENTE, jamais sur la courbe.

Erreur fréquente. Lire la pente sur la courbe elle-même. Une courbe n'a pas de coefficient directeur : seule la tangente en a un.

Correction de l'exercice 18 – Rentabilité d'une tournée de livraison

La recette est $28q$, donc $B(q) = 28q - (0{,}5q^2 + 8q + 50) = -0{,}5q^2 + 20q - 50$.

On dérive terme à terme : $B'(q) = -q + 20$.

$B'(q) > 0$ pour $q < 20$ et $B'(q) < 0$ pour $q > 20$: B est croissante sur $[1\,;20]$ puis décroissante sur $[20\,;30]$.

Le bénéfice est maximal pour $q = 20$ dizaines, soit 200 colis, et $B(20) = -200 + 400 - 50 = 150$ €.

Coût marginal : $C'(q) = q + 8$, donc $C'(20) = 28$ € : exactement le prix facturé pour une dizaine de colis.

Ce n'est pas un hasard : $B'(q) = 28 - C'(q)$ s'annule quand $C'(q) = 28$. Tant que livrer une dizaine de plus coûte moins de 28 €, la tournée gagne à être allongée.

Contrôle : $B(19) = -180{,}5 + 380 - 50 = 149{,}5$ € et $B(21) = -220{,}5 + 420 - 50 = 149{,}5$ €, tous deux inférieurs à 150 €.

Réponse. Bénéfice maximal de 150 € pour 200 colis ; le coût marginal y vaut 28 €, égal au prix facturé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Bénéfice = recette − coût. Au bénéfice maximal, la dérivée du bénéfice s'annule, donc le coût marginal est égal au prix unitaire.

Erreur fréquente. Répondre 20 colis : q compte des DIZAINES de colis, la réponse est 200 colis.

Correction de l'exercice 19 – Prévoir avec la tangente

$f(4) = 16 + 8 + 50 = 74$ et $f'(t) = 2t + 2$, donc $f'(4) = 10$.

Tangente : $y = f'(4)(t - 4) + f(4) = 10(t - 4) + 74 = 10t + 34$.

Estimation : $10 \times 4{,}5 + 34 = 79$, soit environ 7 900 visiteurs.

Valeur exacte : $f(4{,}5) = 20{,}25 + 9 + 50 = 79{,}25$, soit 7 925 visiteurs.

L'écart n'est que de 0,25 centaine, soit 25 visiteurs : près du point de contact, la tangente approche bien la courbe.

Réponse. Tangente $y = 10t + 34$ · estimation 79 · valeur exacte 79,25 (écart de 25 visiteurs).

Rappel de cours. Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Elle sert à estimer f près de a.

Erreur fréquente. Écrire $y = f'(4)\,t + f(4)$: on oublie le décalage $(t - 4)$, et la droite ne passe plus par le point de contact.

Correction de l'exercice 20 – Quand le prix de vente change

La recette vaut pq, donc $B(q) = pq - 5q^2 - 100q - 4\,000$. Comme p est un nombre fixé, on dérive terme à terme : $B'(q) = p - 10q - 100$.

$B'(q)$ est positive puis négative, et s'annule quand $10q = p - 100$: le bénéfice est maximal pour $q = \dfrac{p - 100}{10}$.

Pour $p = 400$: $q = 30$, et $B(30) = 12\,000 - (4\,500 + 3\,000 + 4\,000) = 500$ €.

Pour $p = 500$: $q = 40$, et $B(40) = 20\,000 - (8\,000 + 4\,000 + 4\,000) = 4\,000$ €. Un prix plus élevé pousse à produire davantage, et le bénéfice augmente nettement.

Pour $p = 300$: $q = 20$, et $B(20) = 6\,000 - (2\,000 + 2\,000 + 4\,000) = -2\,000$ €.

À 300 €, même la meilleure production fait perdre 2 000 € : le bénéfice MAXIMAL est négatif, donc l'entreprise est déficitaire quelle que soit la quantité produite.

Conseil : à ce prix, il faut réduire les coûts (les 4 000 € de charges fixes notamment) ou renoncer à ce marché ; produire « au mieux » ne suffit pas.

Dans les trois cas, la production optimale vérifie $C'(q) = 10q + 100 = p$: on produit jusqu'à ce que le coût marginal rattrape le prix de vente.

Réponse. $B'(q) = p - 10q - 100$ · $p = 400$: 30 articles, 500 € · $p = 500$: 40 articles, 4 000 € · $p = 300$: 20 articles mais −2 000 € de perte, l'activité n'est pas rentable à ce prix.

Rappel de cours. Un prix fixé p se dérive comme une constante : $(pq)' = p$. L'optimum vérifie toujours « coût marginal = prix ».

Erreur fréquente. Croire qu'une production optimale est forcément rentable : l'optimum est le « moins mauvais » résultat, il peut rester une perte.

Correction de l'exercice 21 – Prix optimal par la dérivée

$R'(p) = 1\,000 - 40p$.

On résout $R'(p) = 0$: $40p = 1\,000$, donc $p = 25$ €.

Signe : le coefficient de p vaut -40, donc R' est positive avant 25 et négative après.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La recette croît donc jusqu'à 25 €, puis décroît : elle admet un maximum en $p = 25$ €.

Recette correspondante : $R(25) = 25\,000 - 20 \times 625 = 25\,000 - 12\,500 = 12\,500$ €.

Quantité vendue : $D(25) = 1\,000 - 500 = 500$ articles.

Pour la troisième question, on écrit le bénéfice : chaque article vendu p euros en a coûté 10, donc $B(p) = (p - 10) \times D(p)$.

$B(p) = (p - 10)(1\,000 - 20p) = 1\,000p - 20p^2 - 10\,000 + 200p$.

On réduit : $B(p) = -20p^2 + 1\,200p - 10\,000$.

Dérivée : $B'(p) = -40p + 1\,200$, qui s'annule pour $p = 30$ €.

Le prix optimal CHANGE donc : 30 € pour maximiser le bénéfice, contre 25 € pour maximiser la recette.

Vérification : à 30 €, $D(30) = 400$ articles et $B = 400 \times 20 = 8\,000$ € de bénéfice. À 25 €, $B = 500 \times 15 = 7\,500$ €. ✔ Le prix de 30 € rapporte bien davantage.

Explication : maximiser la recette ignore les coûts. Or vendre 100 articles de plus à bas prix fait rentrer de l'argent, mais coûte aussi 10 € par article.

Conclusion de gestion, à retenir : le prix qui fait le plus gros chiffre d'affaires n'est PAS celui qui rapporte le plus. C'est le bénéfice qu'il faut optimiser, jamais la recette seule.

Réponse. $R'(p) = 1\,000 - 40p$, maximum pour $p = 25$ € : recette de 12 500 € et 500 articles vendus · en tenant compte du coût d'achat, $B(p) = -20p^2 + 1\,200p - 10\,000$ est maximal pour $p = 30$ €, avec 8 000 € de bénéfice.

Rappel de cours. Maximiser la recette et maximiser le bénéfice donnent des prix DIFFÉRENTS dès qu'il existe un coût unitaire. C'est le bénéfice qui compte.

Erreur fréquente. Optimiser le chiffre d'affaires en croyant optimiser le profit. Ici l'erreur coûte 500 € de bénéfice.

Correction de l'exercice 22 – Optimum sous contrainte de capacité

Le maximum de B se situe en $q = 15$, mais cette quantité est HORS de l'intervalle autorisé $[0\,;12]$.

On raisonne donc sur les variations : B' est positive entre 1 et 15, donc B est croissante sur $[1\,;12]$.

Une fonction croissante atteint son maximum à la BORNE DROITE : ici en $q = 12$.

$B(12) = -1\,728 + 24 \times 144 - 540 - 400 = -1\,728 + 3\,456 - 940 = 788$ €.

Le bénéfice maximal réalisable est donc de 788 € par jour, avec 12 articles.

Il faut tout de même vérifier la borne gauche : $B(0) = -400$ €, bien inférieur. ✔ Le maximum est bien en $q = 12$.

Sans contrainte, l'entreprise réaliserait $B(15) = 950$ € par jour.

Manque à gagner : $950 - 788 = 162$ € par jour.

Sur une année de 250 jours : $162 \times 250 = 40\,500$ € de bénéfice supplémentaire par an si la capacité passait à 15 articles.

Durée de remboursement de l'investissement : $\dfrac{50\,000}{40\,500} \approx 1{,}23$ an, soit environ 15 mois.

Vérification : $1{,}23 \times 40\,500 \approx 49\,815$ €, proche des 50 000 € investis. ✔

Conclusion : l'investissement serait remboursé en un peu plus d'un an, puis rapporterait 40 500 € par an. C'est économiquement très favorable.

Réserve à formuler : ce calcul suppose que la demande absorbe les trois articles

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

supplémentaires chaque jour, et que le modèle de bénéfice reste valable après l'investissement — or celui-ci modifie sans doute les charges fixes.

Point de méthode : sur un intervalle FERMÉ, toujours vérifier si le sommet appartient à l'intervalle. Sinon, l'extremum est nécessairement à une borne.

Réponse. Maximum de 788 € à la borne $q = 12$ · manque à gagner de 162 € par jour, soit 40 500 € par an · l'investissement serait remboursé en environ 15 mois.

Rappel de cours. Sur un intervalle fermé, comparer la valeur au sommet ET aux bornes. Si le sommet est hors intervalle, l'extremum est à une borne.

Erreur fréquente. Répondre 950 € sans vérifier que $q = 15$ est réalisable. La contrainte de capacité change la réponse et tout le raisonnement financier qui suit.

Correction de l'exercice 23 – Retrouver une fonction à partir de sa dérivée

On dérive terme à terme, en traitant a et b comme des constantes.

$C'(q) = 2aq + b$, puisque la dérivée de 3 000 est nulle.

Les deux données se traduisent en deux équations : $C'(10) = 150$ et $C'(30) = 250$.

Première équation : $2a \times 10 + b = 150$, soit $20a + b = 150$.

Seconde équation : $2a \times 30 + b = 250$, soit $60a + b = 250$.

On soustrait la première de la seconde pour éliminer b : $40a = 100$, donc $a = 2{,}5$.

On remplace dans la première : $20 \times 2{,}5 + b = 150$, soit $50 + b = 150$, donc $b = 100$.

Le coût total est donc $C(q) = 2{,}5q^2 + 100q + 3\,000$, et le coût marginal $C'(q) = 5q + 100$.

Vérification sur les deux données : $C'(10) = 50 + 100 = 150$ € ✔ et $C'(30) = 150 + 100 = 250$ € ✔.

Coût total de 20 articles : $C(20) = 2{,}5 \times 400 + 2\,000 + 3\,000 = 1\,000 + 5\,000 = 6\,000$ €.

Coût moyen unitaire : $\dfrac{6\,000}{20} = 300$ € par article.

Contrôle de cohérence : le coût marginal en $q = 20$ vaut $C'(20) = 200$ €, soit MOINS que le coût moyen de 300 €.

D'après le résultat démontré plus haut, cela signifie que le coût moyen est encore en train de baisser : l'entreprise a intérêt à produire davantage pour améliorer son coût unitaire. ✔

Interprétation des coefficients : $b = 100$ € est le coût marginal « de départ » (pour une production presque nulle), et $a = 2{,}5$ mesure la vitesse à laquelle ce coût marginal augmente.

Réponse. $C'(q) = 2aq + b$ · le système $20a + b = 150$ et $60a + b = 250$ donne $a = 2{,}5$ et $b = 100$ · $C(20) = 6\,000$ € et un coût moyen de 300 € par article.

Rappel de cours. Deux inconnues demandent deux équations. Chaque donnée sur la dérivée en fournit une : on résout ensuite par soustraction.

Erreur fréquente. Traduire les données par $C(10) = 150$ au lieu de $C'(10) = 150$. Le coût MARGINAL est la dérivée, pas le coût total.

Correction de l'exercice 24 – Fabriquer la boîte de volume maximal

Le fond de la boîte est un carré de côté $30 - 2x$ (on retire x de chaque côté) et la hauteur vaut x : $V(x) = x(30 - 2x)^2$.

$(30 - 2x)^2 = 900 - 120x + 4x^2$, donc $V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x^2 - 20x + 75)$.

$(x-5)(x-15) = x^2 - 20x + 75$ ✔, donc $V'(x) = 12(x-5)(x-15)$.

Sur $]0\,;15[$, $x - 15 < 0$: $V'(x)$ a le signe contraire de $x - 5$. $V'(x) > 0$ sur $]0\,;5[$ et $V'(x) < 0$ sur $]5\,;15[$.

V est croissante puis décroissante : son maximum est atteint en $x = 5$.

$V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$ cm³, soit 2 litres.

Réponse. Découper des carrés de 5 cm : volume maximal de 2 000 cm³.

Rappel de cours. Le maximum d'une fonction se lit là où la dérivée s'annule en passant du positif au négatif.

Erreur fréquente. Garder $x = 15$, où V' s'annule aussi : cette valeur est exclue (il ne resterait plus de fond) et elle donne un volume nul.

Correction de l'exercice 25 – Synthèse : conseiller un dirigeant

On rassemble les trois indicateurs pour chaque option, avec $B(q) = -5q^2 + 300q - 4\,000$, $C'(q) = 10q + 100$ et $CM(q) = 5q + 100 + \dfrac{4\,000}{q}$.

Pour $q = 20$: $B(20) = -2\,000 + 6\,000 - 4\,000 = 0$ €, $C'(20) = 300$ €, $CM(20) = 100 + 100 + 200 = 400$ €.

Pour $q = 30$: $B(30) = 500$ €, $C'(30) = 400$ €, $CM(30) \approx 383{,}33$ €.

Pour $q = 40$: $B(40) = -8\,000 + 12\,000 - 4\,000 = 0$ €, $C'(40) = 500$ €, $CM(40) = 200 + 100 + 100 = 400$ €.

L'option à conseiller est clairement 30 articles : c'est la seule qui dégage un bénéfice, de 500 € par jour.

Pourquoi 20 est écartée : c'est le seuil de rentabilité, l'entreprise couvre tout juste ses coûts sans rien gagner. Le coût marginal (300 €) est inférieur au prix de vente (400 €), donc il reste de la marge à exploiter — il faut produire davantage.

Pourquoi 40 est écartée : le bénéfice est de nouveau nul, et surtout le coût marginal (500 €) DÉPASSE le prix de vente (400 €). Chaque article produit à ce niveau coûte plus cher qu'il ne rapporte.

Le critère décisif est là : on produit tant que $C'(q) < 400$ €, et l'on s'arrête quand $C'(q) = 400$ €, c'est-à-dire en $q = 30$. ✔ On retrouve la condition « recette marginale = coût marginal ».

Réponse à l'objection du dirigeant : il a raison sur le fait, mais tort sur la conclusion. Son coût unitaire est effectivement plus bas : $CM(28) = 140 + 100 + \dfrac{4\,000}{28} \approx 382{,}86$ € contre $CM(30) \approx 383{,}33$ €.

Mais l'objectif d'une entreprise n'est pas de minimiser son coût unitaire : c'est de maximiser son bénéfice.

Comparons : $B(28) = -3\,920 + 8\,400 - 4\,000 = 480$ € contre $B(30) = 500$ €. En produisant à 28 articles, il gagne 20 € de moins par jour, soit 5 000 € sur 250 jours.

Explication : entre 28 et 30 articles, chaque unité supplémentaire coûte environ 390 € et se vend 400 €. Elle dégrade légèrement la moyenne, mais elle rapporte quand même 10 € de marge.

Conclusion à retenir : minimiser le coût unitaire et maximiser le profit sont deux objectifs différents. Tant qu'un article supplémentaire se vend plus cher qu'il ne coûte, il faut le produire — même s'il fait remonter la moyenne.

Réponse. $q = 20$: $B = 0$ €, $C' = 300$ €, $CM = 400$ € · $q = 30$: $B = 500$ €, $C' = 400$ €,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$CM \approx 383{,}33$ € · $q = 40$: $B = 0$ €, $C' = 500$ €, $CM = 400$ € · conseiller 30 articles · à 28 articles le coût unitaire est minimal mais le bénéfice n'est que de 480 € : ce n'est pas le bon objectif.

Rappel de cours. Trois indicateurs, trois usages : le bénéfice décide, le coût marginal explique quand s'arrêter ($C'(q) =$ prix), le coût moyen mesure l'efficacité industrielle.

Erreur fréquente. Piloter sur le coût unitaire. Il renseigne sur l'efficacité de production, pas sur la rentabilité — ici il conduirait à perdre 5 000 € par an.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).