Dérivation et variations — Première STMG

25 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Dériver, en gestion, c'est mesurer ce que coûte ou rapporte l'unité SUIVANTE. Le nombre dérivé $C'(q)$ porte d'ailleurs un nom dans les entreprises : le coût marginal, c'est-à-dire le coût de production d'un article de plus. Ces 25 exercices installent le nombre dérivé, la tangente et les formules de dérivation, puis le résultat central du chapitre : le SIGNE de la dérivée donne les variations, donc les optimums. On reprend le modèle d'entreprise du chapitre précédent pour retrouver par le calcul ce qu'on y avait deviné graphiquement — la production optimale de 30 articles, et la valeur exacte du coût moyen minimal. Les deux derniers exercices démontrent deux résultats que tout gestionnaire utilise : on produit tant que la recette marginale dépasse le coût marginal, et le coût moyen est minimal exactement là où il croise le coût marginal.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-stmg/derivation-variations

Exercice 1 – Du taux de variation au nombre dérivé

Le coût de production, en euros, de q articles est $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$. On s'intéresse à ce que coûte l'augmentation de la production autour de $q = 10$.

1. Calcule le taux de variation de C entre 10 et 15, puis entre 10 et 11.

2. Que semblent devenir ces taux quand l'écart se resserre ?

Exercice 2 – Les dérivées à connaître

Donne la dérivée de chacune de ces fonctions : $f(x) = 4\,000$; $g(x) = 100x$; $h(x) = x^2$; $k(x) = x^3$; $m(x) = 5x^2 + 100x + 4\,000$.

Exercice 3 – Dériver un coût et un bénéfice

On garde $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$ et $B(q) = -5q^2 + 300q - 4\,000$.

1. Calcule $C'(q)$ et $B'(q)$.

2. Calcule $C'(20)$, $B'(20)$ et $B'(40)$, puis interprète les signes.

Exercice 4 – Nombre dérivé et tangente

Toujours avec $B(q) = -5q^2 + 300q - 4\,000$, donc $B'(q) = -10q + 300$.

1. Calcule $B'(10)$, $B'(30)$ et $B'(50)$.

2. Interprète chaque résultat en termes de tangente à la courbe du bénéfice.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Équation d'une tangente

Détermine l'équation de la tangente à la courbe du coût $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$ au point d'abscisse $q = 10$.

Exercice 6 – Coût marginal et coût du dernier article

Le coût marginal est modélisé par la dérivée $C'(q) = 10q + 100$.

1. Calcule $C'(20)$, puis le coût réel du vingt-et-unième article, c'est-à-dire $C(21) - C(20)$.

2. Compare les deux résultats et explique l'écart.

3. Le coût marginal augmente-t-il avec la production ? Qu'est-ce que cela signifie ?

Exercice 7 – Signe de la dérivée et production optimale

Étudie le signe de $B'(q) = -10q + 300$ et déduis-en le tableau de variations de B sur $[0\,;60]$, puis la production optimale.

Exercice 8 – Un coût toujours croissant

Une autre entreprise a pour coût total $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 1\,000$ euros.

1. Calcule $C'(q)$.

2. Résous $C'(q) = 400$ et déduis-en l'axe de symétrie de la parabole représentant C'.

3. Montre que $C'(q) > 0$ pour tout q, puis conclus sur le sens de variation de C. Ce résultat est-il économiquement attendu ?

Exercice 9 – Bénéfice à deux extremums

Le bénéfice, en euros, d'une entreprise est $B(q) = -q^3 + 24q^2 - 45q - 400$ pour q articles vendus, avec $0 \leq q \leq 22$.

1. Calcule $B'(q)$ et vérifie que $B'(q) = -3(q-1)(q-15)$.

2. Dresse le tableau de variations de B.

3. Donne le bénéfice maximal et la production correspondante.

Exercice 10 – Recette avec un prix qui baisse

Pour vendre davantage, un commerçant baisse son prix : il vend q articles au prix unitaire de $600 - 2q$ euros, pour $0 \leq q \leq 300$.

1. Exprime la recette $R(q)$ et développe-la.

2. Calcule $R'(q)$, puis $R'(100)$, et interprète ce nombre.

3. Pour quelle quantité la recette est-elle maximale ? Que vaut-elle ?

Exercice 11 – Vitesse de variation d'un chiffre d'affaires

Le chiffre d'affaires mensuel d'une boutique en ligne, en milliers d'euros, est modélisé par $f(t) = -0{,}5t^2 + 8t + 40$, où $t \in [0\,;12]$ est le nombre de mois écoulés depuis son ouverture.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Calcule $f'(t)$, puis $f'(2)$ et $f'(10)$. Interprète ces deux nombres.

2. Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;12]$.

3. Quel est le chiffre d'affaires mensuel maximal ?

Exercice 12 – Coût minimal par le signe de la dérivée

Le coût de production d'une entreprise, en centaines d'euros, est $C(x) = x^3 - 12x + 20$, où $x \in [0\,;5]$ est la quantité produite en centaines d'articles.

1. Calcule $C'(x)$ et montre que $C'(x) = 3(x-2)(x+2)$.

2. Étudie le signe de $C'(x)$ sur $[0\,;5]$ et dresse le tableau de variations de C.

3. Pour quelle production le coût est-il minimal ? Que vaut-il ?

Exercice 13 – Zone de rentabilité et production optimale

On reprend le modèle d'entreprise du chapitre : chaque article est vendu 400 € et le coût de production de q articles est $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$ euros, pour $0 \leq q \leq 60$.

1. Montre que le bénéfice s'écrit $B(q) = -5q^2 + 300q - 4\,000$, puis vérifie que $B(q) = -5(q-20)(q-40)$.

2. Pour quelles quantités l'entreprise est-elle rentable ?

3. Calcule $B'(q)$ et détermine la production qui rend le bénéfice maximal.

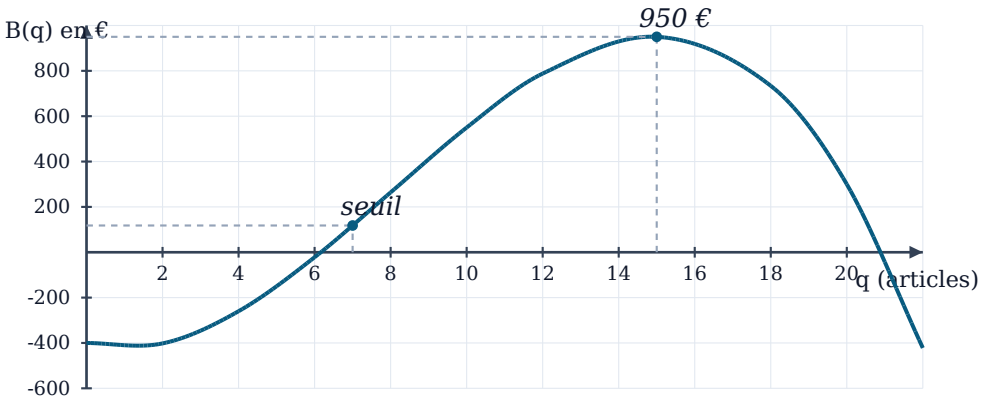
Exercice 14 – Étude complète d'un bénéfice cubique

On reprend $B(q) = -q^3 + 24q^2 - 45q - 400$, de dérivée $B'(q) = -3(q-1)(q-15)$, sur $[0\,;22]$. Le graphique ci-dessous représente cette fonction.

1. Détermine, par balayage, le seuil de rentabilité (première quantité rendant le bénéfice positif).

2. À partir de quelle quantité l'entreprise repasse-t-elle en perte ?

3. Un actionnaire propose de produire 20 articles « pour vendre plus ». Que lui répondre ?



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Recette marginale et coût marginal

On revient au modèle $R(q) = 400q$ et $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$.

1. Calcule $R'(q)$ et $C'(q)$, et interprète chacune.

2. Résous $R'(q) = C'(q)$.

3. Compare le résultat à la production optimale et explique le lien.

Exercice 16 – Estimer un coût avec la tangente

Une entreprise produit actuellement 30 articles, pour un coût total de $C(30) = 11\,500$ €, avec $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$.

1. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de C au point d'abscisse 30.

2. Utilise-la pour estimer le coût de 31 articles, puis compare à la valeur exacte.

3. Jusqu'où cette estimation reste-t-elle acceptable ?

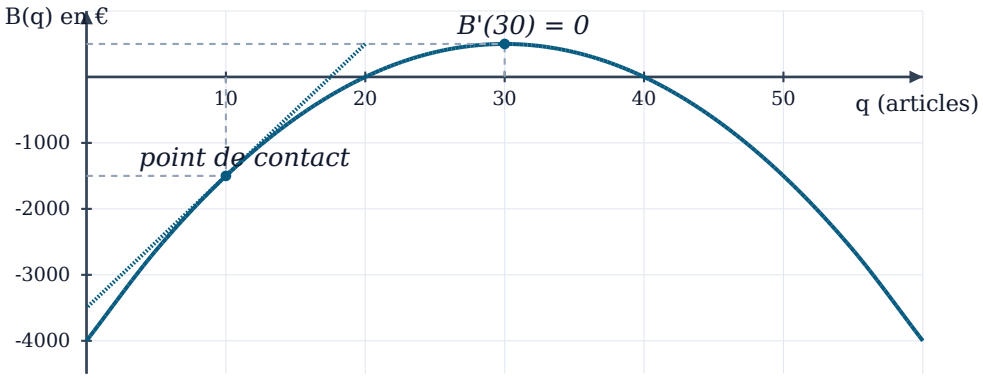
Exercice 17 – Lire des tangentes sur un graphique

La courbe ci-dessous est celle du bénéfice $B(q) = -5q^2 + 300q - 4\,000$, tracée avec sa tangente au point d'abscisse 10 (en pointillés).

1. Lis $B(10)$ et le coefficient directeur de la tangente, puis donne $B'(10)$.

2. Retrouve l'équation de cette tangente par le calcul.

3. En quel point la tangente à la courbe est-elle horizontale ? Que vaut alors B' ?



Exercice 18 – Rentabilité d'une tournée de livraison

Une entreprise de livraison facture 28 € chaque dizaine de colis livrés. Le coût d'une tournée de q dizaines de colis est $C(q) = 0{,}5q^2 + 8q + 50$ euros, pour $q \in [1\,;30]$.

1. Exprime le bénéfice $B(q)$ d'une tournée.

2. Calcule $B'(q)$ et étudie les variations de B sur $[1\,;30]$.

3. Combien de colis faut-il livrer pour que le bénéfice soit maximal ? Compare alors le coût marginal $C'(q)$ au prix facturé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Prévoir avec la tangente

Le nombre de visiteurs d'un salon professionnel, en centaines, est modélisé par $f(t) = t^2 + 2t + 50$, où t est le nombre d'heures écoulées depuis l'ouverture.

1. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4.

2. Utilise cette tangente pour estimer $f(4{,}5)$.

3. Compare avec la valeur exacte de $f(4{,}5)$.

Exercice 20 – Quand le prix de vente change

On garde le coût de production du chapitre, $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$ euros pour q articles. Le prix de vente unitaire, noté p, dépend du marché.

1. Pour un prix p donné, exprime $B(q)$ puis $B'(q)$.

2. Détermine la production optimale et le bénéfice maximal pour $p = 400$ €, puis pour $p = 500$ €.

3. Même question pour $p = 300$ €. Que peut-on conseiller à l'entreprise ?

Exercice 21 – Prix optimal par la dérivée

Une étude de marché donne la demande $D(p) = 1\,000 - 20p$ articles lorsque le prix unitaire est de p euros. La recette est donc $R(p) = 1\,000p - 20p^2$.

1. Calcule $R'(p)$ et étudie son signe.

2. Détermine le prix qui maximise la recette, ainsi que la recette et la quantité vendue.

3. Le coût unitaire d'achat est de 10 € par article. Le prix optimal change-t-il si l'on raisonne sur le bénéfice ?

Exercice 22 – Optimum sous contrainte de capacité

On reprend $B(q) = -q^3 + 24q^2 - 45q - 400$, de dérivée $B'(q) = -3(q-1)(q-15)$. L'atelier ne peut produire que 12 articles au maximum.

1. Détermine le bénéfice maximal réalisable sur $[0\,;12]$.

2. Chiffre le manque à gagner par rapport à l'optimum sans contrainte.

3. Un investissement de 50 000 € permettrait de porter la capacité à 15 articles. Sachant que l'entreprise produit 250 jours par an, en combien de temps serait-il remboursé ?

Exercice 23 – Retrouver une fonction à partir de sa dérivée

Le coût total d'une entreprise s'écrit $C(q) = aq^2 + bq + 3\,000$, où a et b sont deux nombres à déterminer. On sait que le coût marginal vaut 150 € pour 10 articles et 250 € pour 30 articles.

1. Exprime $C'(q)$ en fonction de a et b.

2. Détermine a et b.

3. Calcule le coût total de 20 articles et le coût moyen unitaire correspondant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 24 – Fabriquer la boîte de volume maximal

Une entreprise d'emballage découpe dans une plaque carrée de carton de 30 cm de côté un carré de côté x cm à chaque coin, puis relève les bords pour former une boîte sans couvercle. On a $x \in]0\,;15[$.

1. Montre que le volume de la boîte, en cm³, est $V(x) = x(30-2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$.

2. Calcule $V'(x)$ et montre que $V'(x) = 12(x-5)(x-15)$.

3. Étudie les variations de V et détermine la découpe qui donne la boîte de plus grand volume.

Exercice 25 – Synthèse : conseiller un dirigeant

Une entreprise vend ses articles 400 € pièce, avec un coût $C(q) = 5q^2 + 100q + 4\,000$. Le dirigeant hésite entre trois décisions : produire 20, 30 ou 40 articles par jour.

1. Calcule pour chaque option le bénéfice, le coût marginal et le coût moyen unitaire.

2. Quelle option conseiller, et pourquoi les deux autres sont-elles écartées ?

3. Le dirigeant objecte : « à 28 articles mon coût unitaire est plus bas qu'à 30, c'est donc là qu'il faut produire ». Que lui répondre ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).