Probabilités et variables aléatoires — Première STMG

25 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une entreprise ne connaît jamais à l'avance le nombre d'articles qu'elle vendra demain, ni si la machine tombera en panne. Ce qu'elle peut faire, c'est calculer ce que « rapporte en moyenne » chaque décision : c'est l'espérance, et c'est l'outil central de ce chapitre. Ces 25 exercices installent d'abord les probabilités sur des tableaux croisés et des arbres pondérés, l'indépendance de deux événements et la formule des probabilités totales, puis la loi de probabilité d'une variable aléatoire, son espérance et la loi de Bernoulli. La seconde moitié est faite de décisions : choisir entre deux investissements, fixer le prix d'une extension de garantie, dire si un bon de réduction rapporte à l'enseigne, et juger si un résultat d'enquête est surprenant ou simplement dû au hasard de l'échantillon.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-stmg/probabilites-variables-aleatoires

Exercice 1 – Lire un tableau croisé

Une enseigne a fiché 250 clients. 150 achètent en ligne, dont 60 possèdent la carte de fidélité. Parmi les 100 qui achètent en magasin, 55 possèdent la carte. On choisit un client au hasard et on note L « le client achète en ligne » et C « le client a la carte ».

1. Vérifie les effectifs, puis calcule $P(L)$ et $P(C)$.

2. Calcule $P(L \cap C)$ et $P(L \cup C)$.

Exercice 2 – Événement contraire

On garde le fichier de 250 clients. On sait que $P(C) = 0{,}46$ où C est « le client a la carte de fidélité ».

1. Calcule $P(\overline{C})$ et interprète.

2. Combien de clients n'ont pas la carte ?

3. Sachant que $P(L \cap C) = 0{,}24$, calcule la probabilité qu'un client achète en ligne SANS avoir la carte.

Exercice 3 – Probabilité conditionnelle sur un tableau

Toujours avec les 250 clients : 150 en ligne (dont 60 avec carte) et 100 en magasin (dont 55 avec carte).

1. Calcule la probabilité qu'un client ait la carte sachant qu'il achète en ligne.

2. Calcule la probabilité qu'un client achète en ligne sachant qu'il a la carte.

3. Ces deux probabilités sont-elles égales ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On note X le nombre d'articles achetés par un client d'un magasin. Une étude donne :

$P(X = 0) = 0{,}15 \cdot P(X = 1) = 0{,}35 \cdot P(X = 2) = 0{,}30 \cdot P(X = 3) = ?$

1. Complète la loi de probabilité de X.

2. Calcule $P(X \geq 2)$ et $P(X \geq 1)$.

Exercice 5 – Première espérance

On garde la loi de X, nombre d'articles achetés : 0 avec la probabilité 0,15, 1 avec 0,35, 2 avec 0,30 et 3 avec 0,20. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 6 – Un jeu concours est-il rentable ?

Pour une opération commerciale, une enseigne fait tirer un ticket à chaque client. Le ticket rapporte 100 € avec la probabilité 0,01, 20 € avec la probabilité 0,05, et rien dans les autres cas. On note G le gain du client.

1. Donne la loi de probabilité de G.

2. Calcule $E(G)$ et interprète pour l'enseigne.

3. L'opération concerne 4 000 clients. Quel budget prévoir ?

Exercice 7 – Espérance de gain net

Une tombola d'association vend des billets 3 € pièce. Un billet rapporte 100 € avec la probabilité 0,01, 20 € avec la probabilité 0,05, et rien sinon.

1. Quel est le gain NET d'un joueur qui remporte 20 € ?

2. Donne la loi du gain net N et calcule $E(N)$.

3. Le jeu est-il équitable ? Quelle recette l'association peut-elle espérer sur 500 billets ?

Exercice 8 – Variable aléatoire issue d'un tableau

Un restaurant propose trois formules : à 12 €, 18 € et 25 €. Sur 200 couverts servis, 70 formules à 12 €, 90 à 18 € et 40 à 25 € ont été vendues. On note X le montant dépensé par un client pris au hasard.

1. Donne la loi de probabilité de X.

2. Calcule $E(X)$ et interprète.

3. Quel chiffre d'affaires prévoir pour 1 500 couverts ?

Exercice 9 – Achat en ligne et carte de fidélité : indépendants ?

Une enseigne a étudié 400 clients : 240 achètent en ligne, les autres en magasin. 150 clients ont la carte de fidélité, dont 90 parmi les acheteurs en ligne. On choisit un client au hasard et on note L « le client achète en ligne » et C « le client a la carte ».

1. Calcule $P(C)$ et $P_L(C)$.

2. Les événements L et C sont-ils indépendants ? Interprète.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Dans une seconde enseigne, 300 clients sur 500 achètent en ligne et 200 ont la carte, dont 150 parmi les acheteurs en ligne. Même question.

Exercice 10 – Événements incompatibles

Dans une enseigne, un client bénéficie de la remise « nouveau client » avec la probabilité 0,20, et de la remise « carte de fidélité » avec la probabilité 0,35. Les deux remises ne sont jamais cumulables.

1. Que signifie « non cumulables » en langage probabiliste ?

2. Calcule la probabilité qu'un client bénéficie d'une remise.

3. Calcule la probabilité qu'il n'en ait aucune. Sur 800 clients, combien cela représente-t-il ?

Exercice 11 – Arbre pondéré : clients fidèles et achats

Dans une boutique, 60 % des visiteurs ont une carte de fidélité. Parmi eux, 70 % font un achat ; parmi les autres visiteurs, seulement 30 %. On choisit un visiteur au hasard. On note F l'événement « le visiteur a une carte de fidélité » et A l'événement « le visiteur fait un achat ».

1. Construis l'arbre pondéré de la situation.

2. Calcule $P(F \cap A)$, puis $P(A)$.

3. Un visiteur a fait un achat. Quelle est la probabilité qu'il ait une carte de fidélité ?

Exercice 12 – Nombre de pannes et coût moyen

Le nombre X de pannes hebdomadaires d'une machine prend les valeurs 0, 1, 2 et 3 avec les probabilités respectives 0,5 ; 0,3 ; 0,15 et 0,05.

1. Vérifie qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité, puis calcule $P(X \geq 2)$.

2. Calcule l'espérance $E(X)$ et interprète.

3. Chaque panne coûte 200 € de réparation. Quel est le coût moyen hebdomadaire des pannes ?

Exercice 13 – Choisir entre deux investissements

Une société hésite entre deux projets. Le projet A rapporte 30 000 € avec la probabilité 0,6 et fait perdre 5 000 € avec la probabilité 0,4. Le projet B rapporte 100 000 € avec la probabilité 0,25 et fait perdre 12 000 € avec la probabilité 0,75.

1. Calcule l'espérance de gain de chaque projet.

2. Pour chaque projet, quelle est la probabilité de perdre de l'argent ? Que conclure ?

3. Quel projet conseiller à une petite entreprise ? À un grand groupe ?

Exercice 14 – Tarifer une extension de garantie

Un vendeur d'électroménager propose une extension de garantie. Sur les appareils concernés, la probabilité de panne pendant la période couverte est de 0,08, et une réparation coûte en moyenne 400 € au vendeur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Calcule le coût moyen d'un contrat pour le vendeur.

2. L'extension est vendue 60 €. Quelle marge moyenne le vendeur réalise-t-il par contrat ?

3. Sur 2 000 contrats, quel bénéfice espérer ? À partir de quel prix de vente le vendeur perdrait-il de l'argent ?

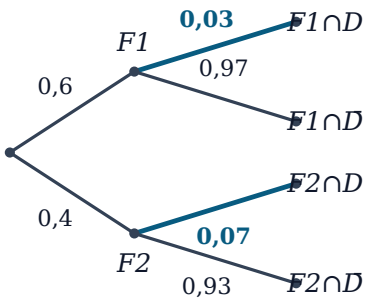
Exercice 15 – Deux fournisseurs et un défaut

Une entreprise s'approvisionne auprès de deux fournisseurs : 60 % des pièces viennent de F_1, qui produit 3 % de pièces défectueuses, et 40 % de F_2, qui en produit 7 %. On prélève une pièce au hasard et on note D l'événement « la pièce est défectueuse ».

1. Construis l'arbre pondéré et calcule la probabilité des quatre chemins.

2. Calcule $P(D)$.

3. Une pièce défectueuse est trouvée : quelle est la probabilité qu'elle vienne de F_1 ?



Les deux chemins menant à une pièce défectueuse : 0,018 et 0,028

Exercice 16 – Marge par client

On reprend X, le nombre d'articles achetés par un client : X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3 avec les probabilités 0,15 ; 0,35 ; 0,30 et 0,20, et $E(X) = 1{,}55$. Chaque article rapporte 15 € de marge, et chaque client entré dans le magasin coûte 10 € en frais d'accueil et de service.

1. Exprime la marge M réalisée sur un client en fonction de X.

2. Donne la loi de probabilité de M, puis calcule $E(M)$ et interprète.

3. Compare $E(M)$ avec $15 \times E(X) - 10$. Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

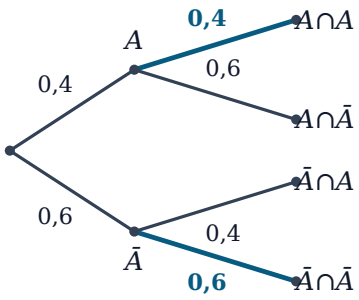
Exercice 17 – Trois clients, combien d'acheteurs ?

Dans une boutique, chaque visiteur achète avec la probabilité 0,4, indépendamment des autres. Trois visiteurs entrent. On note Y le nombre d'acheteurs parmi eux.

1. Calcule $P(Y = 0)$ et $P(Y = 3)$.

2. Calcule $P(Y = 1)$ et $P(Y = 2)$, puis vérifie la loi.

3. Calcule $E(Y)$.



Arbre pour les deux premiers visiteurs (A = « achète ») ; le troisième niveau se construit de la même façon

Exercice 18 – Un client utilise-t-il son bon de réduction ?

Une enseigne envoie à chaque client un bon de réduction de 5 €, pour un coût d'envoi de 0,80 € par client. Chaque client utilise son bon avec la probabilité 0,15. On choisit un client au hasard et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le client utilise son bon et 0 sinon.

1. Justifie que X suit une loi de Bernoulli, précise son paramètre et calcule $E(X)$.

2. Un bon utilisé fait acheter 40 € de plus, sur lesquels l'enseigne réalise 30 % de marge. On note G le gain de l'enseigne pour un client, en euros. Donne la loi de G et calcule $E(G)$.

3. Quel gain total l'enseigne peut-elle espérer pour 20 000 clients ? À partir de quelle probabilité d'utilisation l'opération est-elle rentable en moyenne ?

Exercice 19 – Nombre d'articles par panier

Sur 200 paniers d'un magasin, on a compté le nombre d'articles achetés : 50 paniers contiennent 1 article, 80 en contiennent 2, 40 en contiennent 3 et 30 en contiennent 4. On choisit un panier au hasard et on note X son nombre d'articles.

1. Donne la loi de probabilité de X.

2. Calcule la probabilité qu'un panier contienne au moins 3 articles.

3. Calcule $E(X)$ et vérifie le résultat avec le nombre total d'articles vendus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

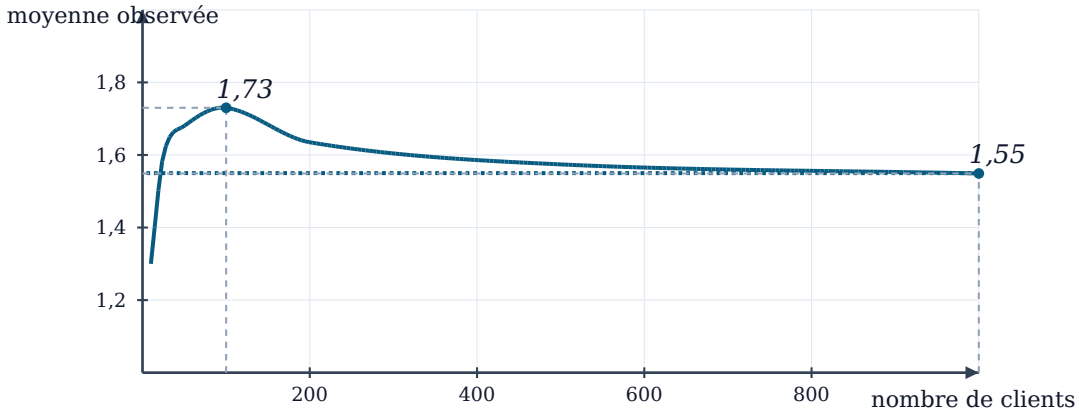
Exercice 20 – Pourquoi l’espérance se réalise sur le nombre

Le graphique montre le nombre moyen d’articles achetés par client, calculé au fur et à mesure des passages en caisse, lors d’une simulation portant sur 1 000 clients. La droite en pointillés représente l’espérance $E(X) = 1{,}55$.

1. Décris ce que montre le graphique.

2. Le magasin attend 500 clients demain. Combien d’articles prévoir ?

3. Peut-on prévoir le nombre d’articles achetés par le prochain client ?



Exercice 21 – Fixer le prix d’un billet

Une association organise une tombola. Les lots sont : un lot de 50 € avec la probabilité 0,05, un lot de 10 € avec la probabilité 0,15, rien sinon.

1. Calcule l’espérance du gain brut d’un billet.

2. Quel prix de vente rendrait le jeu équitable ?

3. L’association veut dégager 1 200 € de bénéfice sur 600 billets. À quel prix les vendre ?

Exercice 22 – Quel stock commander ?

Un commerçant vend un produit saisonnier. La demande D vaut 10 unités avec la probabilité 0,3, 20 avec la probabilité 0,5 et 30 avec la probabilité 0,2. Chaque unité vendue rapporte 40 € de marge ; chaque unité invendue est bradée et fait perdre 15 €.

1. Calcule la demande moyenne.

2. S’il commande 20 unités, quel est son bénéfice selon les trois scénarios ? Calcule l’espérance de bénéfice.

3. S’il commande 10 unités, l’espérance vaut 400 €. Que conseiller ?

Exercice 23 – Un taux de réponse surprenant ?

Un institut de sondage sait que, d’habitude, 30 % des personnes contactées répondent à son enquête. On modélise la réponse d’une personne par une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}3$. Un tableur a simulé $N = 500$ échantillons de taille $n = 100$ et calculé, pour chacun, la fréquence f des réponses. La série des 500 fréquences a pour écart-type $s \approx 0{,}046$. Le tableur indique que 338 fréquences sont

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

dans l'intervalle $[p-s\,;p+s]$, 480 dans $[p-2s\,;p+2s]$ et 499 dans $[p-3s\,;p+3s]$.

1. Calcule les bornes de l'intervalle $[p-2s\,;p+2s]$ et la proportion des échantillons simulés qui s'y trouvent.

2. Cette semaine, 42 personnes sur 100 ont répondu. À combien de fois s cette fréquence se trouve-t-elle de p ? Est-ce une situation fréquente ou rare dans le modèle ? Comment l'interpréter ?

3. Les simulations montrent que s est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Quelle taille d'échantillon faudrait-il pour diviser la dispersion des fréquences par 2 ?

Exercice 24 – Livraison gratuite : à partir de quel montant ?

Le montant Y d'un panier sur un site marchand vaut 20 € avec la probabilité 0,3, 40 € avec la probabilité 0,45 et 80 € avec la probabilité 0,25. La marge réalisée est de 40 % du montant du panier. La livraison coûte 6 € : elle est payée par le client, sauf si le panier atteint le seuil de livraison gratuite, auquel cas c'est le site qui la paie.

1. Calcule $E(Y)$.

2. Le seuil est fixé à 50 €. On note G le gain du site par commande (marge moins livraison éventuelle). Donne la loi de G et calcule $E(G)$.

3. Même question avec un seuil de 35 €.

4. Avec le seuil de 50 €, la moitié des clients à 40 € complètent leur panier jusqu'à 60 € pour ne pas payer la livraison. Calcule le nouveau gain moyen et conclus.

Exercice 25 – Synthèse : lancer une offre promotionnelle

Une enseigne lance une offre. Un client qui entre achète avec la probabilité 0,45. S'il achète, il dépense 30 € avec la probabilité 0,6 ou 60 € avec la probabilité 0,4. On note X la dépense d'un client entré dans le magasin.

1. Construis l'arbre et donne la loi de probabilité de X.

2. Calcule $E(X)$ et interprète.

3. L'opération attire 3 000 visiteurs et coûte 20 000 € en publicité. Est-elle rentable si la marge est de 40 % du chiffre d'affaires ?

4. Combien de visiteurs faudrait-il au minimum pour rentrer dans ses frais ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 25 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Lire un tableau croisé

On complète d'abord le tableau. Clients en ligne : 150, dont 60 avec carte, donc $150 - 60 = 90$ sans carte.

Clients en magasin : 100, dont 55 avec carte, donc 45 sans carte.

Total des porteurs de carte : $60 + 55 = 115$. Total sans carte : $90 + 45 = 135$.

Contrôle : $115 + 135 = 250$ ✔ et $150 + 100 = 250$ ✔. Le tableau est cohérent.

Le client étant choisi au hasard, chaque fiche a la même probabilité d'être tirée : les probabilités sont donc des fréquences.

$P(L) = \dfrac{150}{250} = 0{,}6$.

$P(C) = \dfrac{115}{250} = 0{,}46$.

$P(L \cap C)$ est la probabilité d'être à la fois en ligne ET porteur de carte : c'est la case commune, soit 60 clients.

$P(L \cap C) = \dfrac{60}{250} = 0{,}24$.

Pour l'union : $P(L \cup C) = P(L) + P(C) - P(L \cap C) = 0{,}6 + 0{,}46 - 0{,}24 = 0{,}82$.

On retranche l'intersection car les 60 clients concernés seraient sinon comptés deux fois — une fois dans les acheteurs en ligne, une fois dans les porteurs de carte.

Vérification par les effectifs : $L \cup C$ regroupe les 150 acheteurs en ligne et les 55 porteurs de carte en magasin, soit 205 clients. Or $\dfrac{205}{250} = 0{,}82$. ✔

Réponse. $P(L) = 0{,}6$; $P(C) = 0{,}46$; $P(L \cap C) = 0{,}24$; $P(L \cup C) = 0{,}82$.

Rappel de cours. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: on retranche l'intersection, comptée deux fois dans la somme.

Erreur fréquente. Additionner $0{,}6 + 0{,}46 = 1{,}06$ et conclure. Une probabilité ne peut pas dépasser 1 : c'est le signal qu'on a oublié de retrancher l'intersection.

Correction de l'exercice 2 – Événement contraire

L'événement contraire $\overline{C}$ est « le client n'a pas la carte ». Un client a la carte ou ne l'a pas : ces deux cas couvrent toutes les possibilités sans se chevaucher.

Donc $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}46 = 0{,}54$.

Interprétation : 54 % des clients du fichier ne possèdent pas la carte de fidélité.

Effectif correspondant : $0{,}54 \times 250 = 135$ clients.

Vérification par le tableau : 90 clients en ligne sans carte et 45 en magasin sans carte, soit 135. ✔

Pour la troisième question, on cherche $P(L \cap \overline{C})$, c'est-à-dire « en ligne » et « sans carte ».

Les acheteurs en ligne se répartissent en deux groupes seulement : avec carte ou sans carte.

Donc $P(L) = P(L \cap C) + P(L \cap \overline{C})$, d'où $P(L \cap \overline{C}) = 0{,}6 - 0{,}24 = 0{,}36$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Vérification par les effectifs : 90 clients en ligne sans carte, et $\frac{90}{250} = 0{,}36$. ✔

Lecture commerciale de ce chiffre : 36 % du fichier, soit 90 clients, achètent déjà en ligne sans être fidélisés. C'est exactement la cible d'une campagne d'inscription à la carte.

Attention à la formulation : « en ligne sans carte » n'est pas le contraire de « en ligne avec carte ». Le contraire de $L \cap C$ inclut aussi tous les clients en magasin.

Réponse. $P(\overline{C}) = 0{,}54$, soit 135 clients sans carte · $P(L \cap \overline{C}) = 0{,}36$, soit 90 clients qui achètent en ligne sans être fidélisés.

Rappel de cours. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Et $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$: un événement se décompose toujours selon un autre et son contraire.

Erreur fréquente. Confondre $\overline{L \cap C}$ et $L \cap \overline{C}$. Le premier regroupe tous les clients sauf ceux qui sont en ligne AVEC carte ; le second, seulement des clients en ligne.

Correction de l'exercice 3 – Probabilité conditionnelle sur un tableau

Conditionner par L, c'est se restreindre aux acheteurs en ligne : l'univers passe de 250 clients à 150.

Parmi ces 150, 60 ont la carte, donc $P_L(C) = \frac{60}{150} = 0{,}4$.

Autrement dit, 40 % des acheteurs en ligne sont porteurs de la carte.

Conditionner par C, c'est se restreindre aux 115 porteurs de carte.

Parmi eux, 60 achètent en ligne, donc $P_C(L) = \frac{60}{115} \approx 0{,}5217$, soit environ 52,2 %.

Les deux probabilités sont donc DIFFÉRENTES : 0,4 contre 0,52.

Explication : le numérateur est le même (les 60 clients en ligne avec carte), mais le dénominateur change — on divise une fois par 150, une fois par 115.

Les deux questions ne sont d'ailleurs pas les mêmes : « quelle proportion des acheteurs en ligne est fidélisée ? » et « quelle proportion des fidélisés achète en ligne ? ».

Vérification par la formule générale : $P_L(C) = \frac{P(L \cap C)}{P(L)} = \frac{0{,}24}{0{,}6} = 0{,}4$. ✔

Et $P_C(L) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}24}{0{,}46} \approx 0{,}5217$. ✔

Comparaison utile pour le marketing : $P_C(L) \approx 52\,\%$ est supérieur à $P(L) = 60\,\%$… non, il lui est INFÉRIEUR. Les porteurs de carte achètent donc un peu MOINS souvent en ligne que la clientèle générale.

C'est une information exploitable : la carte de fidélité est davantage utilisée en magasin, ce qui peut orienter une campagne de relance.

Réponse. $P_L(C) = 0{,}4$ et $P_C(L) \approx 0{,}52$: elles diffèrent, car on ne divise pas par le même effectif de référence.

Rappel de cours. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$: conditionner REMPLACE l'univers par A. C'est le dénominateur qui change, jamais le numérateur.

Erreur fréquente. Croire que $P_L(C) = P_C(L)$. Dans le langage courant on entend souvent l'un pour l'autre, mais ce sont deux nombres distincts.

Correction de l'exercice 4 – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Une variable aléatoire associe un NOMBRE à chaque issue : ici, le nombre d'articles achetés par un client.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Sa loi de probabilité est le tableau qui donne, pour chaque valeur possible, sa probabilité.

Propriété fondamentale : la somme de toutes ces probabilités vaut 1, puisque le client achète forcément 0, 1, 2 ou 3 articles.

On en déduit $P(X = 3) = 1 - (0{,}15 + 0{,}35 + 0{,}30)$.

$0{,}15 + 0{,}35 = 0{,}50$, puis $+0{,}30 = 0{,}80$.

Donc $P(X = 3) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$.

La loi complète est : 0,15 ; 0,35 ; 0,30 ; 0,20, de somme 1. ✔

$P(X \geq 2)$ regroupe les valeurs 2 et 3 : $0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}50$.

Un client sur deux achète donc au moins deux articles.

$P(X \geq 1)$ regroupe 1, 2 et 3, soit $0{,}35 + 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}85$.

Il est plus rapide de passer par le contraire : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$. ✔

Lecture commerciale : 15 % des clients repartent les mains vides. C'est le taux de visite sans achat, un indicateur suivi de près dans le commerce.

Réponse. $P(X = 3) = 0{,}20$ · $P(X \geq 2) = 0{,}50$ et $P(X \geq 1) = 0{,}85$.

Rappel de cours. La somme des probabilités d'une loi vaut TOUJOURS 1 : c'est ce qui permet de retrouver une valeur manquante, et de vérifier tout tableau.

Erreur fréquente. Pour « au moins 1 », additionner trois termes au lieu de passer par le contraire. Les deux méthodes se valent, mais la seconde est plus rapide et moins risquée.

Correction de l'exercice 5 – Première espérance

L'espérance est la moyenne des valeurs, PONDÉRÉE par leurs probabilités.

Formule : $E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \ldots$

$E(X) = 0 \times 0{,}15 + 1 \times 0{,}35 + 2 \times 0{,}30 + 3 \times 0{,}20$.

On calcule chaque produit : 0 ; 0,35 ; 0,60 ; 0,60.

Somme : $0 + 0{,}35 + 0{,}60 + 0{,}60 = 1{,}55$.

$E(X) = 1{,}55$ article par client.

Interprétation : sur un grand nombre de clients, chacun achète en moyenne 1,55 article. C'est le « panier moyen » en nombre d'articles.

Attention au sens de cette valeur : aucun client n'achètera jamais 1,55 article. L'espérance est une moyenne théorique, pas une valeur observable.

Contrôle de vraisemblance : l'espérance se situe toujours entre la plus petite et la plus grande valeur, donc entre 0 et 3. ✔

Contrôle plus fin : les valeurs 1 et 2 concentrent 65 % des probabilités, donc l'espérance doit se situer autour de 1,5. ✔

Utilité en gestion : sur 1 000 clients attendus, le magasin peut prévoir environ 1 550 articles vendus. C'est la base de son calcul de stock.

Réponse. $E(X) = 1{,}55$ article : c'est le nombre moyen d'articles achetés par client sur un grand nombre de visites.

Rappel de cours. $E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i)$. L'espérance est une moyenne théorique : elle n'est pas forcément une valeur atteignable.

Erreur fréquente. Diviser la somme par le nombre de valeurs. Les probabilités jouent DÉJÀ le rôle des poids : il n'y a rien à diviser.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Un jeu concours est-il rentable ?

Les valeurs possibles du gain sont 100, 20 et 0 euros.

La probabilité de ne rien gagner s’obtient par le contraire :
$1 - (0{,}01 + 0{,}05) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

Loi de G : $P(G = 100) = 0{,}01$; $P(G = 20) = 0{,}05$; $P(G = 0) = 0{,}94$.

Contrôle : $0{,}01 + 0{,}05 + 0{,}94 = 1$. ✔

Espérance : $E(G) = 100 \times 0{,}01 + 20 \times 0{,}05 + 0 \times 0{,}94$.

$= 1 + 1 + 0 = 2$ €.

Interprétation côté client : un ticket rapporte en moyenne 2 €, même si 94 % des clients ne gagnent rien.

Interprétation côté enseigne, qui est celle qui compte ici : chaque ticket distribué lui COÛTE en moyenne 2 €. L’espérance de gain du client est l’espérance de dépense de l’entreprise.

Budget pour 4 000 clients : $4\,000 \times 2 = 8\,000$ €.

Vérification par les effectifs attendus : environ 1 % de 4 000, soit 40 gagnants à 100 € (4 000 €), et 5 %, soit 200 gagnants à 20 € (4 000 €). Total : 8 000 €. ✔

Les deux calculs concordent, et le second montre bien d’où vient le résultat : les deux lots contribuent également au budget, alors que les montants sont très différents.

Remarque de gestion : ce budget de 8 000 € est une PRÉVISION. Le coût réel variera d’une opération à l’autre — d’autant plus que le nombre de clients est faible.

Réponse. $P(G = 100) = 0{,}01$, $P(G = 20) = 0{,}05$, $P(G = 0) = 0{,}94$ · $E(G) = 2$ € : chaque ticket coûte en moyenne 2 € à l’enseigne · budget de 8 000 € pour 4 000 clients.

Rappel de cours. L’espérance de gain du joueur est l’espérance de COÛT de l’organisateur. Le budget d’une opération se calcule en multipliant par le nombre de participants.

Erreur fréquente. Oublier la valeur 0 dans la loi. Elle ne change pas l’espérance (son produit est nul), mais sans elle la somme des probabilités ne fait pas 1.

Correction de l’exercice 7 – Espérance de gain net

Le gain NET tient compte du prix payé : c’est ce que le joueur gagne réellement, une fois son billet acheté.

Un joueur qui remporte 20 € a déboursé 3 €, donc son gain net vaut $20 - 3 = 17$ €.

De même, le gros lot donne un gain net de $100 - 3 = 97$ €, et un billet perdant donne $0 - 3 = -3$ €.

Loi de N : $P(N = 97) = 0{,}01$; $P(N = 17) = 0{,}05$; $P(N = -3) = 0{,}94$.

Espérance : $E(N) = 97 \times 0{,}01 + 17 \times 0{,}05 + (-3) \times 0{,}94$.

$= 0{,}97 + 0{,}85 - 2{,}82 = -1$ €.

Méthode plus rapide, à connaître : le gain net vaut $N = G - 3$, donc
$E(N) = E(G) - 3 = 2 - 3 = -1$ €. ✔

Retrancher une constante à une variable aléatoire retranche la même constante à son espérance : c’est le premier cas de transformation affine.

Le jeu n’est donc PAS équitable : un jeu équitable aurait une espérance nulle. Ici, chaque joueur perd en moyenne 1 € par billet.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Ce n'est évidemment pas un défaut pour une tombola d'association : c'est même le principe, puisque ce 1 € constitue sa recette.

Recette espérée sur 500 billets : $500 \times 1 = 500$ €.

Vérification par les deux flux : l'association encaisse $500 \times 3 = 1\,500$ € de ventes et reverse en moyenne $500 \times 2 = 1\,000$ € de lots, soit 500 € de bénéfice attendu. ✔

Réponse. Gain net de 17 € · loi : 97 (0,01), 17 (0,05), −3 (0,94), d'espérance −1 € · le jeu n'est pas équitable, et l'association peut espérer 500 € de recette sur 500 billets.

Rappel de cours. Jeu équitable ⇔ $E(\text{gain net}) = 0$. Et $E(X - c) = E(X) - c$: retrancher la mise revient à retrancher son montant à l'espérance.

Erreur fréquente. Oublier de retrancher la mise au gagnant du gros lot. Le gain net est 97 € et non 100 € : lui aussi a payé son billet.

Correction de l'exercice 8 – Variable aléatoire issue d'un tableau

Les valeurs possibles de X sont 12, 18 et 25 euros.

Les probabilités sont les fréquences observées : $P(X = 12) = \frac{70}{200} = 0{,}35$.

$P(X = 18) = \frac{90}{200} = 0{,}45$ et $P(X = 25) = \frac{40}{200} = 0{,}20$.

Contrôle : $0{,}35 + 0{,}45 + 0{,}20 = 1$. ✔

Espérance : $E(X) = 12 \times 0{,}35 + 18 \times 0{,}45 + 25 \times 0{,}20$.

$= 4{,}20 + 8{,}10 + 5 = 17{,}30$ €.

Interprétation : le ticket moyen du restaurant est de 17,30 € par client.

Vérification par le chiffre d'affaires réel des 200 couverts :
$70 \times 12 + 90 \times 18 + 40 \times 25 = 840 + 1\,620 + 1\,000 = 3\,460$ €.

Et $\frac{3\,460}{200} = 17{,}30$ €. ✔ L'espérance n'est rien d'autre que la moyenne pondérée vue en statistiques, calculée avec des fréquences.

Prévision pour 1 500 couverts : $1\,500 \times 17{,}30 = 25\,950$ €.

Contrôle de vraisemblance : le ticket moyen de 17,30 € se situe bien entre 12 € et 25 €, plus près de 18 € qui est la formule majoritaire. ✔

Réserve à formuler : cette prévision suppose que la répartition entre formules reste la même. Une nouvelle carte ou une promotion la modifierait.

Réponse. $P(X = 12) = 0{,}35$, $P(X = 18) = 0{,}45$, $P(X = 25) = 0{,}20$ · $E(X) = 17{,}30$ € (le ticket moyen) · environ 25 950 € pour 1 500 couverts.

Rappel de cours. Une espérance calculée sur des fréquences observées est exactement la moyenne pondérée de la série : les deux notions coïncident.

Erreur fréquente. Faire la moyenne des trois prix (18,33 €). Cela supposerait que les trois formules se vendent autant, ce qui est faux.

Correction de l'exercice 9 – Achat en ligne et carte de fidélité : indépendants ?

Sur l'ensemble des clients : $P(C) = \frac{150}{400} = 0{,}375$.

$P_L(C)$ est la probabilité qu'un client ait la carte SACHANT qu'il achète en ligne : on se restreint aux 240 acheteurs en ligne, parmi lesquels 90 ont la carte.

$P_L(C) = \frac{90}{240} = 0{,}375$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Définition du cours : lorsque $P(L) \neq 0$, les événements L et C sont indépendants si $P_L(C) = P(C)$.

Ici $P_L(C) = P(C) = 0{,}375$: les événements L et C sont indépendants.

Interprétation : savoir qu'un client achète en ligne ne change pas la probabilité qu'il ait la carte. 37,5 % des acheteurs en ligne ont la carte, exactement comme l'ensemble de la clientèle.

On peut le vérifier dans l'autre sens : $P_C(L) = \dfrac{90}{150} = 0{,}6$ et $P(L) = \dfrac{240}{400} = 0{,}6$.
L'indépendance est symétrique, comme le montre le cours.

Seconde enseigne : $P(C) = \dfrac{200}{500} = 0{,}4$ et $P_L(C) = \dfrac{150}{300} = 0{,}5$.

Comme $0{,}5 \neq 0{,}4$, les événements L et C ne sont pas indépendants dans cette enseigne.

Les acheteurs en ligne y ont plus souvent la carte : 50 % d'entre eux, contre 40 % de l'ensemble des clients. En magasin, seuls $200 - 150 = 50$ clients sur 200 l'ont, soit 25 %.

Réponse. Première enseigne : $P(C) = P_L(C) = 0{,}375$, donc L et C sont indépendants · seconde enseigne : $P_L(C) = 0{,}5 \neq P(C) = 0{,}4$, donc ils ne le sont pas : les acheteurs en ligne ont plus souvent la carte.

Rappel de cours. Lorsque $P(L) \neq 0$, L et C sont indépendants si $P_L(C) = P(C)$: savoir que L est réalisé ne modifie pas la probabilité de C.

Erreur fréquente. Comparer $P_L(C)$ à $P(L)$, ou conclure à l'indépendance parce que les effectifs « paraissent proches ». On compare la probabilité conditionnelle de C à la probabilité de C, et l'égalité doit être exacte.

Correction de l'exercice 10 – Événements incompatibles

On note N « le client a la remise nouveau client » et F « le client a la remise fidélité ».

« Non cumulables » signifie qu'aucun client ne peut avoir les deux à la fois : les deux événements ne peuvent pas se produire ensemble.

En langage probabiliste, on dit qu'ils sont INCOMPATIBLES, et cela se traduit par $P(N \cap F) = 0$.

C'est cette information qui simplifie tout le calcul de l'union.

Formule générale : $P(N \cup F) = P(N) + P(F) - P(N \cap F)$.

Comme l'intersection est vide, il ne reste que la somme : $P(N \cup F) = 0{,}20 + 0{,}35 = 0{,}55$.

Autrement dit, 55 % des clients bénéficient d'une remise — l'une ou l'autre, jamais les deux.

Pour les clients sans aucune remise, on passe par l'événement contraire.

$P\left(\overline{N \cup F}\right) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$, soit 45 % des clients.

Sur 800 clients : $0{,}45 \times 800 = 360$ clients ne bénéficient d'aucune remise.

Vérification par les effectifs : $0{,}20 \times 800 = 160$ nouveaux clients et $0{,}35 \times 800 = 280$ porteurs de carte, soit 440 clients remisés. Et $800 - 440 = 360$. ✔

Ce contrôle n'aurait PAS fonctionné si les remises étaient cumulables : on aurait compté deux fois les clients bénéficiant des deux.

Attention à ne pas confondre incompatibles et indépendants. Ici les deux remises s'excluent : savoir qu'un client est nouveau garantit qu'il n'a pas la carte. C'est une dépendance totale, pas une indépendance.

Réponse. Non cumulables signifie $P(N \cap F) = 0$ (événements incompatibles) ·

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$P(N \cup F) = 0{,}55$ · 45 % des clients n'ont aucune remise, soit 360 clients sur 800.

Rappel de cours. Événements incompatibles : $P(A \cap B) = 0$, donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. C'est le seul cas où les probabilités s'additionnent simplement.

Erreur fréquente. Confondre incompatibles et indépendants. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles sont au contraire fortement dépendants : l'un exclut l'autre.

Correction de l'exercice 11 – Arbre pondéré : clients fidèles et achats

Premier niveau : $P(F) = 0{,}6$ et $P(\overline{F}) = 0{,}4$. Second niveau : $P_F(A) = 0{,}7$ et $P_{\overline{F}}(A) = 0{,}3$.

$P(F \cap A) = P(F) \times P_F(A) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$.

$P(\overline{F} \cap A) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$.

A est atteint par deux chemins : $P(A) = 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}54$.

$$P_A(F) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}42}{0{,}54} \approx 0{,}778.$$

Environ 78 % des acheteurs ont une carte de fidélité, alors que les porteurs de carte ne sont que 60 % des visiteurs.

Réponse. $P(F \cap A) = 0{,}42$ · $P(A) = 0{,}54$ · $P_A(F) \approx 0{,}778$.

Rappel de cours. $P_A(F) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(A)}$: on divise la branche qui nous intéresse par la probabilité totale de A.

Erreur fréquente. Confondre $P_F(A) = 0{,}7$ et $P_A(F)$: la condition n'est pas la même, et les deux nombres sont différents.

Correction de l'exercice 12 – Nombre de pannes et coût moyen

Les probabilités sont positives et $0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$: c'est bien une loi de probabilité.

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$.

$E(X) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}15 + 3 \times 0{,}05 = 0 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}75$.

Sur un grand nombre de semaines, la machine tombe en panne en moyenne 0,75 fois par semaine.

Le coût hebdomadaire C vaut 0, 200, 400 ou 600 €, avec les mêmes probabilités que X.

$E(C) = 0 \times 0{,}5 + 200 \times 0{,}3 + 400 \times 0{,}15 + 600 \times 0{,}05 = 0 + 60 + 60 + 30 = 150$ € par semaine.

On remarque que $150 = 200 \times 0{,}75$: le coût moyen est le coût d'une panne multiplié par le nombre moyen de pannes.

Réponse. $P(X \geq 2) = 0{,}2$ · $E(X) = 0{,}75$ panne par semaine · coût moyen de 150 € par semaine.

Rappel de cours. $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$: on multiplie chaque valeur par sa probabilité, puis on additionne.

Erreur fréquente. Interpréter $E(X) = 0{,}75$ comme une valeur que X peut prendre : c'est une moyenne sur le long terme, pas un résultat possible d'une semaine.

Correction de l'exercice 13 – Choisir entre deux investissements

Projet A : $E(A) = 30\,000 \times 0{,}6 + (-5\,000) \times 0{,}4$.

$= 18\,000 - 2\,000 = 16\,000$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Projet B : $E(B) = 100\,000 \times 0{,}25 + (-12\,000) \times 0{,}75$.

$= 25\,000 - 9\,000 = 16\,000$ €.

Les deux projets ont donc EXACTEMENT la même espérance de gain : 16 000 €. L'espérance seule ne permet pas de choisir.

On regarde alors le risque. Le projet A fait perdre de l'argent avec la probabilité 0,4, le projet B avec la probabilité 0,75.

En choisissant B, l'entreprise a donc trois chances sur quatre de perdre 12 000 €, alors qu'avec A elle gagne dans 60 % des cas et ne perd au pire que 5 000 €.

Le projet B est beaucoup plus RISQUÉ : ses résultats possibles sont très éloignés l'un de l'autre (+100 000 € ou −12 000 €), alors que A reste dans une fourchette resserrée.

Conseil à une petite entreprise : le projet A. Une perte de 12 000 € survenant trois fois sur quatre peut mettre en danger sa trésorerie, et elle n'aura pas l'occasion de « refaire le match » assez souvent pour que l'espérance se réalise.

Conseil à un grand groupe : le projet B est acceptable, car il mènera des dizaines d'opérations de ce type. Sur un grand nombre de projets, le résultat moyen se rapprochera de 16 000 € par projet, et les gros succès compenseront les échecs.

Idée essentielle : l'espérance ne se réalise que sur un GRAND nombre de répétitions. Pour une décision unique, le risque compte autant que l'espérance.

C'est exactement pour cette raison qu'une même opération peut être raisonnable pour un assureur et déraisonnable pour un particulier.

Réponse. $E(A) = E(B) = 16\,000$ € · mais B fait perdre de l'argent avec la probabilité 0,75, contre 0,4 pour A · conseiller A à une petite entreprise, B étant envisageable pour un grand groupe qui répétera l'opération.

Rappel de cours. À espérances égales, on choisit selon le RISQUE. L'espérance ne se réalise que sur un grand nombre de répétitions.

Erreur fréquente. Choisir B parce que le gain maximal est plus élevé. Le gain maximal ne dit rien de ce qu'on obtient en moyenne, ni de la probabilité de l'atteindre.

Correction de l'exercice 14 – Tarifer une extension de garantie

On note C le coût supporté par le vendeur pour un contrat. Il vaut 400 € en cas de panne, et 0 € sinon.

Loi de C : $P(C = 400) = 0{,}08$ et $P(C = 0) = 0{,}92$.

Espérance : $E(C) = 400 \times 0{,}08 + 0 \times 0{,}92 = 32$ €.

Chaque contrat coûte donc en moyenne 32 € au vendeur, même si la grande majorité des contrats ne lui coûtent rien du tout.

Marge moyenne par contrat : $60 - 32 = 28$ €.

On peut le retrouver par la variable « marge » $M = 60 - C$, qui vaut −340 € en cas de panne et 60 € sinon.

$E(M) = -340 \times 0{,}08 + 60 \times 0{,}92 = -27{,}20 + 55{,}20 = 28$ €. ✔ Les deux méthodes concordent.

Bénéfice espéré sur 2 000 contrats : $2\,000 \times 28 = 56\,000$ €.

Vérification par les flux : le vendeur encaisse $2\,000 \times 60 = 120\,000$ € et s'attend à environ 160 pannes (8 % de 2 000) coûtant 64 000 €, soit 56 000 € de bénéfice. ✔

Le vendeur perdrait de l'argent si le prix de vente descendait sous le coût moyen, c'est-à-dire sous 32 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

À exactement 32 €, l'opération serait « équitable » : espérance de marge nulle. C'est le prix pur du risque, avant toute marge commerciale.

Lecture de gestion : les 28 € de marge rémunèrent à la fois le risque pris et les frais de gestion. C'est le principe même de l'assurance.

Réserve importante : ce raisonnement suppose un GRAND nombre de contrats. Sur dix contrats seulement, deux pannes suffiraient à rendre l'opération déficitaire.

Réponse. $E(C) = 32$ € par contrat · marge moyenne de 28 € · 56 000 € de bénéfice espéré sur 2 000 contrats · en dessous de 32 € de prix de vente, le vendeur perd de l'argent.

Rappel de cours. Le prix « juste » d'une garantie ou d'une assurance est l'espérance du coût couvert. Tout ce qui est facturé au-dessus rémunère le risque et la gestion.

Erreur fréquente. Croire que le vendeur perd de l'argent parce qu'une réparation (400 €) coûte plus cher que le contrat (60 €). Seuls 8 % des contrats donnent lieu à réparation.

Correction de l'exercice 15 – Deux fournisseurs et un défaut

Données : $P(F_1) = 0{,}6$, $P(F_2) = 0{,}4$, et les taux de défaut sont des probabilités CONDITIONNELLES : $P_{F_1}(D) = 0{,}03$ et $P_{F_2}(D) = 0{,}07$.

Le mot « produit 3 % de défectueuses » signifie « parmi les pièces de F_1 », d'où le conditionnement.

On en déduit $P_{F_1}(\overline{D}) = 0{,}97$ et $P_{F_2}(\overline{D}) = 0{,}93$.

Chemin F_1 puis D : $P(F_1 \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}03 = 0{,}018$.

Chemin F_1 puis $\overline{D}$: $0{,}6 \times 0{,}97 = 0{,}582$.

Chemin F_2 puis D : $P(F_2 \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}07 = 0{,}028$.

Chemin F_2 puis $\overline{D}$: $0{,}4 \times 0{,}93 = 0{,}372$.

Contrôle : $0{,}018 + 0{,}582 + 0{,}028 + 0{,}372 = 1$. ✔ L'arbre est complet.

Une pièce défectueuse vient soit de F_1, soit de F_2 : on additionne les deux chemins qui mènent à D.

C'est la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(F_1 \cap D) + P(F_2 \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}07$.

$P(D) = 0{,}018 + 0{,}028 = 0{,}046$, soit 4,6 % de pièces défectueuses au total.

Contrôle de vraisemblance : le taux global doit se situer entre 3 % et 7 %, plus près de 3 % puisque F_1 fournit la majorité des pièces. ✔

Pour la dernière question, on demande $P_D(F_1)$: on connaît le défaut et on remonte vers le fournisseur.

$$P_D(F_1) = \frac{P(F_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}018}{0{,}046} \approx 0{,}391,$$ soit environ 39 %.

Résultat instructif : F_1 est le fournisseur le plus FIABLE (3 % contre 7 %), et pourtant près de 40 % des pièces défectueuses viennent de lui — parce qu'il livre beaucoup plus.

Conséquence pratique : pour réduire les défauts, il faut agir en priorité sur F_2, dont le taux est le plus élevé, mais sans négliger F_1 qui pèse lourd en volume.

Réponse. Chemins : 0,018 ; 0,582 ; 0,028 ; 0,372 (somme 1) · $P(D) = 0{,}046$ · $P_D(F_1) \approx 0{,}39$: le fournisseur le plus fiable fournit tout de même 39 % des pièces défectueuses.

Rappel de cours. Sur un arbre : on MULTIPLIE le long d'un chemin, on ADDITIONNE les chemins qui mènent au même événement, et la somme de tous les chemins vaut 1.

Erreur fréquente. Répondre 0,03 à la dernière question. C'est $P_{F_1}(D)$, la donnée de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

départ lue dans le mauvais sens.

Correction de l'exercice 16 – Marge par client

Chaque article rapporte 15 €, donc X articles rapportent $15X$ euros. On retranche ensuite les 10 € de frais, payés dans tous les cas.

$M = 15X - 10$.

M est déterminée par X : elle prend une valeur par valeur de X, avec la même probabilité.

Pour $X = 0$: $M = -10$; pour $X = 1$: $M = 15 - 10 = 5$; pour $X = 2$: $M = 30 - 10 = 20$; pour $X = 3$: $M = 45 - 10 = 35$.

Loi de M : $P(M = -10) = 0{,}15$; $P(M = 5) = 0{,}35$; $P(M = 20) = 0{,}30$; $P(M = 35) = 0{,}20$.

Espérance :
$E(M) = -10 \times 0{,}15 + 5 \times 0{,}35 + 20 \times 0{,}30 + 35 \times 0{,}20 = -1{,}5 + 1{,}75 + 6 + 7 = 13{,}25$ €.

Interprétation : chaque client entré dans le magasin rapporte en moyenne 13,25 € de marge nette, alors que 15 % des clients font perdre 10 €.

Comparaison : $15 \times E(X) - 10 = 15 \times 1{,}55 - 10 = 23{,}25 - 10 = 13{,}25$. On retrouve exactement $E(M)$.

C'était prévisible : un client achète en moyenne 1,55 article, ce qui rapporte en moyenne $15 \times 1{,}55 = 23{,}25$ € de marge, et les 10 € de frais sont payés pour chaque client sans exception.

Lecture de gestion : sur 1 000 clients, le magasin peut espérer environ 13 250 € de marge, avec de grandes différences d'un client à l'autre, de −10 € à 35 €.

Réponse. $M = 15X - 10$ · loi : −10 (0,15) ; 5 (0,35) ; 20 (0,30) ; 35 (0,20) · $E(M) = 13{,}25$ € par client, égale à $15 \times 1{,}55 - 10$.

Rappel de cours. Pour l'espérance d'une grandeur calculée à partir de X, on écrit sa loi (nouvelles valeurs, mêmes probabilités), puis on applique $E = \sum x_i P(X = x_i)$.

Erreur fréquente. Oublier que les 10 € de frais sont dus même si le client n'achète rien : la valeur -10 fait partie de la loi de M.

Correction de l'exercice 17 – Trois clients, combien d'acheteurs ?

Les visiteurs étant indépendants, la probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités rencontrées.

Aucun acheteur : les trois visiteurs n'achètent pas, chacun avec la probabilité $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

$P(Y = 0) = 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}6^3 = 0{,}216$.

Trois acheteurs : $P(Y = 3) = 0{,}4^3 = 0{,}064$.

Pour $P(Y = 1)$, il faut compter les CHEMINS : l'acheteur peut être le premier, le deuxième ou le troisième visiteur, soit 3 chemins.

Chaque chemin a la même probabilité : $0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}144$, l'ordre des facteurs ne changeant pas le produit.

$P(Y = 1) = 3 \times 0{,}144 = 0{,}432$.

Pour $P(Y = 2)$, il y a également 3 chemins (le non-acheteur peut être l'un des trois), chacun de probabilité $0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}096$.

$P(Y = 2) = 3 \times 0{,}096 = 0{,}288$.

Vérification de la loi : $0{,}216 + 0{,}432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1$. ✔ Aucun cas n'a été oublié.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Espérance : $E(Y) = 0 \times 0{,}216 + 1 \times 0{,}432 + 2 \times 0{,}288 + 3 \times 0{,}064$.

$= 0 + 0{,}432 + 0{,}576 + 0{,}192 = 1{,}2$ acheteur.

Contrôle immédiat : 3 visiteurs achetant chacun avec la probabilité 0,4 donnent en moyenne $3 \times 0{,}4 = 1{,}2$ acheteur. ✔ Le résultat était prévisible.

Erreur fréquente à éviter : oublier le facteur 3 pour $P(Y = 1)$ et $P(Y = 2)$. La somme des probabilités vaudrait alors 0,52, ce qui signalerait aussitôt l'oubli.

Réponse. $P(Y = 0) = 0{,}216$; $P(Y = 1) = 0{,}432$; $P(Y = 2) = 0{,}288$; $P(Y = 3) = 0{,}064$ (somme 1) · $E(Y) = 1{,}2$ acheteur, soit $3 \times 0{,}4$.

Rappel de cours. Pour « exactement k », il faut compter les CHEMINS avant de multiplier. Le contrôle est toujours le même : la somme des probabilités doit valoir 1.

Erreur fréquente. Écrire $P(Y = 1) = 0{,}144$ en oubliant les trois chemins possibles. Le contrôle de la somme démasque l'erreur immédiatement.

Correction de l'exercice 18 – Un client utilise-t-il son bon de réduction ?

L'expérience n'a que deux issues : le client utilise son bon (succès, codé 1) ou non (échec, codé 0).

X prend la valeur 1 avec la probabilité $p = 0{,}15$ et la valeur 0 avec la probabilité $1 - p = 0{,}85$: X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,15.

$E(X) = 1 \times 0{,}15 + 0 \times 0{,}85 = 0{,}15$. On retrouve le résultat du cours : l'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p est p.

Interprétation : sur un grand nombre de clients, 15 % utilisent leur bon en moyenne.

Si le client utilise son bon : la marge supplémentaire est $0{,}30 \times 40 = 12$ €, dont on retranche les 5 € de réduction et les 0,80 € d'envoi, soit $G = 12 - 5 - 0{,}80 = 6{,}20$ €.

Si le client n'utilise pas son bon, l'enseigne a seulement payé l'envoi : $G = -0{,}80$ €.

Loi de G : $P(G = 6{,}20) = 0{,}15$ et $P(G = -0{,}80) = 0{,}85$.

$E(G) = 6{,}20 \times 0{,}15 + (-0{,}80) \times 0{,}85 = 0{,}93 - 0{,}68 = 0{,}25$ €.

Pour 20 000 clients, l'enseigne peut espérer $20\,000 \times 0{,}25 = 5\,000$ € de gain.

Si la probabilité d'utilisation vaut p, on a
$E(G) = 6{,}20\,p - 0{,}80\,(1 - p) = 6{,}20\,p - 0{,}80 + 0{,}80\,p = 7p - 0{,}80$.

L'opération est rentable en moyenne lorsque $7p - 0{,}80 \geq 0$, c'est-à-dire $p \geq \dfrac{0{,}80}{7} \approx 0{,}114$.

Conclusion : l'opération reste rentable tant qu'au moins 11,4 % environ des clients utilisent leur bon. Avec 15 %, elle l'est, mais la marge de sécurité est faible.

Réponse. X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,15 et $E(X) = 0{,}15$ · G vaut 6,20 € (probabilité 0,15) ou −0,80 € (probabilité 0,85), $E(G) = 0{,}25$ € · environ 5 000 € pour 20 000 clients · rentable en moyenne dès que $p \geq 0{,}114$ environ.

Rappel de cours. Une variable qui vaut 1 en cas de succès (probabilité p) et 0 sinon suit la loi de Bernoulli de paramètre p ; son espérance est p.

Erreur fréquente. Oublier le coût d'envoi des bons non utilisés : ce sont eux, 85 % des envois, qui pèsent sur le résultat.

Correction de l'exercice 19 – Nombre d'articles par panier

$P(X = 1) = \dfrac{50}{200} = 0{,}25$, $P(X = 2) = \dfrac{80}{200} = 0{,}4$, $P(X = 3) = \dfrac{40}{200} = 0{,}2$,
$P(X = 4) = \dfrac{30}{200} = 0{,}15$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : 0,25 + 0,4 + 0,2 + 0,15 = 1. ✔

$P(X \geq 3) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$.

$E(X) = 1 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}15 = 0{,}25 + 0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}6 = 2{,}25$.

Nombre total d'articles : 50 + 160 + 120 + 120 = 450, et $\frac{450}{200} = 2{,}25$. ✔

L'espérance est exactement le nombre moyen d'articles par panier.

Réponse. Loi : 0,25 ; 0,4 ; 0,2 ; 0,15 · $P(X \geq 3) = 0{,}35$ · $E(X) = 2{,}25$ articles.

Rappel de cours. Quand la loi vient d'un tableau d'effectifs, l'espérance coïncide avec la moyenne de la série.

Erreur fréquente. Calculer $P(X \geq 3)$ avec la seule valeur 3 : « au moins 3 » inclut aussi 4.

Correction de l'exercice 20 – Pourquoi l'espérance se réalise sur le nombre

Au début, la moyenne observée est très instable : après 10 clients elle vaut 1,3, après 50 elle monte à 1,68, après 100 à 1,73.

Puis elle se rapproche progressivement de la droite : 1,635 après 200 clients, 1,574 après 500, 1,549 après 1 000.

Le graphique illustre donc un phénomène fondamental : plus le nombre d'observations augmente, plus la moyenne observée se rapproche de l'espérance.

Sur les premiers clients, quelques gros paniers suffisent à faire bondir la moyenne ; sur mille clients, leur influence est diluée.

Prévision pour 500 clients : 500 × 1,55 = 775 articles.

C'est une prévision fiable, précisément parce que 500 est un grand nombre : le total réel sera proche de 775, à quelques dizaines d'articles près.

Le magasin peut donc calibrer ses stocks et son personnel sur cette valeur, ce qui est l'usage courant de l'espérance en gestion.

Troisième question : non, on ne peut absolument pas prévoir l'achat du prochain client.

Il achètera 0, 1, 2 ou 3 articles, et sûrement pas 1,55 — cette valeur n'est même pas atteignable.

Tout ce qu'on sait, c'est qu'il a 15 % de chances de ne rien acheter et 20 % d'en prendre trois.

Distinction essentielle à retenir : l'espérance ne prédit RIEN pour un individu, mais elle prédit très bien un TOTAL sur un grand nombre d'individus.

C'est ce qui fait la différence entre le joueur, qui perd, et le casino, qui gagne : les deux affrontent la même espérance, mais l'un joue quelques fois et l'autre des millions de fois.

Application directe en gestion : une prévision de chiffre d'affaires annuel est fiable, une prévision de chiffre d'affaires pour la prochaine heure ne l'est pas.

Réponse. La moyenne observée oscille fortement au début puis se stabilise vers 1,55 · 500 × 1,55 = 775 articles à prévoir · impossible en revanche de prévoir l'achat d'un client isolé : l'espérance ne vaut que sur un grand nombre.

Rappel de cours. L'espérance décrit un comportement MOYEN sur un grand nombre de répétitions. Elle ne prédit jamais une observation isolée.

Erreur fréquente. Annoncer « le prochain client achètera 1,55 article ». Aucune valeur de la loi ne vaut 1,55 : c'est une moyenne théorique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 21 – Fixer le prix d’un billet

Valeurs du gain brut G : 50 €, 10 € et 0 €.

Probabilité de ne rien gagner : $1 - (0{,}05 + 0{,}15) = 0{,}80$.

$E(G) = 50 \times 0{,}05 + 10 \times 0{,}15 + 0 \times 0{,}80$.

$= 2{,}50 + 1{,}50 = 4$ €.

Un billet rapporte donc en moyenne 4 € à son acheteur, avant déduction du prix payé.

Un jeu est équitable lorsque l’espérance du gain NET est nulle, c’est-à-dire quand le prix du billet égale l’espérance du gain brut.

Le prix d’équité est donc de 4 €. À ce tarif, l’association ne gagnerait rien en moyenne — ce qui n’est évidemment pas son objectif.

Troisième question : pour 1 200 € de bénéfice sur 600 billets, il faut dégager $\frac{1\,200}{600} = 2$ € par billet.

Le prix doit donc couvrir l’espérance des lots (4 €) plus cette marge (2 €), soit 6 € le billet.

Vérification par les flux : 600 billets à 6 € rapportent 3 600 € de recettes.

Lots distribués en moyenne : $600 \times 4 = 2\,400$ €. Bénéfice attendu : $3\,600 - 2\,400 = 1\,200$ €. ✔

Vérification par l’espérance du gain net du joueur : $E(N) = 4 - 6 = -2$ €, donc −2 € par joueur, soit +2 € par billet pour l’association. ✔

Détail concret des lots à prévoir : environ 5 % de 600, soit 30 lots de 50 € (1 500 €), et 15 %, soit 90 lots de 10 € (900 €). Total 2 400 €. ✔

Réserve à formuler : ce bénéfice est une espérance. Si la tombola tire réellement 35 gros lots au lieu de 30, l’association gagnera 250 € de moins que prévu.

Réponse. $E(G) = 4$ € · prix d’équité : 4 € · pour 1 200 € de bénéfice sur 600 billets, il faut 2 € de marge par billet, donc les vendre 6 €.

Rappel de cours. Prix d’un billet = espérance des lots + marge souhaitée par billet. Le prix d’équité est exactement l’espérance du gain brut.

Erreur fréquente. Diviser le bénéfice visé par le nombre de lots au lieu du nombre de billets. C’est chaque BILLET vendu qui apporte de la marge, pas chaque lot.

Correction de l’exercice 22 – Quel stock commander ?

Demande moyenne : $E(D) = 10 \times 0{,}3 + 20 \times 0{,}5 + 30 \times 0{,}2 = 3 + 10 + 6 = 19$ unités.

Attention : ce n’est pas parce que la demande moyenne vaut 19 qu’il faut commander 19 unités. Il faut calculer le bénéfice de chaque option.

Avec 20 unités commandées, trois scénarios sont possibles.

Demande de 10 : il vend 10 unités ($10 \times 40 = 400$ €) et lui en restent 10 invendues ($10 \times 15 = 150$ € de perte). Bénéfice : $400 - 150 = 250$ €.

Demande de 20 : il vend tout, soit $20 \times 40 = 800$ €, sans invendu. Bénéfice : 800 €.

Demande de 30 : il ne peut vendre que ses 20 unités, soit 800 € également. Les 10 clients supplémentaires repartent bredouilles.

Espérance de bénéfice : $E = 250 \times 0{,}3 + 800 \times 0{,}5 + 800 \times 0{,}2$.

$= 75 + 400 + 160 = 635$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Comparaison avec l'option « 10 unités », dont l'espérance est de 400 € : avec 10 unités, il vend tout à coup sûr ($10 \times 40 = 400$ €), sans risque mais sans potentiel.

L'option à 20 unités rapporte donc en moyenne 235 € de plus. C'est elle qu'il faut conseiller.

Le raisonnement se lit ainsi : commander plus expose au risque d'invendus, mais permet de profiter des fortes demandes. Ici, le gain potentiel (40 € par vente) l'emporte largement sur la perte (15 € par invendu).

Vérification du bon sens : puisqu'une vente rapporte près de trois fois ce qu'un invendu coûte, il vaut mieux risquer l'invendu que la rupture. ✔

Nuance importante : ce calcul ne compte pas le coût de la rupture de stock — client mécontent, qui ne reviendra peut-être pas. En le prenant en compte, commander davantage serait encore plus avantageux.

C'est exactement ainsi qu'un gestionnaire de stock arbitre : il compare l'espérance de marge des différentes commandes possibles, pas la demande moyenne.

Réponse. Demande moyenne = 19 unités · avec 20 unités : bénéfices de 250, 800 et 800 €, d'espérance 635 € · c'est mieux que les 400 € de l'option à 10 unités : il faut commander 20 unités.

Rappel de cours. On ne commande pas « la demande moyenne » : on compare les ESPÉRANCES DE BÉNÉFICE des commandes possibles, en tenant compte du coût des invendus et des ruptures.

Erreur fréquente. Croire qu'avec une demande de 30 il vendra 30 unités. Il ne peut pas vendre plus qu'il n'a commandé : le bénéfice plafonne.

Correction de l'exercice 23 – Un taux de réponse surprenant ?

Bornes : $p - 2s = 0{,}3 - 2 \times 0{,}046 = 0{,}208$ et $p + 2s = 0{,}3 + 0{,}092 = 0{,}392$.

Proportion : $\frac{480}{500} = 0{,}96$. 96 % des échantillons simulés ont une fréquence de réponses comprise entre 0,208 et 0,392.

Fréquence observée cette semaine : $f = \frac{42}{100} = 0{,}42$. Elle s'écarte de p de $0{,}42 - 0{,}30 = 0{,}12$.

$\frac{0{,}12}{0{,}046} \approx 2{,}6$: la fréquence observée se trouve à environ 2,6 fois s de p.

Elle est en dehors de $[p - 2s\,;\, p + 2s]$, puisque $0{,}42 > 0{,}392$, mais dans $[p - 3s\,;\, p + 3s] = [0{,}162\,;\, 0{,}438]$.

Dans la simulation, seuls $500 - 480 = 20$ échantillons sur 500, soit 4 %, sont à plus de $2s$ de p. Une telle fréquence est donc RARE dans le cadre du modèle $p = 0{,}3$.

Deux interprétations sont possibles : soit l'institut a observé un échantillon exceptionnel alors que le taux de réponse est toujours de 30 %, soit le taux de réponse a réellement augmenté (nouvelle façon de contacter les personnes, sujet qui intéresse davantage…).

Un seul échantillon ne permet pas de trancher ; il signale qu'il faut surveiller les semaines suivantes.

Dernière question : s est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour diviser s par 2, il faut multiplier $\sqrt{n}$ par 2, donc multiplier n par $2^2 = 4$.

Il faudrait donc des échantillons de $4 \times 100 = 400$ personnes. Plus généralement, pour diviser la dispersion par k, il faut multiplier la taille de l'échantillon par k^2.

Réponse. $[p - 2s\,;\, p + 2s] = [0{,}208\,;\, 0{,}392]$, qui contient 96 % des échantillons simulés ·

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f = 0{,}42$ est à environ $2{,}6\,s$ de p : situation rare dans le modèle (4 % des échantillons simulés), hasard exceptionnel ou vrai changement du taux de réponse · il faut des échantillons de 400 personnes.

Rappel de cours. La fréquence observée d'un échantillon fluctue autour de p. Une fréquence à plus de $2s$ de p est rare dans le modèle ; à plus de $3s$, elle est exceptionnelle.

Erreur fréquente. Conclure avec certitude que le taux de réponse a changé. Une situation rare dans le modèle reste possible : on dit seulement qu'elle est peu fréquente.

Correction de l'exercice 24 – Livraison gratuite : à partir de quel montant ?

$E(Y) = 20 \times 0{,}3 + 40 \times 0{,}45 + 80 \times 0{,}25 = 6 + 18 + 20 = 44$ €.

Seuil 50 € : seuls les paniers de 80 € ont la livraison gratuite. G vaut $0{,}4 \times 20 = 8$ (probabilité 0,3), $0{,}4 \times 40 = 16$ (probabilité 0,45) et $0{,}4 \times 80 - 6 = 26$ (probabilité 0,25).

$E(G) = 8 \times 0{,}3 + 16 \times 0{,}45 + 26 \times 0{,}25 = 2{,}4 + 7{,}2 + 6{,}5 = 16{,}10$ €.

Seuil 35 € : les paniers de 40 € ont aussi la livraison gratuite, G vaut alors $16 - 6 = 10$.
$E(G) = 8 \times 0{,}3 + 10 \times 0{,}45 + 26 \times 0{,}25 = 2{,}4 + 4{,}5 + 6{,}5 = 13{,}40$ €.

Nouveau comportement avec le seuil de 50 € : Y vaut 20 (0,3), 40 (0,225), 60 (0,225) et 80 (0,25).

Gains correspondants : 8, 16, $0{,}4 \times 60 - 6 = 18$ et 26.

$E(G) = 8 \times 0{,}3 + 16 \times 0{,}225 + 18 \times 0{,}225 + 26 \times 0{,}25 = 2{,}4 + 3{,}6 + 4{,}05 + 6{,}5 = 16{,}55$ €.

Le seuil de 50 € est le meilleur choix : il rapporte 16,10 € par commande contre 13,40 € pour 35 €, et même 16,55 € s'il incite une partie des clients à compléter leur panier.

Réponse. $E(Y) = 44$ € · seuil 50 € : $E(G) = 16{,}10$ € · seuil 35 € : $E(G) = 13{,}40$ € · avec paniers complétés : 16,55 €. Le seuil de 50 € est préférable.

Rappel de cours. Pour comparer des décisions, on calcule l'espérance du GAIN de chaque décision, pas celle du chiffre d'affaires.

Erreur fréquente. Comparer les montants moyens des paniers : c'est le gain, après le coût de livraison, qui compte pour le site.

Correction de l'exercice 25 – Synthèse : lancer une offre promotionnelle

L'arbre comporte deux niveaux : d'abord acheter ou non, puis le montant dépensé si l'on achète.

Un client qui n'achète pas dépense 0 €, avec la probabilité $1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

Un client qui achète 30 € suit le chemin « achète » puis « 30 € » :
$P(X = 30) = 0{,}45 \times 0{,}6 = 0{,}27$.

Un client qui achète 60 € : $P(X = 60) = 0{,}45 \times 0{,}4 = 0{,}18$.

Loi de X : $P(X = 0) = 0{,}55$; $P(X = 30) = 0{,}27$; $P(X = 60) = 0{,}18$.

Contrôle : $0{,}55 + 0{,}27 + 0{,}18 = 1$. ✔

Espérance : $E(X) = 0 \times 0{,}55 + 30 \times 0{,}27 + 60 \times 0{,}18 = 8{,}10 + 10{,}80 = 18{,}90$ €.

Interprétation : chaque VISITEUR — acheteur ou non — rapporte en moyenne 18,90 € de chiffre d'affaires.

Attention à ne pas confondre avec le panier moyen des ACHETEURS, qui vaut $30 \times 0{,}6 + 60 \times 0{,}4 = 42$ €. Les deux chiffres sont différents et répondent à des questions différentes.

Vérification du lien entre les deux : $0{,}45 \times 42 = 18{,}90$ €. ✔ Le chiffre d'affaires par visiteur est le panier moyen multiplié par le taux d'achat.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Chiffre d’affaires attendu pour 3 000 visiteurs : $3\,000 \times 18{,}90 = 56\,700$ €.

Marge correspondante, à 40 % : $0{,}40 \times 56\,700 = 22\,680$ €.

Résultat de l’opération : $22\,680 - 20\,000 = 2\,680$ € de bénéfice. L’opération est donc rentable, mais de justesse.

Pour la dernière question, on cherche le nombre n de visiteurs tel que la marge couvre les 20 000 € de publicité.

Marge par visiteur : $0{,}40 \times 18{,}90 = 7{,}56$ €.

On résout $7{,}56\,n \geq 20\,000$, donc $n \geq \dfrac{20\,000}{7{,}56} \approx 2\,645{,}5$.

Il faut donc au moins 2 646 visiteurs pour rentrer dans ses frais.

Vérification : $2\,646 \times 7{,}56 = 20\,003{,}76$ €, soit tout juste au-dessus du seuil. ✔

Lecture de gestion : avec 3 000 visiteurs attendus, la marge de sécurité n’est que de 354 visiteurs, soit 12 %. Une fréquentation un peu décevante rendrait l’opération déficitaire — c’est le genre de conclusion qu’on attend dans un rapport.

Réponse. Loi : $P(X=0) = 0{,}55$, $P(X=30) = 0{,}27$, $P(X=60) = 0{,}18$ · $E(X) = 18{,}90$ € par visiteur (contre 42 € de panier moyen par acheteur) · marge de 22 680 € pour 20 000 € de publicité, soit 2 680 € de bénéfice · il faut au moins 2 646 visiteurs.

Rappel de cours. Chiffre d’affaires par visiteur = taux d’achat × panier moyen. Confondre les deux revient à surestimer les recettes de plus du double.

Erreur fréquente. Multiplier les 3 000 visiteurs par le panier moyen de 42 €. Cela supposerait que tous achètent, alors que 55 % repartent sans rien.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).