Probabilités et variables aléatoires — Première STMG

25 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Une entreprise ne connaît jamais à l'avance le nombre d'articles qu'elle vendra demain, ni si la machine tombera en panne. Ce qu'elle peut faire, c'est calculer ce que « rapporte en moyenne » chaque décision : c'est l'espérance, et c'est l'outil central de ce chapitre. Ces 25 exercices installent d'abord les probabilités sur des tableaux croisés et des arbres pondérés, l'indépendance de deux événements et la formule des probabilités totales, puis la loi de probabilité d'une variable aléatoire, son espérance et la loi de Bernoulli. La seconde moitié est faite de décisions : choisir entre deux investissements, fixer le prix d'une extension de garantie, dire si un bon de réduction rapporte à l'enseigne, et juger si un résultat d'enquête est surprenant ou simplement dû au hasard de l'échantillon.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-stmg/probabilites-variables-aleatoires

Exercice 1 – Lire un tableau croisé

Une enseigne a fiché 250 clients. 150 achètent en ligne, dont 60 possèdent la carte de fidélité. Parmi les 100 qui achètent en magasin, 55 possèdent la carte. On choisit un client au hasard et on note L « le client achète en ligne » et C « le client a la carte ».

1. Vérifie les effectifs, puis calcule $P(L)$ et $P(C)$.

2. Calcule $P(L \cap C)$ et $P(L \cup C)$.

Exercice 2 – Événement contraire

On garde le fichier de 250 clients. On sait que $P(C) = 0{,}46$ où C est « le client a la carte de fidélité ».

1. Calcule $P(\overline{C})$ et interprète.

2. Combien de clients n'ont pas la carte ?

3. Sachant que $P(L \cap C) = 0{,}24$, calcule la probabilité qu'un client achète en ligne SANS avoir la carte.

Exercice 3 – Probabilité conditionnelle sur un tableau

Toujours avec les 250 clients : 150 en ligne (dont 60 avec carte) et 100 en magasin (dont 55 avec carte).

1. Calcule la probabilité qu'un client ait la carte sachant qu'il achète en ligne.

2. Calcule la probabilité qu'un client achète en ligne sachant qu'il a la carte.

3. Ces deux probabilités sont-elles égales ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On note X le nombre d'articles achetés par un client d'un magasin. Une étude donne :

$P(X = 0) = 0{,}15 \cdot P(X = 1) = 0{,}35 \cdot P(X = 2) = 0{,}30 \cdot P(X = 3) = ?$

1. Complète la loi de probabilité de X.

2. Calcule $P(X \geq 2)$ et $P(X \geq 1)$.

Exercice 5 – Première espérance

On garde la loi de X, nombre d'articles achetés : 0 avec la probabilité 0,15, 1 avec 0,35, 2 avec 0,30 et 3 avec 0,20. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 6 – Un jeu concours est-il rentable ?

Pour une opération commerciale, une enseigne fait tirer un ticket à chaque client. Le ticket rapporte 100 € avec la probabilité 0,01, 20 € avec la probabilité 0,05, et rien dans les autres cas. On note G le gain du client.

1. Donne la loi de probabilité de G.

2. Calcule $E(G)$ et interprète pour l'enseigne.

3. L'opération concerne 4 000 clients. Quel budget prévoir ?

Exercice 7 – Espérance de gain net

Une tombola d'association vend des billets 3 € pièce. Un billet rapporte 100 € avec la probabilité 0,01, 20 € avec la probabilité 0,05, et rien sinon.

1. Quel est le gain NET d'un joueur qui remporte 20 € ?

2. Donne la loi du gain net N et calcule $E(N)$.

3. Le jeu est-il équitable ? Quelle recette l'association peut-elle espérer sur 500 billets ?

Exercice 8 – Variable aléatoire issue d'un tableau

Un restaurant propose trois formules : à 12 €, 18 € et 25 €. Sur 200 couverts servis, 70 formules à 12 €, 90 à 18 € et 40 à 25 € ont été vendues. On note X le montant dépensé par un client pris au hasard.

1. Donne la loi de probabilité de X.

2. Calcule $E(X)$ et interprète.

3. Quel chiffre d'affaires prévoir pour 1 500 couverts ?

Exercice 9 – Achat en ligne et carte de fidélité : indépendants ?

Une enseigne a étudié 400 clients : 240 achètent en ligne, les autres en magasin. 150 clients ont la carte de fidélité, dont 90 parmi les acheteurs en ligne. On choisit un client au hasard et on note L « le client achète en ligne » et C « le client a la carte ».

1. Calcule $P(C)$ et $P_L(C)$.

2. Les événements L et C sont-ils indépendants ? Interprète.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Dans une seconde enseigne, 300 clients sur 500 achètent en ligne et 200 ont la carte, dont 150 parmi les acheteurs en ligne. Même question.

Exercice 10 – Événements incompatibles

Dans une enseigne, un client bénéficie de la remise « nouveau client » avec la probabilité 0,20, et de la remise « carte de fidélité » avec la probabilité 0,35. Les deux remises ne sont jamais cumulables.

1. Que signifie « non cumulables » en langage probabiliste ?

2. Calcule la probabilité qu'un client bénéficie d'une remise.

3. Calcule la probabilité qu'il n'en ait aucune. Sur 800 clients, combien cela représente-t-il ?

Exercice 11 – Arbre pondéré : clients fidèles et achats

Dans une boutique, 60 % des visiteurs ont une carte de fidélité. Parmi eux, 70 % font un achat ; parmi les autres visiteurs, seulement 30 %. On choisit un visiteur au hasard. On note F l'événement « le visiteur a une carte de fidélité » et A l'événement « le visiteur fait un achat ».

1. Construis l'arbre pondéré de la situation.

2. Calcule $P(F \cap A)$, puis $P(A)$.

3. Un visiteur a fait un achat. Quelle est la probabilité qu'il ait une carte de fidélité ?

Exercice 12 – Nombre de pannes et coût moyen

Le nombre X de pannes hebdomadaires d'une machine prend les valeurs 0, 1, 2 et 3 avec les probabilités respectives 0,5 ; 0,3 ; 0,15 et 0,05.

1. Vérifie qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité, puis calcule $P(X \geq 2)$.

2. Calcule l'espérance $E(X)$ et interprète.

3. Chaque panne coûte 200 € de réparation. Quel est le coût moyen hebdomadaire des pannes ?

Exercice 13 – Choisir entre deux investissements

Une société hésite entre deux projets. Le projet A rapporte 30 000 € avec la probabilité 0,6 et fait perdre 5 000 € avec la probabilité 0,4. Le projet B rapporte 100 000 € avec la probabilité 0,25 et fait perdre 12 000 € avec la probabilité 0,75.

1. Calcule l'espérance de gain de chaque projet.

2. Pour chaque projet, quelle est la probabilité de perdre de l'argent ? Que conclure ?

3. Quel projet conseiller à une petite entreprise ? À un grand groupe ?

Exercice 14 – Tarifer une extension de garantie

Un vendeur d'électroménager propose une extension de garantie. Sur les appareils concernés, la probabilité de panne pendant la période couverte est de 0,08, et une réparation coûte en moyenne 400 € au vendeur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Calcule le coût moyen d'un contrat pour le vendeur.

2. L'extension est vendue 60 €. Quelle marge moyenne le vendeur réalise-t-il par contrat ?

3. Sur 2 000 contrats, quel bénéfice espérer ? À partir de quel prix de vente le vendeur perdrait-il de l'argent ?

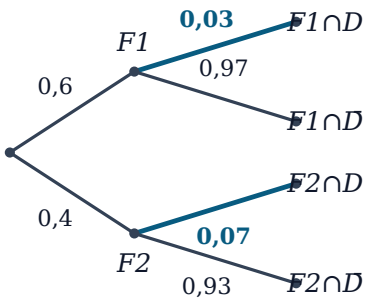
Exercice 15 – Deux fournisseurs et un défaut

Une entreprise s'approvisionne auprès de deux fournisseurs : 60 % des pièces viennent de F_1, qui produit 3 % de pièces défectueuses, et 40 % de F_2, qui en produit 7 %. On prélève une pièce au hasard et on note D l'événement « la pièce est défectueuse ».

1. Construis l'arbre pondéré et calcule la probabilité des quatre chemins.

2. Calcule $P(D)$.

3. Une pièce défectueuse est trouvée : quelle est la probabilité qu'elle vienne de F_1 ?



Les deux chemins menant à une pièce défectueuse : 0,018 et 0,028

Exercice 16 – Marge par client

On reprend X, le nombre d'articles achetés par un client : X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3 avec les probabilités 0,15 ; 0,35 ; 0,30 et 0,20, et $E(X) = 1{,}55$. Chaque article rapporte 15 € de marge, et chaque client entré dans le magasin coûte 10 € en frais d'accueil et de service.

1. Exprime la marge M réalisée sur un client en fonction de X.

2. Donne la loi de probabilité de M, puis calcule $E(M)$ et interprète.

3. Compare $E(M)$ avec $15 \times E(X) - 10$. Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

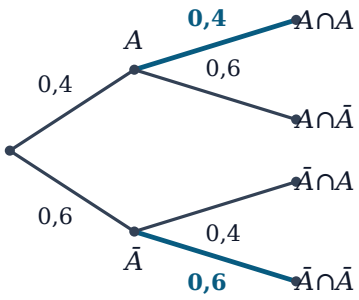
Exercice 17 – Trois clients, combien d'acheteurs ?

Dans une boutique, chaque visiteur achète avec la probabilité 0,4, indépendamment des autres. Trois visiteurs entrent. On note Y le nombre d'acheteurs parmi eux.

1. Calcule $P(Y = 0)$ et $P(Y = 3)$.

2. Calcule $P(Y = 1)$ et $P(Y = 2)$, puis vérifie la loi.

3. Calcule $E(Y)$.



Arbre pour les deux premiers visiteurs (A = « achète ») ; le troisième niveau se construit de la même façon

Exercice 18 – Un client utilise-t-il son bon de réduction ?

Une enseigne envoie à chaque client un bon de réduction de 5 €, pour un coût d'envoi de 0,80 € par client. Chaque client utilise son bon avec la probabilité 0,15. On choisit un client au hasard et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le client utilise son bon et 0 sinon.

1. Justifie que X suit une loi de Bernoulli, précise son paramètre et calcule $E(X)$.

2. Un bon utilisé fait acheter 40 € de plus, sur lesquels l'enseigne réalise 30 % de marge. On note G le gain de l'enseigne pour un client, en euros. Donne la loi de G et calcule $E(G)$.

3. Quel gain total l'enseigne peut-elle espérer pour 20 000 clients ? À partir de quelle probabilité d'utilisation l'opération est-elle rentable en moyenne ?

Exercice 19 – Nombre d'articles par panier

Sur 200 paniers d'un magasin, on a compté le nombre d'articles achetés : 50 paniers contiennent 1 article, 80 en contiennent 2, 40 en contiennent 3 et 30 en contiennent 4. On choisit un panier au hasard et on note X son nombre d'articles.

1. Donne la loi de probabilité de X.

2. Calcule la probabilité qu'un panier contienne au moins 3 articles.

3. Calcule $E(X)$ et vérifie le résultat avec le nombre total d'articles vendus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

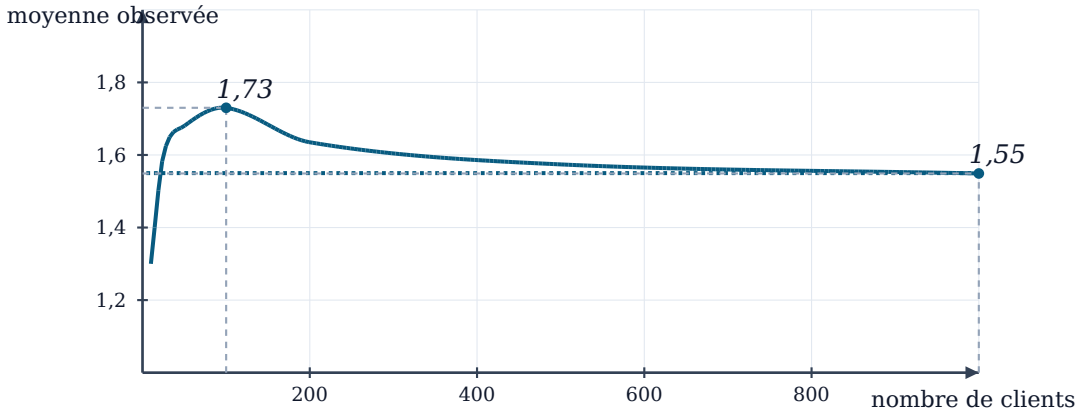
Exercice 20 – Pourquoi l’espérance se réalise sur le nombre

Le graphique montre le nombre moyen d’articles achetés par client, calculé au fur et à mesure des passages en caisse, lors d’une simulation portant sur 1 000 clients. La droite en pointillés représente l’espérance $E(X) = 1{,}55$.

1. Décris ce que montre le graphique.

2. Le magasin attend 500 clients demain. Combien d’articles prévoir ?

3. Peut-on prévoir le nombre d’articles achetés par le prochain client ?



Exercice 21 – Fixer le prix d’un billet

Une association organise une tombola. Les lots sont : un lot de 50 € avec la probabilité 0,05, un lot de 10 € avec la probabilité 0,15, rien sinon.

1. Calcule l’espérance du gain brut d’un billet.

2. Quel prix de vente rendrait le jeu équitable ?

3. L’association veut dégager 1 200 € de bénéfice sur 600 billets. À quel prix les vendre ?

Exercice 22 – Quel stock commander ?

Un commerçant vend un produit saisonnier. La demande D vaut 10 unités avec la probabilité 0,3, 20 avec la probabilité 0,5 et 30 avec la probabilité 0,2. Chaque unité vendue rapporte 40 € de marge ; chaque unité invendue est bradée et fait perdre 15 €.

1. Calcule la demande moyenne.

2. S’il commande 20 unités, quel est son bénéfice selon les trois scénarios ? Calcule l’espérance de bénéfice.

3. S’il commande 10 unités, l’espérance vaut 400 €. Que conseiller ?

Exercice 23 – Un taux de réponse surprenant ?

Un institut de sondage sait que, d’habitude, 30 % des personnes contactées répondent à son enquête. On modélise la réponse d’une personne par une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}3$. Un tableur a simulé $N = 500$ échantillons de taille $n = 100$ et calculé, pour chacun, la fréquence f des réponses. La série des 500 fréquences a pour écart-type $s \approx 0{,}046$. Le tableur indique que 338 fréquences sont

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

dans l'intervalle $[p-s\,;p+s]$, 480 dans $[p-2s\,;p+2s]$ et 499 dans $[p-3s\,;p+3s]$.

1. Calcule les bornes de l'intervalle $[p-2s\,;p+2s]$ et la proportion des échantillons simulés qui s'y trouvent.

2. Cette semaine, 42 personnes sur 100 ont répondu. À combien de fois s cette fréquence se trouve-t-elle de p ? Est-ce une situation fréquente ou rare dans le modèle ? Comment l'interpréter ?

3. Les simulations montrent que s est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Quelle taille d'échantillon faudrait-il pour diviser la dispersion des fréquences par 2 ?

Exercice 24 – Livraison gratuite : à partir de quel montant ?

Le montant Y d'un panier sur un site marchand vaut 20 € avec la probabilité 0,3, 40 € avec la probabilité 0,45 et 80 € avec la probabilité 0,25. La marge réalisée est de 40 % du montant du panier. La livraison coûte 6 € : elle est payée par le client, sauf si le panier atteint le seuil de livraison gratuite, auquel cas c'est le site qui la paie.

1. Calcule $E(Y)$.

2. Le seuil est fixé à 50 €. On note G le gain du site par commande (marge moins livraison éventuelle). Donne la loi de G et calcule $E(G)$.

3. Même question avec un seuil de 35 €.

4. Avec le seuil de 50 €, la moitié des clients à 40 € complètent leur panier jusqu'à 60 € pour ne pas payer la livraison. Calcule le nouveau gain moyen et conclus.

Exercice 25 – Synthèse : lancer une offre promotionnelle

Une enseigne lance une offre. Un client qui entre achète avec la probabilité 0,45. S'il achète, il dépense 30 € avec la probabilité 0,6 ou 60 € avec la probabilité 0,4. On note X la dépense d'un client entré dans le magasin.

1. Construis l'arbre et donne la loi de probabilité de X.

2. Calcule $E(X)$ et interprète.

3. L'opération attire 3 000 visiteurs et coûte 20 000 € en publicité. Est-elle rentable si la marge est de 40 % du chiffre d'affaires ?

4. Combien de visiteurs faudrait-il au minimum pour rentrer dans ses frais ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).