

Répétition d'épreuves indépendantes — Première STMG

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Un client achète ou n'achète pas, un colis arrive à l'heure ou en retard, une pièce est conforme ou défectueuse : chacune de ces situations est une épreuve de Bernoulli. Quand on la répète plusieurs fois dans les mêmes conditions, l'arbre de probabilités permet de tout calculer. Ces 20 exercices installent d'abord les deux règles de l'arbre (multiplier le long d'un chemin, additionner les chemins), puis le comptage des chemins pour trois et quatre épreuves, et l'astuce de l'événement contraire pour « au moins un ». Les derniers exercices sont des décisions de gestion : surréservation, assurance, relances de factures impayées.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-stmg/repetition-epreuves-independantes

Exercice 1 - Reconnaître une épreuve de Bernoulli

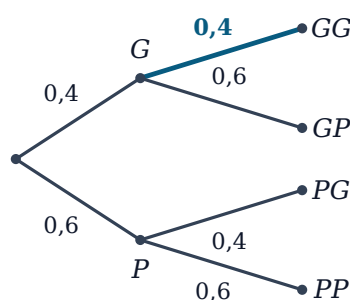
Pour chaque expérience, dis s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli. Si oui, précise le succès et sa probabilité.

1. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes et on regarde si c'est un as.
2. On demande à un client sa note de satisfaction, de 1 à 5.
3. Un colis arrive en retard avec la probabilité 0,08 ; on regarde s'il arrive en retard.

Exercice 2 - Deux tirages avec remise

Une urne contient 4 jetons gagnants et 6 jetons perdants. On tire un jeton, on le remet, puis on en tire un second.

1. Calcule la probabilité de tirer deux jetons gagnants.
2. Calcule la probabilité de tirer exactement un jeton gagnant.



G : jeton gagnant, P : jeton perdant ; les branches du second tirage reprennent les mêmes probabilités

Exercice 3 - Deux imprimantes en panne

Dans un bureau, chacune des deux imprimantes tombe en panne dans la journée avec la probabilité 0,1, indépendamment de l'autre.

1. Calcule la probabilité que les deux imprimantes soient en panne.
2. Calcule la probabilité qu'au moins une imprimante soit en panne.

Exercice 4 - Exactement une vente

Une vendeuse conclut une vente avec chaque client avec la probabilité 0,35, indépendamment. Elle reçoit deux clients. Calcule la probabilité qu'elle conclue exactement une vente.

Exercice 5 - Avec ou sans remise ?

Pour chaque situation, dis s'il s'agit d'une répétition d'épreuves identiques et indépendantes.

1. On lance trois fois le même dé.
2. On tire successivement deux cartes d'un jeu, sans remettre la première.
3. On interroge trois clients choisis au hasard parmi des milliers de clients.

Exercice 6 - Trois épreuves et la loi du nombre de succès

Chaque visiteur d'un stand s'inscrit à la newsletter avec la probabilité 0,4, indépendamment. Trois visiteurs passent. On note X le nombre d'inscriptions. Donne la loi de X .

Exercice 7 - Au moins un défaut sur trois pièces

Une machine produit 15 % de pièces défectueuses. On prélève trois pièces de façon indépendante. Calcule la probabilité qu'au moins une soit défectueuse.

Exercice 8 - Un ordre imposé ou non

Une équipe gagne chaque match avec la probabilité 0,6, indépendamment. Elle joue trois matchs.

1. Calcule la probabilité de gagner les deux premiers matchs et de perdre le troisième.
2. Calcule la probabilité de gagner exactement deux matchs.

Exercice 9 - Nombre moyen d'inscriptions

Le nombre X d'inscriptions parmi trois visiteurs a pour loi $P(X = 0) = 0,216$, $P(X = 1) = 0,432$, $P(X = 2) = 0,288$, $P(X = 3) = 0,064$, chaque visiteur s'inscrivant avec la probabilité 0,4. Calcule $E(X)$ et vérifie le résultat.

Exercice 10 - Compter les chemins à deux succès

On répète quatre fois une épreuve de Bernoulli. On note S un succès et E un échec. Liste les issues comportant exactement deux succès, puis calcule leur probabilité totale pour $p = 0,5$.

Exercice 11 - Quatre pièces contrôlées

Une production compte 2 % de pièces défectueuses. On contrôle quatre pièces prélevées de façon indépendante.

1. Calcule la probabilité qu'aucune ne soit défectueuse, arrondie à 10^{-4} .
2. En déduire la probabilité qu'au moins une soit défectueuse.

Exercice 12 - Au plus un achat sur quatre clients

Chaque client achète avec la probabilité 0,3, indépendamment. Quatre clients entrent. Calcule la probabilité qu'au plus un client achète.

Exercice 13 - Des serveurs de secours

Un serveur informatique tombe en panne pendant un pic d'activité avec la probabilité 0,15. On installe plusieurs serveurs identiques et indépendants ; le service fonctionne si au moins un serveur fonctionne.

1. Calcule la probabilité que le service fonctionne avec deux serveurs, puis avec trois.
2. Combien de serveurs faut-il pour dépasser 99 % de disponibilité ?

Exercice 14 - Quatre appels suffisent-ils ?

Une association obtient un don à chaque appel avec la probabilité 0,4, indépendamment. Elle veut au moins 90 % de chances d'obtenir au moins un don. Quatre appels suffisent-ils ?

Exercice 15 - Un jeu à trois lancers

Un jeu coûte 6 € : on lance trois fois une pièce équilibrée et on gagne 5 € par face obtenue. On note G le gain net (gains moins mise).

1. Donne la loi de G .
2. Calcule $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 16 - Une navette en surréservation

Une navette vers l'aéroport a trois places, mais le transporteur accepte quatre réservations. Chaque client se présente avec la probabilité 0,9, indépendamment.

1. Calcule la probabilité de surréservation (les quatre clients se présentent).
2. Le transporteur doit-il maintenir cette pratique ?

Exercice 17 - Assurer quatre téléphones

Une entreprise équipe quatre salariés d'un téléphone. Chaque téléphone est cassé dans l'année avec la probabilité 0,05, indépendamment, et une réparation coûte 120 €. On note C le coût annuel des réparations.

1. Donne la loi de C , avec des probabilités arrondies à 10^{-4} .
2. Calcule $E(C)$. Une assurance à 40 € par an pour les quatre téléphones est-elle intéressante en moyenne ?

Exercice 18 - Deux paris du chevalier de Méré

Le chevalier de Méré comparait deux paris : obtenir au moins un 6 en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un « double six » en quatre lancers de deux dés.

1. Calcule la probabilité de gagner chaque pari.
2. Lequel est favorable ?

Exercice 19 - Deux règles de contrôle

Un acheteur contrôle trois pièces de chaque lot (prélèvements indépendants). Règle A : il accepte le lot si aucune pièce n'est défectueuse. Règle B : il l'accepte si au plus une pièce est défectueuse.

1. Pour un lot à 10 % de défauts, calcule la probabilité d'acceptation avec chaque règle.
2. Même question pour un lot à 20 % de défauts, puis compare les deux règles.

Exercice 20 - Synthèse : relancer des factures impayées

Une PME relance trois clients en retard de paiement, chacun lui devant 500 €. Chaque client paie après relance avec la probabilité 0,6, indépendamment, et chaque relance coûte 15 €. On note X le nombre de clients qui paient.

1. Donne la loi de X .
2. Calcule le montant moyen récupéré, puis le gain moyen net des frais de relance.
3. Calcule la probabilité de récupérer au moins 1 000 €.

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli a exactement deux issues : un succès, de probabilité p , et un échec, de probabilité $1 - p$.

Tirer un as : oui. Il y a 4 as sur 32 cartes, donc $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125$.

Note de satisfaction : non, il y a cinq issues. On peut en faire une épreuve de Bernoulli en choisissant un succès, par exemple « note de 4 ou 5 ».

Colis en retard : oui, le succès est « le colis arrive en retard », avec $p = 0,08$. Le « succès » est simplement l'issue qui nous intéresse.

Réponse. Oui ($p = 0,125$) · non (cinq issues) · oui ($p = 0,08$).

Correction de l'exercice 2 - Deux tirages avec remise

Le jeton est remis : les deux tirages sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de succès « jeton gagnant » et de probabilité $p = \frac{4}{10} = 0,4$.

Deux gagnants : un seul chemin de l'arbre, $0,4 \times 0,4 = 0,16$.

Exactement un gagnant : deux chemins (gagnant puis perdant, ou l'inverse), chacun de probabilité $0,4 \times 0,6 = 0,24$.

On additionne : $0,24 + 0,24 = 0,48$.

Réponse. $0,16 \cdot 0,48$.

Rappel de cours. On multiplie le long d'un chemin, on additionne les chemins qui mènent au même événement.

Correction de l'exercice 3 - Deux imprimantes en panne

Succès : « l'imprimante tombe en panne », $p = 0,1$, répété deux fois de façon indépendante.

Les deux en panne : $0,1 \times 0,1 = 0,01$, soit une journée sur cent.

« Au moins une en panne » a pour contraire « aucune en panne », de probabilité $0,9 \times 0,9 = 0,81$.

Donc $P(\text{au moins une en panne}) = 1 - 0,81 = 0,19$.

Le bureau peut presque toujours imprimer (sauf une journée sur cent), mais une panne survient environ une journée sur cinq.

Réponse. $0,01 \cdot 0,19$.

Correction de l'exercice 4 - Exactement une vente

Exactement une vente se produit de deux façons : vente au premier client et pas au second, ou l'inverse.

Chacun de ces chemins a pour probabilité $0,35 \times 0,65 = 0,2275$.

On additionne les deux chemins : $2 \times 0,2275 = 0,455$.

Contrôle : deux ventes $0,35^2 = 0,1225$, aucune vente $0,65^2 = 0,4225$, et $0,1225 + 0,455 + 0,4225 = 1$.

Réponse. 0,455.

Erreur fréquente. Oublier l'un des deux chemins et répondre 0,2275.

Correction de l'exercice 5 - Avec ou sans remise ?

Trois lancers de dé : oui, le dé ne change pas d'un lancer à l'autre et un lancer n'influence pas le suivant.

Deux cartes sans remise : non, le jeu n'a plus que 31 cartes au second tirage et sa composition dépend de la première carte.

Trois clients parmi des milliers : on peut considérer que oui. Retirer un client ne change presque pas la proportion des autres, on assimile les choix à des tirages avec remise.

Réponse. Oui · non · oui (approximation justifiée par la grande taille de la population).

Correction de l'exercice 6 - Trois épreuves et la loi du nombre de succès

L'arbre à trois niveaux compte 8 chemins. Un chemin à k inscriptions a pour probabilité $0,4^k \times 0,6^{3-k}$, et il y a 1, 3, 3 ou 1 chemins pour $k = 0, 1, 2, 3$.

$$P(X = 0) = 0,6^3 = 0,216 \text{ et } P(X = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,36 = 0,432.$$

$$P(X = 2) = 3 \times 0,16 \times 0,6 = 0,288 \text{ et } P(X = 3) = 0,4^3 = 0,064.$$

$$\text{Contrôle : } 0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1.$$

Réponse. 0,216 ; 0,432 ; 0,288 ; 0,064.

Rappel de cours. Trois épreuves : 1, 3, 3, 1 chemins pour 0, 1, 2, 3 succès.

Correction de l'exercice 7 - Au moins un défaut sur trois pièces

« Au moins une défectueuse » regroupe sept des huit chemins ; son contraire, « aucune défectueuse », n'en compte qu'un.

$$P(\text{aucune}) = 0,85^3 = 0,614125.$$

$$P(\text{au moins une}) = 1 - 0,614125 = 0,385875, \text{ soit environ } 0,386.$$

Réponse. $1 - 0,85^3 \approx 0,386$.

Erreur fréquente. Retrancher $0,15^3$ (trois défectueuses) au lieu de $0,85^3$ (aucune défectueuse).

Correction de l'exercice 8 - Un ordre imposé ou non

Gagner, gagner, perdre dans cet ordre : un seul chemin, $0,6 \times 0,6 \times 0,4 = 0,144$.

Exactement deux victoires sans ordre imposé : trois chemins (la défaite au premier, deuxième ou troisième match), chacun de probabilité 0,144.

$$P(\text{exactement deux victoires}) = 3 \times 0,144 = 0,432.$$

La seconde probabilité est trois fois plus grande que la première : l'énoncé dit si l'ordre compte.

Réponse. $0,144 \cdot 0,432$.

Correction de l'exercice 9 - Nombre moyen d'inscriptions

$$E(X) = 0 \times 0,216 + 1 \times 0,432 + 2 \times 0,288 + 3 \times 0,064.$$

$$E(X) = 0,432 + 0,576 + 0,192 = 1,2.$$

Vérification : trois visiteurs qui s'inscrivent chacun avec la probabilité 0,4 donnent en moyenne $3 \times 0,4 = 1,2$ inscription.

Sur un grand nombre de groupes de trois visiteurs, on compte en moyenne 1,2 inscription par groupe.

Réponse. $E(X) = 1,2$.

Correction de l'exercice 10 - Compter les chemins à deux succès

On place les deux succès parmi les quatre rangs : *SSEE*, *SESE*, *SEES*, *ESSE*, *ESES*, *EESS*, soit 6 issues.

Avec $p = 0,5$, chaque issue a pour probabilité $0,5^4 = 0,0625$.

$P(\text{exactement deux succès}) = 6 \times 0,0625 = 0,375$.

Contrôle du comptage : $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$ chemins en tout.

Réponse. 6 issues $\cdot 0,375$.

Rappel de cours. Quatre épreuves : 1, 4, 6, 4, 1 chemins pour 0 à 4 succès.

Correction de l'exercice 11 - Quatre pièces contrôlées

Aucune défectueuse : un seul chemin, $0,98^4 \approx 0,9224$.

Au moins une défectueuse : par le contraire, $1 - 0,98^4 \approx 0,0776$.

Avec 2 % de défauts, un contrôle de quatre pièces ne détecte un défaut qu'environ 8 fois sur 100.

Réponse. $\approx 0,9224 \cdot \approx 0,0776$.

Correction de l'exercice 12 - Au plus un achat sur quatre clients

« Au plus un » signifie « aucun » ou « exactement un ».

Aucun achat : $0,7^4 = 0,2401$.

Exactement un achat : 4 chemins, chacun de probabilité $0,3 \times 0,7^3 = 0,1029$, soit $4 \times 0,1029 = 0,4116$.

$P(\text{au plus un}) = 0,2401 + 0,4116 = 0,6517$.

Réponse. 0,6517.

Correction de l'exercice 13 - Des serveurs de secours

Le service ne s'arrête que si tous les serveurs sont en panne. Avec n serveurs : $P(\text{fonctionne}) = 1 - 0,15^n$.

Deux serveurs : $1 - 0,0225 = 0,9775$. Trois serveurs : $1 - 0,003375 = 0,996625$.

Deux serveurs donnent 97,75 %, moins que 99 % ; trois en donnent environ 99,66 %. Il faut donc trois serveurs.

Réponse. 0,9775 et 0,996625 $\cdot$ trois serveurs.

Correction de l'exercice 14 - Quatre appels suffisent-ils ?

Avec n appels, par le contraire : $P(\text{au moins un don}) = 1 - 0,6^n$.

$n = 1 : 0,4$; $n = 2 : 0,64$; $n = 3 : 0,784$; $n = 4 : 1 - 0,1296 = 0,8704$.

Même avec quatre appels, la probabilité reste sous 0,9 : quatre appels ne suffisent pas. Il faudrait davantage d'appels, ou améliorer le taux de réussite de chaque appel.

Réponse. Non : $1 - 0,6^4 = 0,8704 < 0,9$.

Correction de l'exercice 15 - Un jeu à trois lancers

Le nombre de faces vaut 0, 1, 2 ou 3 avec les probabilités 0,125 ; 0,375 ; 0,375 ; 0,125 (1, 3, 3, 1 chemins de probabilité 0,125).

Le gain net est $G = 5 \times (\text{nombre de faces}) - 6$, soit -6 , -1 , 4 ou 9 € avec ces mêmes probabilités.

$$E(G) = -6 \times 0,125 - 1 \times 0,375 + 4 \times 0,375 + 9 \times 0,125 = -0,75 - 0,375 + 1,5 + 1,125 = 1,5 \text{ €}.$$

L'espérance est positive : le jeu est favorable au joueur, qui gagne en moyenne 1,50 € par partie. L'organisateur perd de l'argent sur la durée.

Réponse. $G : -6 ; -1 ; 4 ; 9$ € · $E(G) = 1,5$ € : jeu favorable.

Correction de l'exercice 16 - Une navette en surréservation

Succès : « le client se présente », $p = 0,9$, $n = 4$.

Surréservation : un seul chemin, les quatre clients viennent. $P = 0,9^4 = 0,6561$.

Dans environ deux trajets sur trois, un client se retrouve sans place : c'est beaucoup trop fréquent.

Avec un taux de présence de 90 %, accepter une réservation de plus que de places n'est pas raisonnable sur un si petit effectif. Le transporteur devrait arrêter, ou prévoir une solution de remplacement (taxi payé) systématique.

Réponse. $0,9^4 = 0,6561$: pratique à abandonner.

Correction de l'exercice 17 - Assurer quatre téléphones

Le nombre de téléphones cassés vaut 0 à 4, avec 1, 4, 6, 4, 1 chemins :

$$P(0) = 0,95^4 \approx 0,8145, P(1) = 4 \times 0,05 \times 0,95^3 \approx 0,1715,$$

$$P(2) = 6 \times 0,05^2 \times 0,95^2 \approx 0,0135, P(3) \approx 0,0005, P(4) \approx 0,0000.$$

C vaut 0, 120, 240, 360 ou 480 € avec ces probabilités.

$$E(C) \approx 120 \times 0,1715 + 240 \times 0,0135 + 360 \times 0,0005 \approx 20,58 + 3,24 + 0,18 = 24 \text{ €}.$$

En moyenne, les réparations coûtent 24 € par an, moins que les 40 € de l'assurance : elle n'est pas intéressante en moyenne. Elle protège seulement contre les années rares où plusieurs téléphones cassent.

Réponse. $E(C) \approx 24$ € : l'assurance à 40 € n'est pas rentable en moyenne.

Correction de l'exercice 18 - Deux paris du chevalier de Méré

Premier pari : succès « obtenir 6 », $p = \frac{1}{6}$. Par le contraire :

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 1 - 0,482 = 0,518.$$

Second pari : un double six a pour probabilité $\frac{1}{36}$ à chaque lancer des deux dés. Par le

$$\text{contraire : } 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^4 \approx 1 - 0,893 = 0,107.$$

Seul le premier pari est favorable (probabilité supérieure à 0,5). Le second est perdu près de neuf fois sur dix : quatre lancers ne suffisent pas pour un événement trente-six fois moins probable à chaque essai.

Réponse. $\approx 0,518$ et $\approx 0,107$: seul le premier pari est favorable.

Correction de l'exercice 19 - Deux règles de contrôle

Lot à 10 % : règle A, $0,9^3 = 0,729$; règle B, $0,9^3 + 3 \times 0,1 \times 0,9^2 = 0,729 + 0,243 = 0,972$.

Lot à 20 % : règle A, $0,8^3 = 0,512$; règle B,
 $0,512 + 3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,512 + 0,384 = 0,896$.

La règle B accepte presque tous les lots, même ceux deux fois plus défectueux (89,6 %) : elle ne protège guère l'acheteur.

La règle A est plus sévère et distingue mieux les deux qualités (72,9 % contre 51,2 %), au prix du refus d'un bon lot sur quatre environ.

Réponse. 10 % : A 0,729, B 0,972 · 20 % : A 0,512, B 0,896.

Correction de l'exercice 20 - Synthèse : relancer des factures impayées

Succès : « le client paie », $p = 0,6$, $n = 3$: $P(X = 0) = 0,4^3 = 0,064$,
 $P(X = 1) = 3 \times 0,6 \times 0,16 = 0,288$, $P(X = 2) = 3 \times 0,36 \times 0,4 = 0,432$,
 $P(X = 3) = 0,6^3 = 0,216$.

Le montant récupéré vaut 0, 500, 1 000 ou 1 500 € : en moyenne
 $500 \times 0,288 + 1\,000 \times 0,432 + 1\,500 \times 0,216 = 144 + 432 + 324 = 900$ €.

Les trois relances coûtent $3 \times 15 = 45$ €, d'où un gain moyen net de $900 - 45 = 855$ €.

Au moins 1 000 € : au moins deux clients paient, $P(X \geq 2) = 0,432 + 0,216 = 0,648$.

La relance est très rentable : pour 45 € de frais, la PME récupère en moyenne 900 €, et au moins 1 000 € près de deux fois sur trois.

Réponse. Loi : 0,064 ; 0,288 ; 0,432 ; 0,216 · 900 € récupérés en moyenne, 855 € net · $P \approx 0,648$.