Triangles égaux et semblables — Quatrième

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Deux triangles sont ÉGAUX quand ils sont superposables, et SEMBLABLES quand l'un est un agrandissement de l'autre. Ces 20 exercices installent les cas d'égalité et de similitude, apprennent à repérer les sommets qui se correspondent — l'étape où l'on se trompe le plus — puis à s'en servir pour calculer une longueur inconnue par un coefficient d'agrandissement.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/quatrieme/triangles-egaux-et-semblables

Exercice 1 – Triangles égaux : définition

Que signifie « les triangles ABC et DEF sont égaux » ? Quelles égalités de longueurs cela entraîne-t-il ?

Exercice 2 – Cas d'égalité : trois côtés

Deux triangles ont respectivement pour côtés 5 cm, 7 cm, 9 cm et 9 cm, 5 cm, 7 cm. Sont-ils égaux ?

Exercice 3 – Cas d'égalité : deux côtés et l'angle entre eux

Dans deux triangles, on a $AB = DE = 6$ cm, $AC = DF = 8$ cm, et $\widehat{A} = \widehat{D} = 50°$. Les triangles sont-ils égaux ?

Exercice 4 – Cas d'égalité : un côté et deux angles

Deux triangles ont un côté de 7 cm compris entre deux angles de 40° et 60°. Sont-ils égaux ?

Exercice 5 – Triangles semblables : définition

Que signifie « les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables » ?

Exercice 6 – Reconnaître des triangles semblables

Un triangle a des angles de 50° et 60°. Un autre a des angles de 70° et 50°. Sont-ils semblables ?

Exercice 7 – Coefficient d'agrandissement

Deux triangles semblables ont pour côtés 3, 4, 5 cm et 9, 12, 15 cm. Quel est le coefficient d'agrandissement ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Calculer une longueur

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, avec $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm et $A'B' = 10$ cm. Calcule $B'C'$.

Exercice 9 – Réduction

Un triangle de côtés 12, 16 et 20 cm est réduit avec un coefficient de 0,25. Quelles sont les nouvelles longueurs ?

Exercice 10 – Repérer les sommets correspondants

Les triangles ABC et MNP sont semblables, avec $\hat{A} = \hat{M}$ et $\hat{B} = \hat{N}$. Écris les trois rapports égaux entre les côtés.

Exercice 11 – Effet sur les angles

Un triangle a des angles de 35°, 65° et 80°. On l'agrandit avec un coefficient de 4. Quels sont les angles du nouveau triangle ?

Exercice 12 – Effet sur le périmètre et l'aire

Un triangle a un périmètre de 24 cm et une aire de 30 cm². On l'agrandit avec un coefficient de 3. Que deviennent son périmètre et son aire ?

Exercice 13 – Deux triangles dans une figure

Deux droites se coupent en O. Les points A et B sont sur la première, C et D sur la seconde, avec (AC) parallèle à (BD). Pourquoi les triangles OAC et OBD sont-ils semblables ?

Exercice 14 – Calculer avec un rapport

Les triangles ABC et DEF sont semblables. On sait que $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm, $DE = 8$ cm. Calcule DF.

Exercice 15 – Triangles égaux ou seulement semblables ?

Deux triangles ont des angles de 40°, 60° et 80°. Sont-ils forcément égaux ? Justifie par un exemple.

Exercice 16 – L'ombre du bâtiment

Un piquet de 1,5 m projette une ombre de 2,4 m. Au même moment, un bâtiment projette une ombre de 20 m. Quelle est la hauteur du bâtiment ?

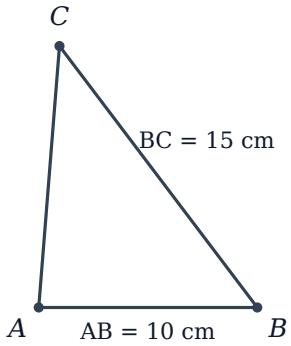
Exercice 17 – Démontrer une égalité de triangles

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Démontre que les triangles AOB et COD sont égaux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Le triangle emboîté

Dans un triangle ABC, le point M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, avec (MN) parallèle à (BC). On donne $AM = 4$ cm, $AB = 10$ cm et $BC = 15$ cm. Calcule MN.



M sur [AB] et N sur [AC] avec (MN) // (BC) : les triangles AMN et ABC sont semblables.

Exercice 19 – Retrouver un coefficient

Un triangle a une aire de 18 cm². Après agrandissement, son aire vaut 162 cm². Quel est le coefficient d'agrandissement des longueurs ?

Exercice 20 – Vrai ou faux justifié

Vrai ou faux, en justifiant : a) « Deux triangles égaux sont semblables. » b) « Deux triangles semblables sont égaux. » c) « Deux triangles ayant deux côtés égaux sont égaux. »

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Triangles égaux : définition

Deux triangles sont égaux quand ils sont superposables : on peut poser l'un exactement sur l'autre, éventuellement après un retournement.

L'ordre des lettres indique quels sommets se correspondent : A avec D, B avec E, C avec F.

On en déduit $AB = DE$, $BC = EF$ et $AC = DF$.

Les angles correspondants sont eux aussi égaux : $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$.

Réponse. Ils sont superposables : $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$, et les angles correspondants sont égaux.

Rappel de cours. L'ordre des lettres n'est jamais gratuit : il donne la correspondance des sommets.

Erreur fréquente. Écrire $AB = EF$: il faut respecter l'ordre annoncé par l'énoncé.

Correction de l'exercice 2 – Cas d'égalité : trois côtés

On compare les ensembles de longueurs, sans tenir compte de l'ordre d'écriture.

Premier triangle : $\{5; 7; 9\}$. Second triangle : $\{5; 7; 9\}$.

Les trois côtés sont deux à deux de même longueur.

D'après le cas d'égalité « trois côtés », les deux triangles sont égaux.

Remarque : trois longueurs déterminent entièrement un triangle, à un déplacement ou un retournement près.

Réponse. Oui : les trois côtés sont deux à deux égaux.

Rappel de cours. Cas d'égalité n°1 : trois côtés respectivement égaux.

Erreur fréquente. Croire que l'ordre d'écriture change quelque chose : ce sont les mêmes trois longueurs.

Correction de l'exercice 3 – Cas d'égalité : deux côtés et l'angle entre eux

L'angle en A est celui formé par les côtés $[AB]$ et $[AC]$: c'est bien l'angle COMPRIS entre les deux côtés donnés.

Même chose en D pour $[DE]$ et $[DF]$.

On a donc deux côtés égaux deux à deux, et l'angle compris entre eux égal.

D'après le cas d'égalité « deux côtés et l'angle compris », les triangles sont égaux.

Réponse. Oui, d'après le cas « deux côtés et l'angle compris entre eux ».

Rappel de cours. L'angle doit être COMPRIS entre les deux côtés donnés, sinon le cas ne s'applique pas.

Erreur fréquente. Utiliser un angle qui n'est pas entre les deux côtés : deux triangles différents pourraient alors convenir.

Correction de l'exercice 4 – Cas d'égalité : un côté et deux angles

Le côté est le même dans les deux triangles : 7 cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Les deux angles adjacents à ce côté sont respectivement égaux : 40° et 60°.

D'après le cas d'égalité « un côté et les deux angles qui lui sont adjacents », les triangles sont égaux.

On peut d'ailleurs calculer le troisième angle : $180 - 40 - 60 = 80°$, identique dans les deux triangles.

Réponse. Oui, d'après le cas « un côté et les deux angles adjacents ».

Rappel de cours. Trois cas d'égalité : trois côtés · deux côtés + angle compris · un côté + deux angles adjacents.

Erreur fréquente. Croire que trois angles égaux suffisent : cela ne donne que des triangles SEMBLABLES.

Correction de l'exercice 5 – Triangles semblables : définition

Deux triangles sont semblables quand l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre.

Leurs angles sont deux à deux égaux : $\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$.

Leurs côtés sont proportionnels : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$.

Ce rapport commun s'appelle le coefficient d'agrandissement (s'il est supérieur à 1) ou de réduction (s'il est inférieur à 1).

Deux triangles égaux sont un cas particulier de triangles semblables, avec un coefficient de 1.

Réponse. Ils ont les mêmes angles et des côtés proportionnels : l'un est un agrandissement de l'autre.

Rappel de cours. Semblables = même FORME · égaux = même forme ET même TAILLE.

Erreur fréquente. Croire que « semblable » signifie « égal » : la taille peut être très différente.

Correction de l'exercice 6 – Reconnaître des triangles semblables

On calcule le troisième angle de chaque triangle.

Premier : $180 - 50 - 60 = 70°$. Ses angles sont donc 50°, 60° et 70°.

Second : $180 - 70 - 50 = 60°$. Ses angles sont 50°, 60° et 70°.

Les deux triangles ont exactement les mêmes angles.

D'après le cas de similitude « deux angles égaux », ils sont semblables.

Remarque : deux angles égaux suffisent, puisque le troisième s'en déduit automatiquement.

Réponse. Oui : les deux ont des angles de 50°, 60° et 70°.

Rappel de cours. Cas de similitude le plus utilisé : deux angles égaux deux à deux.

Erreur fréquente. Comparer les angles dans l'ordre donné : il faut d'abord calculer le troisième et comparer les ENSEMBLES.

Correction de l'exercice 7 – Coefficient d'agrandissement

On divise chaque côté du grand triangle par le côté correspondant du petit.

$9 \div 3 = 3$.

$12 \div 4 = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$15 \div 5 = 3$.

Les trois quotients sont égaux : le coefficient d'agrandissement vaut 3.

C'est bien un agrandissement, puisque le coefficient est supérieur à 1.

Réponse. Le coefficient d'agrandissement vaut 3.

Rappel de cours. Le coefficient est le même pour TOUS les côtés : c'est ce qui définit la similitude.

Erreur fréquente. Soustraire les longueurs ($9 - 3 = 6$) : la similitude est multiplicative.

Correction de l'exercice 8 – Calculer une longueur

On détermine d'abord le coefficient : $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{10}{4} = 2{,}5$.

Tous les côtés du second triangle valent 2,5 fois ceux du premier.

$B'C' = 2{,}5 \times BC = 2{,}5 \times 6 = 15$ cm.

Vérification : $\frac{15}{6} = 2{,}5$, c'est bien le même coefficient. ✔

Réponse. $B'C' = 15$ cm

Rappel de cours. On calcule le coefficient sur le couple de côtés connus, puis on l'applique aux autres.

Erreur fréquente. Ajouter 6 à 10 : le passage d'un triangle à l'autre est une multiplication.

Correction de l'exercice 9 – Réduction

On multiplie chaque côté par le coefficient.

$12 \times 0{,}25 = 3$ cm.

$16 \times 0{,}25 = 4$ cm.

$20 \times 0{,}25 = 5$ cm.

Le nouveau triangle a pour côtés 3, 4 et 5 cm.

Le coefficient étant inférieur à 1, il s'agit bien d'une réduction : c'est aussi une division par 4.

Réponse. 3 cm, 4 cm et 5 cm.

Rappel de cours. Coefficient > 1 : agrandissement · coefficient < 1 : réduction.

Erreur fréquente. Soustraire 0,25 : le coefficient multiplie, il ne se retranche pas.

Correction de l'exercice 10 – Repérer les sommets correspondants

Les sommets se correspondent dans l'ordre : $A \leftrightarrow M$, $B \leftrightarrow N$, et donc $C \leftrightarrow P$.

Un côté correspond à un côté : $[AB]$ correspond à $[MN]$, car ils joignent les mêmes sommets correspondants.

De même, $[BC]$ correspond à $[NP]$, et $[AC]$ correspond à $[MP]$.

On écrit donc $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC}$.

Astuce : dans chaque fraction, on garde toujours le même triangle en haut.

Réponse. $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC}$

Rappel de cours. On repère d'abord les sommets correspondants, ENSUITE les côtés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Écrire $\frac{MN}{BC}$: ce ne sont pas des côtés correspondants.

Correction de l'exercice 11 – Effet sur les angles

Un agrandissement multiplie les LONGUEURS, mais ne modifie pas les angles.

Les angles restent donc 35°, 65° et 80°.

C'est précisément ce qui fait que les deux triangles ont la même forme.

Vérification de cohérence : 35 + 65 + 80 = 180°. ✔

Réponse. Les angles sont inchangés : 35°, 65° et 80°.

Rappel de cours. Un agrandissement conserve les angles et multiplie les longueurs.

Erreur fréquente. Multiplier les angles par 4 : on dépasserait largement 180°, ce qui est impossible.

Correction de l'exercice 12 – Effet sur le périmètre et l'aire

Le périmètre est une somme de longueurs : chaque longueur étant multipliée par 3, le périmètre l'est aussi.

Nouveau périmètre : 24 × 3 = 72 cm.

L'aire, elle, dépend de deux longueurs (base et hauteur), toutes deux multipliées par 3.

Elle est donc multipliée par 3 × 3 = 9.

Nouvelle aire : 30 × 9 = 270 cm².

Réponse. Périmètre = 72 cm (×3) et aire = 270 cm² (×9).

Rappel de cours. Longueurs $\times k$ → périmètre $\times k$ → aire $\times k^2$ → volume $\times k^3$.

Erreur fréquente. Multiplier l'aire par 3 : c'est l'erreur classique des agrandissements.

Correction de l'exercice 13 – Deux triangles dans une figure

Les deux triangles partagent l'angle en O : il est commun, donc égal.

Comme (AC) et (BD) sont parallèles et coupées par la sécante (OA), les angles $O\hat{A}C$ et $O\hat{B}D$ sont correspondants, donc égaux.

Les deux triangles ont donc deux angles égaux deux à deux.

D'après le cas de similitude « deux angles », les triangles OAC et OBD sont semblables.

Conséquence : leurs côtés sont proportionnels, ce qui donne $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{BD}{AC}$.

Réponse. Ils ont l'angle en O commun et des angles correspondants égaux (droites parallèles) : deux angles égaux suffisent.

Rappel de cours. Le parallélisme fabrique des angles égaux, donc des triangles semblables.

Erreur fréquente. Chercher des longueurs : ici, ce sont les ANGLES qui prouvent la similitude.

Correction de l'exercice 14 – Calculer avec un rapport

Les sommets correspondants sont $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$.

$[AB]$ correspond à $[DE]$, et $[AC]$ correspond à $[DF]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Coefficient : $k = \frac{DE}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

$DF = k \times AC = \frac{4}{3} \times 9$.

$\frac{4 \times 9}{3} = \frac{36}{3} = 12$ cm.

Vérification : $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, c'est bien le même rapport. ✔

Réponse. $DF = 12$ cm

Rappel de cours. Un coefficient fractionnaire se manipule comme un nombre décimal : ici $\frac{4}{3} \approx 1{,}33$.

Erreur fréquente. Utiliser $\frac{6}{8}$ au lieu de $\frac{8}{6}$: on obtiendrait une réduction au lieu d'un agrandissement.

Correction de l'exercice 15 – Triangles égaux ou seulement semblables ?

Ayant les mêmes angles, ils sont forcément SEMBLABLES.

Mais ils ne sont pas forcément égaux : la taille peut différer.

Exemple : un triangle de côtés 3, 4, 4,5 cm et un autre de côtés 6, 8, 9 cm peuvent avoir les mêmes angles.

Le second est simplement le double du premier : même forme, taille différente.

Conclusion : trois angles égaux garantissent la SIMILITUDE, jamais l'égalité.

Pour l'égalité, il faut au moins une longueur commune.

Réponse. Non : ils sont semblables, mais pas forcément égaux (l'un peut être le double de l'autre).

Rappel de cours. Les angles déterminent la forme, jamais la taille.

Erreur fréquente. Ajouter « trois angles égaux » à la liste des cas d'égalité : ce cas n'existe pas.

Correction de l'exercice 16 – L'ombre du bâtiment

Les rayons du soleil arrivent avec le même angle sur le piquet et sur le bâtiment.

Les deux triangles « objet-ombre-rayon » ont donc les mêmes angles : ils sont semblables.

Le rapport hauteur / ombre est le même dans les deux cas.

Pour le piquet : $\frac{1{,}5}{2{,}4}$.

Pour le bâtiment : $\frac{h}{20}$.

Produit en croix : $2{,}4 \times h = 1{,}5 \times 20 = 30$.

$h = 30 \div 2{,}4 = 12{,}5$ m.

Réponse. Le bâtiment mesure 12,5 m de haut.

Rappel de cours. C'est la méthode utilisée par Thalès pour mesurer la pyramide de Kheops.

Erreur fréquente. Additionner les longueurs : la similitude relie les grandeurs par un rapport constant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 17 – Démontrer une égalité de triangles

Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu O.

Donc $OA = OC$ (car O est le milieu de $[AC]$) et $OB = OD$ (car O est le milieu de $[BD]$).

Les angles $A\hat{O}B$ et $C\hat{O}D$ sont opposés par le sommet : ils sont donc égaux.

Or cet angle est COMPRIS entre les deux côtés considérés dans chaque triangle.

D’après le cas d’égalité « deux côtés et l’angle compris entre eux », les triangles AOB et COD sont égaux.

On en déduit notamment que $AB = CD$, ce qui est bien une propriété connue du parallélogramme.

Réponse. $OA = OC$, $OB = OD$ et $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ (opposés par le sommet) : les triangles sont égaux.

Rappel de cours. Les angles opposés par le sommet sont toujours égaux : c’est un argument très utile.

Erreur fréquente. Utiliser un angle qui n’est pas compris entre les deux côtés cités.

Correction de l’exercice 18 – Le triangle emboîté

Les triangles AMN et ABC partagent l’angle en A.

Comme (MN) est parallèle à (BC), les angles $A\hat{M}N$ et $A\hat{B}C$ sont correspondants, donc égaux.

Les deux triangles ont donc deux angles égaux : ils sont semblables.

Coefficient de réduction : $k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$.

Comme $[MN]$ correspond à $[BC]$: $MN = 0{,}4 \times 15 = 6$ cm.

Vérification : $\dfrac{6}{15} = 0{,}4$, c’est bien le même rapport. ✔

Réponse. $MN = 6$ cm

Rappel de cours. Cette configuration porte un nom : c’est celle du théorème de Thalès, vu en 3e.

Erreur fréquente. Utiliser $MB = 6$ cm au lieu de $AB = 10$ cm : le rapport se calcule depuis le sommet A.

Correction de l’exercice 19 – Retrouver un coefficient

L’aire est multipliée par $162 \div 18 = 9$.

Or, si les longueurs sont multipliées par k, l’aire est multipliée par k^2.

On a donc $k^2 = 9$.

On cherche le nombre positif dont le carré vaut 9 : c’est 3.

Le coefficient d’agrandissement des longueurs vaut donc 3.

Vérification : si les longueurs triplent, l’aire est bien multipliée par $3 \times 3 = 9$. ✔

Réponse. Le coefficient vaut 3.

Rappel de cours. Aire $\times k^2$: pour retrouver k, on prend la racine du rapport des aires.

Erreur fréquente. Répondre 9 : c’est le coefficient des AIRES, pas celui des longueurs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 20 – Vrai ou faux justifié

a) Deux triangles égaux ont les mêmes angles et des côtés proportionnels avec un coefficient de 1.

a) Ils vérifient donc la définition de la similitude. VRAI — l’égalité est un cas particulier de similitude.

b) Contre-exemple : un triangle de côtés 3, 4, 5 et un de côtés 6, 8, 10 sont semblables mais pas superposables. FAUX.

c) Deux côtés égaux ne suffisent pas : le troisième côté, ou l’angle entre les deux, peut varier.

c) Contre-exemple : deux triangles de côtés 5 et 6 cm peuvent avoir un angle compris de 30° pour l’un et de 90° pour l’autre — ils ne sont pas superposables. FAUX.

Réponse. a) Vrai · b) Faux · c) Faux (il manque une troisième information).

Rappel de cours. Il faut TROIS informations bien choisies pour garantir l’égalité de deux triangles.

Erreur fréquente. Inverser a) et b) : l’implication ne fonctionne que dans un sens.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).