Ensemble de définition — Seconde

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres x pour lesquels $f(x)$ existe. Deux interdits principaux : on ne divise jamais par 0, et on ne prend jamais la racine carrée d'un nombre négatif. Ces exercices corrigés couvrent les valeurs interdites, les fonctions avec quotient, avec racine, et la combinaison des deux. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/seconde/ensemble-de-definition

Exercice 1 – Fonction polynôme

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Exercice 2 – Valeur interdite d'un quotient

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Exercice 3 – Domaine d'une racine

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 4 – Une seule valeur interdite

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{4}{x+5}$.

Exercice 5 – Quotient avec valeur interdite

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-6}$.

Exercice 6 – Racine d'une expression affine

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x-3}$.

Exercice 7 – Racine d'une expression décroissante

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{6-2x}$.

Exercice 8 – Valeur interdite fractionnaire

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{x-1}{3x+2}$. Le nombre 1 est-il une valeur interdite ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Racine d'une expression affine

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{2x + 8}$.

Exercice 10 – Deux valeurs interdites

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

Exercice 11 – Quotient et signe du dénominateur

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 1}$.

Exercice 12 – Racine d'un trinôme

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

Exercice 13 – Racine au dénominateur

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 14 – Racine d'un produit

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{(x - 1)(x + 3)}$.

Exercice 15 – Volume d'une boîte sans couvercle

Dans une plaque carrée de 20 cm de côté, on découpe un carré de côté x cm à chaque coin, puis on replie les bords pour former une boîte sans couvercle. Exprimer le volume $V(x)$ et donner l'ensemble des valeurs possibles de x.

Exercice 16 – Quotient et racine

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 4}$.

Exercice 17 – Deux racines

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x + 2} + \sqrt{5 - x}$.

Exercice 18 – Domaine d'un quotient de trinômes

Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Exercice 19 – Domaine et contexte

Une fonction de coût moyen est $C(q) = \dfrac{q^2 + 100}{q}$, où q est le nombre d'objets produits. Donner l'ensemble de définition mathématique, puis celui qui a un sens dans le contexte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Deux écritures, deux ensembles

Soient $f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-2}$ et $g(x) = \sqrt{x(x-2)}$. Déterminer D_f et D_g. Les fonctions f et g sont-elles égales ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Fonction polynôme

f est un polynôme : on peut calculer $f(x)$ pour n'importe quel réel.

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Réponse. $D_f = \mathbb{R}$.

Rappel de cours. Les fonctions polynômes sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier (aucun interdit).

Correction de l'exercice 2 – Valeur interdite d'un quotient

On ne divise pas par 0 : il faut $x - 2 \neq 0$, soit $x \neq 2$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Réponse. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$.

Rappel de cours. Interdit : dénominateur nul. On exclut la (les) valeur(s) qui annule(nt) le dénominateur.

Correction de l'exercice 3 – Domaine d'une racine

On ne prend pas la racine d'un nombre négatif : il faut $x \geq 0$.

$D_f = [0 ; +\infty[$.

Réponse. $D_f = [0 ; +\infty[$.

Rappel de cours. Interdit : racine carrée d'un négatif. On impose (expression sous la racine) ≥ 0.

Correction de l'exercice 4 – Une seule valeur interdite

Un quotient n'existe que si son dénominateur est non nul : il faut $x + 5 \neq 0$, soit $x \neq -5$.

-5 est la seule valeur interdite.

Réponse. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\} =]-\infty ; -5[\cup]-5 ; +\infty[$.

Rappel de cours. On ne divise jamais par 0 : les valeurs qui annulent le dénominateur sont exclues.

Correction de l'exercice 5 – Quotient avec valeur interdite

Il faut $2x - 6 \neq 0$, soit $2x \neq 6$, donc $x \neq 3$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Réponse. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Rappel de cours. On cherche où le dénominateur s'annule en résolvant (dénominateur) $= 0$.

Correction de l'exercice 6 – Racine d'une expression affine

Il faut $x - 3 \geq 0$, soit $x \geq 3$.

$D_f = [3 ; +\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $D_f = [3; +\infty[$.

Rappel de cours. Racine : on résout (expression sous la racine) ≥ 0. Ici une inéquation du premier degré.

Correction de l'exercice 7 – Racine d'une expression décroissante

Il faut $6 - 2x \geq 0$, soit $6 \geq 2x$, donc $x \leq 3$.

$D_f =]-\infty; 3]$.

Réponse. $D_f =]-\infty; 3]$.

Rappel de cours. En divisant par -2 (négatif), le sens de l'inégalité change : $-2x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Erreur fréquente. Diviser par un nombre négatif inverse l'inégalité.

Correction de l'exercice 8 – Valeur interdite fractionnaire

On résout $3x + 2 = 0$: $x = -\dfrac{2}{3}$. C'est l'unique valeur interdite.

1 annule le numérateur ($f(1) = 0$), ce qui est autorisé : seul le dénominateur compte.

Réponse. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$; 1 n'est pas interdit ($f(1) = 0$).

Rappel de cours. Un numérateur nul donne un quotient nul ; seul un dénominateur nul est interdit.

Correction de l'exercice 9 – Racine d'une expression affine

Une racine carrée n'existe que pour un nombre positif ou nul : il faut $2x + 8 \geq 0$.

$2x \geq -8 \Leftrightarrow x \geq -4$ (on divise par $2 > 0$, le sens ne change pas).

Réponse. $D_f = [-4\,; +\infty[$.

Rappel de cours. $\sqrt{A}$ existe si et seulement si $A \geq 0$. La borne est incluse (crochet fermé) car $\sqrt{0} = 0$.

Correction de l'exercice 10 – Deux valeurs interdites

Il faut $x^2 - 4 \neq 0$, soit $x^2 \neq 4$, donc $x \neq 2$ et $x \neq -2$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\,; 2\}$.

Réponse. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\,; 2\}$.

Rappel de cours. Un dénominateur du second degré peut avoir deux racines : on les exclut toutes les deux.

Correction de l'exercice 11 – Quotient et signe du dénominateur

On cherche où $x^2 + 1 = 0$, soit $x^2 = -1$: impossible (un carré est positif).

Le dénominateur ne s'annule jamais : $D_f = \mathbb{R}$.

Réponse. $D_f = \mathbb{R}$.

Rappel de cours. $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ toujours : aucune valeur interdite, le domaine est $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 12 – Racine d'un trinôme

Il faut $x^2 - 9 \geq 0$. Racines ± 3, $a = 1 > 0$: positif à l'extérieur.

$x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ou $x \geq 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$D_f =]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$.

Réponse. $D_f =]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$.

Rappel de cours. Domaine d'une racine de trinôme : on résout l'inéquation du second degré (expression) ≥ 0.

Correction de l'exercice 13 – Racine au dénominateur

Deux conditions : la racine impose $x \geq 0$, et le dénominateur impose $\sqrt{x} \neq 0$, soit $x \neq 0$.

En combinant : $x > 0$.

$D_f =]0 ; +\infty[$.

Réponse. $D_f =]0 ; +\infty[$.

Rappel de cours. Racine AU dénominateur : on cumule $x \geq 0$ (racine) et $x \neq 0$ (division), d'où $x > 0$.

Erreur fréquente. Ici 0 est exclu : non seulement à cause de la racine, mais surtout car il annulerait le dénominateur.

Correction de l'exercice 14 – Racine d'un produit

Il faut $(x-1)(x+3) \geq 0$. On dresse le tableau de signes du produit.

$x - 1$ s'annule en 1 (négatif avant, positif après) ; $x + 3$ s'annule en -3 (négatif avant, positif après).

Produit : positif sur $]-\infty ; -3[$, négatif sur $]-3 ; 1[$, positif sur $]1 ; +\infty[$, nul en -3 et 1.

On garde les valeurs où le produit est positif ou nul.

Réponse. $D_f =]-\infty ; -3] \cup [1 ; +\infty[$.

Rappel de cours. Le signe d'un produit se lit dans un tableau de signes : règle des signes colonne par colonne.

Erreur fréquente. $x \geq 1$ seul est incomplet : pour $x \leq -3$, les deux facteurs sont négatifs et leur produit est positif.

Correction de l'exercice 15 – Volume d'une boîte sans couvercle

Le fond de la boîte est un carré de côté $20 - 2x$ (on retire x de chaque côté), et la hauteur est x.

$V(x) = x(20 - 2x)^2$.

Contraintes concrètes : $x > 0$ (sinon pas de bord) et $20 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 10$ (sinon pas de fond).

Réponse. $V(x) = x(20 - 2x)^2$, défini pour $x \in]0 ; 10[$.

Rappel de cours. Dans un problème concret, l'ensemble de définition vient aussi du contexte, pas seulement de la formule.

Erreur fréquente. La formule a un sens pour tout réel, mais une longueur négative ou un fond de côté nul n'ont pas de sens physique.

Correction de l'exercice 16 – Quotient et racine

Condition de la racine : $x - 1 \geq 0$, soit $x \geq 1$.

Condition du dénominateur : $x - 4 \neq 0$, soit $x \neq 4$.

On combine : $x \geq 1$ et $x \neq 4$, donc $D_f = [1 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $D_f = [1;4[\cup]4;+\infty[$.

Rappel de cours. Quand il y a racine ET quotient, on impose les deux conditions et on prend leur intersection.

Correction de l'exercice 17 – Deux racines

Première racine : $x + 2 \geq 0$, soit $x \geq -2$.

Seconde racine : $5 - x \geq 0$, soit $x \leq 5$.

Les deux conditions doivent être vraies en même temps : $-2 \leq x \leq 5$.

$D_f = [-2;5]$.

Réponse. $D_f = [-2;5]$.

Rappel de cours. Plusieurs racines : chaque expression sous racine doit être ≥ 0 ; le domaine est l'intersection (un intervalle commun).

Correction de l'exercice 18 – Domaine d'un quotient de trinômes

On cherche les racines du dénominateur : $x^2 - 3x + 2 = 0$. Somme 3, produit 2 : racines 1 et 2.

Le dénominateur s'annule en 1 et 2, qu'il faut exclure.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\,;2\}$.

Réponse. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\,;2\}$.

Rappel de cours. On factorise ou on résout le dénominateur pour repérer toutes les valeurs interdites.

Correction de l'exercice 19 – Domaine et contexte

Mathématiquement, il faut $q \neq 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dans le contexte, q est un nombre d'objets, donc $q > 0$ (on produit au moins un objet).

L'ensemble de définition contextuel est $]0;+\infty[$.

Réponse. Math : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; contexte : $]0;+\infty[$.

Rappel de cours. Le contexte (longueur, quantité, durée…) restreint souvent le domaine aux valeurs positives ou réalistes.

Correction de l'exercice 20 – Deux écritures, deux ensembles

f : il faut à la fois $x \geq 0$ et $x - 2 \geq 0$, soit $x \geq 2$. $D_f = [2\,;+\infty[$.

g : il faut $x(x-2) \geq 0$. Tableau de signes : produit positif ou nul pour $x \leq 0$ ou $x \geq 2$. $D_g =]-\infty\,;0] \cup [2\,;+\infty[$.

Sur $[2\,;+\infty[$, $f(x) = g(x)$ (car $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ pour $a, b \geq 0$). Mais $g(-1) = \sqrt{3}$ existe alors que $f(-1)$ n'existe pas.

Réponse. $D_f = [2\,;+\infty[$, $D_g =]-\infty\,;0] \cup [2\,;+\infty[$: $f \neq g$, elles n'ont pas le même ensemble de définition.

Rappel de cours. Deux fonctions sont égales si elles ont le même ensemble de définition et les mêmes images en tout point.

Erreur fréquente. La règle $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ n'est valable que pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).