Fonction carré — Seconde

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La fonction carré $f(x) = x^2$ a pour courbe une parabole, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Elle est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum 0 en 0. Ces exercices corrigés couvrent images, variations, comparaisons, résolutions et lecture graphique. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/seconde/fonction-carre

Exercice 1 – Calculer des images

Soit $f(x) = x^2$. Calculer $f(3)$, $f(-3)$ et $f(0{,}5)$.

Exercice 2 – Variations

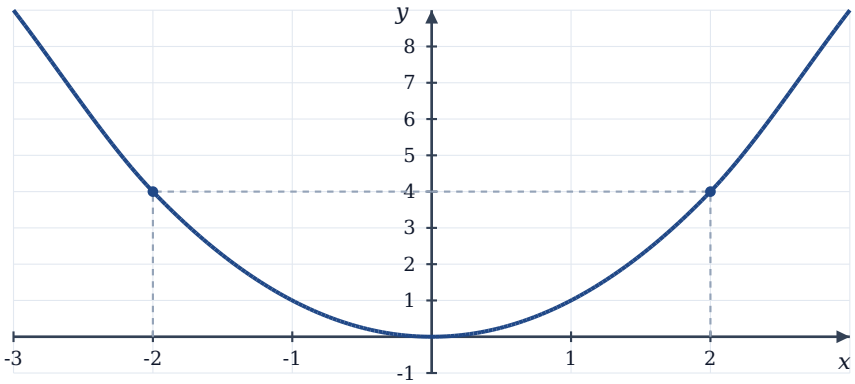
Donner le sens de variation de la fonction carré sur $]-\infty ; 0]$ puis sur $[0 ; +\infty[$.

Exercice 3 – Des points sur la parabole ?

Les points $A(-3\,;9)$, $B(1{,}5\,;2{,}5)$ et $C(\sqrt{2}\,;2)$ sont-ils sur la courbe de la fonction carré ?

Exercice 4 – Lecture de la parabole

La courbe ci-dessous est celle de $f(x) = x^2$. Lire $f(2)$ et donner les antécédents de 4.



Exercice 5 – Comparer sans calculatrice

Comparer $f(2)$ et $f(2{,}5)$, puis $f(-4)$ et $f(-2)$ (avec $f(x) = x^2$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Résoudre x² = k

Résoudre $x^2 = 25$ et $x^2 = 7$.

Exercice 7 – Équation sans solution

Résoudre $x^2 = -4$.

Exercice 8 – Nombres opposés, même carré

Calculer $f(7)$ et $f(-7)$ avec $f(x) = x^2$. Démontrer que $f(-x) = f(x)$ pour tout x et en déduire une symétrie de la parabole.

Exercice 9 – Inéquation x² ≤ k

Résoudre $x^2 \leq 9$.

Exercice 10 – Inéquation x² ≥ k

Résoudre $x^2 > 16$.

Exercice 11 – Image d'un intervalle

Si $1 \leq x \leq 3$, encadrer x^2.

Exercice 12 – Encadrement avec négatifs

Si $-3 \leq x \leq -1$, encadrer x^2.

Exercice 13 – Encadrement à cheval sur 0

On sait que $-2 \leq x \leq 3$. Encadrer x^2 le plus précisément possible.

Exercice 14 – Équation et inéquation avec un carré

Résoudre $(x-1)^2 = 9$, puis $(2x+1)^2 < 25$.

Exercice 15 – Aire d'un carré

Un carré a une aire de 50 cm^2. Quelle est la longueur de son côté (valeur exacte puis approchée) ?

Exercice 16 – Comparaison fine

Comparer $(\sqrt{2}+1)^2$ et 4 sans calculatrice.

Exercice 17 – Résolution graphique

En s'aidant de la parabole $y = x^2$ et de la droite $y = x + 2$, résoudre $x^2 = x + 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Minimum d’une expression

Montrer que $(x-3)^2 + 2 \geq 2$ pour tout réel x, et préciser le minimum.

Exercice 19 – Parabole et droite : intersection et position

Soit P la parabole $y = x^2$ et d la droite $y = 2x + 3$.

1. Déterminer les points d’intersection de P et d.

2. Sur quel intervalle la parabole est-elle en dessous de la droite ?

Exercice 20 – Quand le carré est-il plus petit que le nombre ?

Pour quels réels x a-t-on $x^2 < x$? Interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des images

$f(3) = 3^2 = 9$.

$f(-3) = (-3)^2 = 9$.

$f(0{,}5) = 0{,}5^2 = 0{,}25$.

Réponse. $f(3) = 9$, $f(-3) = 9$, $f(0{,}5) = 0{,}25$.

Rappel de cours. $f(x) = x^2$. Deux nombres opposés ont la même image : $f(-3) = f(3)$.

Correction de l'exercice 2 – Variations

Sur $]-\infty ; 0]$, la fonction carré est décroissante.

Sur $[0 ; +\infty[$, elle est croissante.

Elle admet un minimum 0 en $x = 0$.

Réponse. Décroissante sur $]-\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$, minimum 0 en 0.

Rappel de cours. La parabole $y = x^2$ « descend » puis « monte » : minimum au sommet $(0 ; 0)$.

Correction de l'exercice 3 – Des points sur la parabole ?

Un point $(x ; y)$ est sur la parabole si et seulement si $y = x^2$.

A : $(-3)^2 = 9$, oui. B : $1{,}5^2 = 2{,}25 \neq 2{,}5$, non. C : $(\sqrt{2})^2 = 2$, oui.

Réponse. A et C sont sur la parabole, B non.

Rappel de cours. Courbe de la fonction carré : $y = x^2$.

Correction de l'exercice 4 – Lecture de la parabole

Pour $f(2)$: on monte de $x = 2$ jusqu'à la courbe, on lit $f(2) = 4$.

Les antécédents de 4 sont les abscisses où la courbe est à hauteur 4 : $x = -2$ et $x = 2$.

Réponse. $f(2) = 4$; antécédents de 4 : -2 et 2.

Rappel de cours. La parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : une même hauteur correspond à deux abscisses opposées.

Correction de l'exercice 5 – Comparer sans calculatrice

Sur $[0 ; +\infty[$, f est croissante : $2 < 2{,}5$ donne $f(2) < f(2{,}5)$.

Sur $]-\infty ; 0]$, f est décroissante : $-4 < -2$ donne $f(-4) > f(-2)$.

Réponse. $f(2) < f(2{,}5)$; $f(-4) > f(-2)$.

Rappel de cours. On utilise le sens de variation : sur les négatifs, plus x est petit, plus son carré est grand.

Erreur fréquente. Sur les négatifs, l'ordre s'inverse : $-4 < -2$ mais $f(-4) = 16 > f(-2) = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Résoudre x² = k

$x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

$x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$.

Réponse. $x = \pm 5$; $x = \pm\sqrt{7}$.

Rappel de cours. $x^2 = k$ ($k > 0$) a deux solutions $\pm\sqrt{k}$.

Correction de l'exercice 7 – Équation sans solution

Un carré est toujours positif ou nul, donc $x^2 \geq 0$ pour tout x.

$x^2 = -4$ est impossible : pas de solution réelle.

Réponse. $S = \varnothing$.

Rappel de cours. $x^2 \geq 0$ toujours : une équation $x^2 = k$ avec $k < 0$ n'a pas de solution.

Correction de l'exercice 8 – Nombres opposés, même carré

$f(7) = 49$ et $f(-7) = 49$.

Pour tout réel x : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$: deux nombres opposés ont la même image.

Les points $(x\,;x^2)$ et $(-x\,;x^2)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : la parabole admet cet axe comme axe de symétrie.

Réponse. $f(7) = f(-7) = 49$; la parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Rappel de cours. $(-x)^2 = x^2$: les points $(x\,;x^2)$ et $(-x\,;x^2)$ sont symétriques par rapport à (Oy).

Correction de l'exercice 9 – Inéquation x² ≤ k

$x^2 \leq 9$ signifie que x est « entre » -3 et 3 (la parabole est sous la hauteur 9 entre ces valeurs).

$x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Réponse. $S = [-3;3]$.

Rappel de cours. $x^2 \leq k$ ($k > 0$) $\Leftrightarrow -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$.

Correction de l'exercice 10 – Inéquation x² ≥ k

$x^2 > 16$ correspond aux x « à l'extérieur » de $[-4;4]$.

$x^2 > 16 \Leftrightarrow x < -4$ ou $x > 4$.

Réponse. $S =]-\infty;-4[\cup]4;+\infty[$.

Rappel de cours. $x^2 > k$ ($k > 0$) $\Leftrightarrow x < -\sqrt{k}$ ou $x > \sqrt{k}$ (à l'extérieur des racines).

Correction de l'exercice 11 – Image d'un intervalle

Sur $[1;3]$, la fonction carré est croissante : elle conserve l'ordre.

$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow 1^2 \leq x^2 \leq 3^2$, soit $1 \leq x^2 \leq 9$.

Réponse. $1 \leq x^2 \leq 9$.

Rappel de cours. Sur un intervalle où f est croissante, $a \leq x \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Encadrement avec négatifs

Sur $[-3;-1]$ (négatifs), la fonction carré est décroissante : elle inverse l'ordre.

$-3 \leq x \leq -1 \Rightarrow (-1)^2 \leq x^2 \leq (-3)^2$, soit $1 \leq x^2 \leq 9$.

Réponse. $1 \leq x^2 \leq 9$.

Rappel de cours. Sur les négatifs, f décroît : les bornes « s'échangent » ($x = -1$ donne la plus petite image).

Erreur fréquente. Ne pas écrire $9 \leq x^2 \leq 1$: on remet toujours la plus petite valeur à gauche.

Correction de l'exercice 13 – Encadrement à cheval sur 0

La fonction carré n'est pas monotone sur $[-2\,;3]$: décroissante sur $[-2\,;0]$, croissante sur $[0\,;3]$. On traite les deux morceaux.

Sur $[-2\,;0]$: x^2 va de 4 à 0, donc $0 \leq x^2 \leq 4$.

Sur $[0\,;3]$: x^2 va de 0 à 9, donc $0 \leq x^2 \leq 9$.

En réunissant : $0 \leq x^2 \leq 9$. Le minimum 0 est atteint en $x = 0$.

Réponse. $0 \leq x^2 \leq 9$.

Rappel de cours. Pour encadrer une image, on utilise les variations sur chaque intervalle où la fonction est monotone.

Erreur fréquente. Élever les bornes au carré donne $4 \leq x^2 \leq 9$, qui est faux : pour $x = 0$, $x^2 = 0$.

Correction de l'exercice 14 – Équation et inéquation avec un carré

$(x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -2$.

$X^2 < 25 \Leftrightarrow -5 < X < 5$ (les nombres dont le carré est inférieur à 25 sont entre -5 et 5).

Avec $X = 2x + 1$: $-5 < 2x + 1 < 5 \Leftrightarrow -6 < 2x < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Réponse. $\{-2\,;4\}$; $]-3\,;2[$.

Rappel de cours. $X^2 < k$ (avec $k > 0$) $\Leftrightarrow -\sqrt{k} < X < \sqrt{k}$.

Erreur fréquente. $X^2 < 25$ ne donne pas « $X < 5$ » seulement : $X = -6$ vérifie $X < 5$ mais $X^2 = 36$.

Correction de l'exercice 15 – Aire d'un carré

Si c est le côté, l'aire est $c^2 = 50$, avec $c > 0$.

$c = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm.

Réponse. $c = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ cm.

Rappel de cours. On garde la solution positive (une longueur). $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ en simplifiant la racine.

Correction de l'exercice 16 – Comparaison fine

On développe : $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$, donc $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ et $3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}83$.

$5{,}83 > 4$: donc $(\sqrt{2}+1)^2 > 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2} > 4$.

Rappel de cours. On développe avec l'identité $(a+b)^2$, en utilisant $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Correction de l'exercice 17 – Résolution graphique

On résout l'équation : $x^2 - x - 2 = 0$, qui se factorise en $(x-2)(x+1) = 0$.

Solutions : $x = 2$ ou $x = -1$. Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole et de la droite.

Réponse. $S = \{-1\,;2\}$.

Rappel de cours. Résoudre $x^2 = x + 2$ = trouver les abscisses où parabole et droite se croisent.

Correction de l'exercice 18 – Minimum d'une expression

$(x-3)^2$ est un carré, donc $(x-3)^2 \geq 0$.

En ajoutant 2 : $(x-3)^2 + 2 \geq 2$.

Le minimum 2 est atteint quand $(x-3)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$.

Réponse. Minimum 2 atteint en $x = 3$.

Rappel de cours. Un carré est toujours ≥ 0 : $(x-a)^2 + b \geq b$, avec égalité (minimum) en $x = a$.

Correction de l'exercice 19 – Parabole et droite : intersection et position

1) $x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$. On vérifie que $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ (développer : $x^2 + x - 3x - 3$).

Donc $x = 3$ ou $x = -1$, et les points sont $(3\,;9)$ et $(-1\,;1)$.

2) P est en dessous de d quand $x^2 < 2x + 3$, soit $(x-3)(x+1) < 0$.

Tableau de signes : le produit est négatif entre les racines. Intervalle : $]-1\,;3[$.

Réponse. Intersections $(-1\,;1)$ et $(3\,;9)$; parabole sous la droite sur $]-1\,;3[$.

Rappel de cours. Position relative de deux courbes : on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

Correction de l'exercice 20 – Quand le carré est-il plus petit que le nombre ?

$x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0$.

Tableau de signes : x s'annule en 0, $x - 1$ en 1. Le produit est négatif sur $]0\,;1[$.

Interprétation : élever au carré un nombre strictement compris entre 0 et 1 le rend plus petit ($0{,}5^2 = 0{,}25$). Pour $x > 1$, le carré est plus grand ; pour $x < 0$, le carré est positif donc plus grand que x.

Réponse. $x^2 < x \Leftrightarrow x \in]0\,;1[$.

Rappel de cours. « Le carré est toujours plus grand » est faux : c'est vrai seulement hors de $[0\,;1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).