Fonction inverse — Seconde

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie pour $x \neq 0$. Sa courbe est une hyperbole, décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$. Ces exercices corrigés couvrent images, domaine, variations, comparaisons, équations et inéquations, et lecture graphique. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/seconde/fonction-inverse

Exercice 1 – Calculer des images

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer $f(2)$, $f(0{,}5)$ et $f(-4)$.

Exercice 2 – Domaine de définition

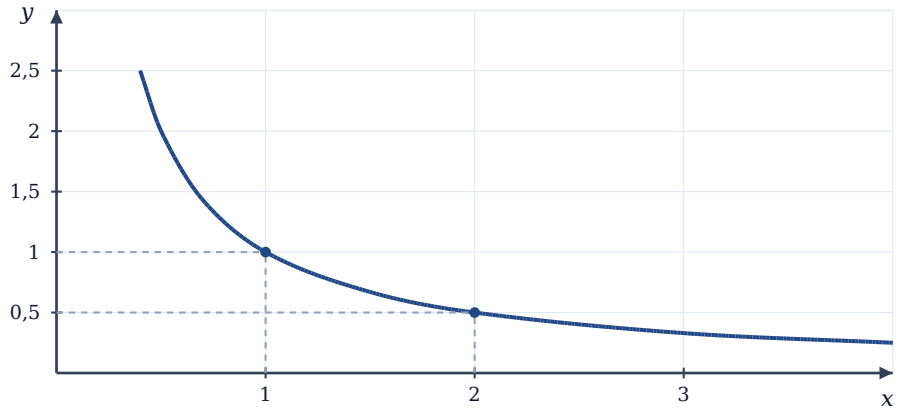
Donner l'ensemble de définition de la fonction inverse.

Exercice 3 – Inverses de fractions et de décimaux

Calculer l'inverse de $\frac{2}{3}$, de $0{,}25$ et de $-0{,}1$.

Exercice 4 – Lecture de l'hyperbole

La courbe ci-dessous représente $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$. Lire $f(1)$ et $f(2)$, et donner l'antécédent de 2.



Exercice 5 – Variations

Donner le sens de variation de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$ et sur $]-\infty ; 0[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Comparer des inverses

Comparer $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$, puis $\frac{1}{-2}$ et $\frac{1}{-4}$.

Exercice 7 – Résoudre 1/x = k

Résoudre $\frac{1}{x} = 4$ puis $\frac{1}{x} = -2$.

Exercice 8 – Des points sur l'hyperbole ?

Les points $A(4\,;0{,}25)$, $B(-0{,}5\,;-2)$ et $C(3\,;0{,}33)$ appartiennent-ils à la courbe de la fonction inverse ?

Exercice 9 – Encadrer l'inverse de nombres négatifs

On sait que $-4 \leq x \leq -2$. Encadrer $\frac{1}{x}$.

Exercice 10 – Inéquation 1/x < k

Résoudre $\frac{1}{x} > 2$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 11 – Image d'un intervalle

Si $2 \leq x \leq 5$, encadrer $\frac{1}{x}$.

Exercice 12 – Équation se ramenant à l'inverse

Résoudre $\frac{2}{x} = \frac{1}{3}$ ($x \neq 0$).

Exercice 13 – Signe de la fonction inverse

Étudier le signe de $\frac{1}{x}$ selon x.

Exercice 14 – Résistances en parallèle

Deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle équivalent à une résistance R telle que $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Calculer R pour $R_1 = 6\ \Omega$ et $R_2 = 3\ \Omega$. Comparer R à R_1 et à R_2.

Exercice 15 – Un encadrement impossible

Léa écrit : « si $-1 \leq x \leq 2$, alors $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -1$ ». Expliquer pourquoi c'est faux et décrire les valeurs prises par $\frac{1}{x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Vitesse moyenne

On parcourt 60 km. Le temps de trajet (en h) est $t(v) = \dfrac{60}{v}$, où v est la vitesse (km/h). 1) Calculer $t(40)$. 2) Quelle vitesse pour mettre 1,5 h ?

Exercice 17 – Inéquation des deux côtés de 0

Résoudre $\dfrac{1}{x} < 3$ sur $]-\infty ; 0[$.

Exercice 18 – Comparer x et 1/x

Pour $x > 0$, comparer x et $\dfrac{1}{x}$ selon les valeurs de x (on étudiera $x - \dfrac{1}{x}$).

Exercice 19 – Résolution graphique

En s'appuyant sur les courbes de $\dfrac{1}{x}$ et de $y = x$, résoudre $\dfrac{1}{x} = x$ pour $x > 0$.

Exercice 20 – Inéquation 1/x ≥ −1

Résoudre $\dfrac{1}{x} \geq -1$ sur $\mathbb{R}^*$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des images

$f(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

$f(0{,}5) = \frac{1}{0{,}5} = 2$.

$f(-4) = \frac{1}{-4} = -0{,}25$.

Réponse. $f(2) = 0{,}5$, $f(0{,}5) = 2$, $f(-4) = -0{,}25$.

Rappel de cours. $f(x) = \frac{1}{x}$. L'inverse d'un nombre entre 0 et 1 est plus grand que 1.

Correction de l'exercice 2 – Domaine de définition

On ne divise pas par 0 : la fonction inverse est définie pour tout $x \neq 0$.
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Réponse. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

Rappel de cours. $\frac{1}{x}$ n'existe pas en 0 : 0 est la valeur interdite.

Correction de l'exercice 3 – Inverses de fractions et de décimaux

L'inverse d'une fraction s'obtient en échangeant numérateur et dénominateur : $\frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$.

$0{,}25 = \frac{1}{4}$, donc son inverse est 4.

$-0{,}1 = -\frac{1}{10}$, donc son inverse est -10.

Réponse. $\frac{3}{2}$, 4 et -10.

Rappel de cours. L'inverse de $x \neq 0$ est le nombre $\frac{1}{x}$ tel que $x \times \frac{1}{x} = 1$. Il a le même signe que x.

Erreur fréquente. Ne pas confondre inverse ($\frac{1}{x}$) et opposé ($-x$).

Correction de l'exercice 4 – Lecture de l'hyperbole

$f(1) = \frac{1}{1} = 1$ (on lit la hauteur de la courbe en $x = 1$).

$f(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

L'antécédent de 2 est le x tel que $f(x) = 2$: on lit $x = 0{,}5$ (car $\frac{1}{0{,}5} = 2$).

Réponse. $f(1) = 1$, $f(2) = 0{,}5$; antécédent de 2 : 0,5.

Rappel de cours. Plus x augmente, plus $\frac{1}{x}$ diminue : la courbe descend vers l'axe des abscisses sans le toucher.

Correction de l'exercice 5 – Variations

La fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Elle est aussi décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Attention : elle n'est PAS décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tout entier (saut en 0).

Réponse. Décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ (séparément).

Rappel de cours. La fonction inverse décroît sur chacun des deux intervalles, mais pas « à travers » 0.

Erreur fréquente. Ne pas dire « décroissante sur $\mathbb{R}^*$ » : $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, donc f « remonte » en passant de -1 à 1.

Correction de l'exercice 6 – Comparer des inverses

Sur $]0 ; +\infty[$, f décroît : $3 < 5$ donne $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$.

Sur $]-\infty ; 0[$, f décroît aussi : $-4 < -2$ donne $\frac{1}{-4} > \frac{1}{-2}$, c'est-à-dire $-0{,}25 > -0{,}5$.

Réponse. $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$; $\frac{1}{-2} < \frac{1}{-4}$.

Rappel de cours. Pour des positifs, plus le nombre est grand, plus son inverse est petit.

Correction de l'exercice 7 – Résoudre 1/x = k

$\frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow 1 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow 1 = -2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Réponse. $x = \frac{1}{4}$; $x = -\frac{1}{2}$.

Rappel de cours. $\frac{1}{x} = k$ ($k \neq 0$) donne $x = \frac{1}{k}$. On multiplie par x puis on isole.

Correction de l'exercice 8 – Des points sur l'hyperbole ?

Le point $(x\,;y)$ est sur l'hyperbole si et seulement si $y = \frac{1}{x}$.

A : $\frac{1}{4} = 0{,}25$, oui. B : $\frac{1}{-0{,}5} = -2$, oui.

C : $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \neq 0{,}33$. C n'est pas sur la courbe, même s'il en est très proche.

Réponse. A et B sont sur l'hyperbole, C non.

Rappel de cours. Une valeur arrondie n'est pas égale à la valeur exacte.

Correction de l'exercice 9 – Encadrer l'inverse de nombres négatifs

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$, et $[-4\,;-2]$ est inclus dans cet intervalle : elle inverse l'ordre.

$-4 \leq x \leq -2 \Rightarrow \frac{1}{-2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{-4}$, soit $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$.

Réponse. $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$.

Rappel de cours. Fonction décroissante sur un intervalle : l'ordre des images est inversé.

Erreur fréquente. Vérifier sur un exemple : $x = -3$ donne $\frac{1}{x} \approx -0{,}33$, bien entre $-0{,}5$ et $-0{,}25$.

Correction de l'exercice 10 – Inéquation 1/x < k

Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$. On multiplie par $x > 0$ (sens conservé) : $1 > 2x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$x < \frac{1}{2}$. En tenant compte de $x > 0$: $0 < x < \frac{1}{2}$.

Réponse. $S =]0; \frac{1}{2}[$.

Rappel de cours. Multiplier par $x > 0$ ne change pas le sens. On combine avec le domaine $x > 0$.

Erreur fréquente. On ne peut multiplier par x sans précaution que si on connaît son signe (ici $x > 0$).

Correction de l'exercice 11 – Image d'un intervalle

Sur $[2; 5]$, f est décroissante : elle inverse l'ordre.

$2 \leq x \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

Réponse. $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

Rappel de cours. Fonction décroissante : les bornes s'échangent ($x = 2$ donne la plus grande image $\frac{1}{2}$).

Correction de l'exercice 12 – Équation se ramenant à l'inverse

Produit en croix : $2 \times 3 = 1 \times x$, donc $x = 6$.

$x = 6 \neq 0$: convient.

Réponse. $x = 6$.

Rappel de cours. Égalité de deux quotients : produit en croix (sans oublier la valeur interdite $x \neq 0$).

Correction de l'exercice 13 – Signe de la fonction inverse

$\frac{1}{x}$ a le même signe que x.

$\frac{1}{x} > 0$ si $x > 0$, $\frac{1}{x} < 0$ si $x < 0$, non définie en 0.

Réponse. $\frac{1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$, < 0 sur $]-\infty; 0[$.

Rappel de cours. L'inverse conserve le signe : positif pour $x > 0$, négatif pour $x < 0$.

Correction de l'exercice 14 – Résistances en parallèle

$\frac{1}{R} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

R est l'inverse de $\frac{1}{2}$: $R = 2\ \Omega$.

$R = 2$ est plus petit que $R_1 = 6$ et que $R_2 = 3$. En effet $\frac{1}{R} > \frac{1}{R_2}$, et la fonction inverse est décroissante sur $]0\,; +\infty[$, donc $R < R_2$ (de même $R < R_1$).

Réponse. $R = 2\ \Omega$, plus petit que chacune des deux résistances.

Rappel de cours. Sur $]0\,; +\infty[$, si $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ alors $a < b$ (la fonction inverse renverse l'ordre).

Erreur fréquente. $\frac{1}{R} = \frac{1}{2}$ ne donne pas $R = \frac{1}{2}$: il faut encore prendre l'inverse.

Correction de l'exercice 15 – Un encadrement impossible

L'intervalle $[-1\,; 2]$ contient 0, où $\frac{1}{x}$ n'existe pas. De plus la fonction inverse n'est pas monotone sur un intervalle qui contient 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'encadrement proposé est d'ailleurs absurde : $\frac{1}{2} \leq -1$ est faux.

Sur $[-1\,;0[$, $\frac{1}{x}$ prend toutes les valeurs de $]-\infty\,;-1]$. Sur $]0\,;2]$, toutes les valeurs de $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Réponse. On ne peut pas encadrer $\frac{1}{x}$: ses valeurs sont dans $]-\infty\,;-1] \cup \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Rappel de cours. Les variations de la fonction inverse s'utilisent séparément sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

Erreur fréquente. Près de 0, $\frac{1}{x}$ devient très grand en valeur absolue : aucun encadrement n'est possible.

Correction de l'exercice 16 – Vitesse moyenne

$t(40) = \dfrac{60}{40} = 1{,}5$ h.

On résout $\dfrac{60}{v} = 1{,}5 : 60 = 1{,}5v$, donc $v = \dfrac{60}{1{,}5} = 40$ km/h.

Réponse. $t(40) = 1{,}5$ h ; pour 1,5 h il faut 40 km/h.

Rappel de cours. Le temps est inversement proportionnel à la vitesse : $t = \frac{d}{v}$, une fonction inverse (à d fixé).

Correction de l'exercice 17 – Inéquation des deux côtés de 0

Sur $]-\infty;0[$, $\frac{1}{x} < 0$ (l'inverse d'un négatif est négatif).

Or $0 < 3$, donc $\frac{1}{x} < 0 < 3$ est toujours vrai pour $x < 0$.

L'inéquation est vérifiée pour tout $x < 0$.

Réponse. $S =]-\infty;0[$.

Rappel de cours. Sur les négatifs, $\frac{1}{x}$ est négatif, donc automatiquement inférieur à tout nombre positif.

Erreur fréquente. On ne multiplie pas par $x < 0$ sans inverser le sens ; ici un raisonnement sur le signe suffit.

Correction de l'exercice 18 – Comparer x et 1/x

$x - \frac{1}{x} = \dfrac{x^2-1}{x} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$. Pour $x > 0$, $x+1 > 0$ et $x > 0$.

Le signe est celui de $x-1$: si $0 < x < 1$, $x - \frac{1}{x} < 0$ donc $x < \frac{1}{x}$; si $x > 1$, $x > \frac{1}{x}$; égalité en $x = 1$.

Réponse. $0 < x < 1$: $x < \frac{1}{x}$; $x = 1$: égalité ; $x > 1$: $x > \frac{1}{x}$.

Rappel de cours. Comparer deux expressions = étudier le signe de leur différence (ici en la factorisant).

Correction de l'exercice 19 – Résolution graphique

$\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow 1 = x^2$ (en multipliant par $x > 0$), soit $x^2 = 1$.

Pour $x > 0$, la seule solution est $x = 1$ (point d'intersection des deux courbes).

Réponse. $x = 1$.

Rappel de cours. $\frac{1}{x} = x$ revient à $x^2 = 1$. Pour $x > 0$, on garde $x = 1$; les courbes se

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

croisent en $(1;1)$.

Correction de l’exercice 20 – Inéquation 1/x ≥ −1

Cas $x > 0$: $\frac{1}{x} > 0 > -1$. Tous les réels strictement positifs sont solutions.

Cas $x < 0$: on ramène à 0. $\frac{1}{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} \geq 0$. Comme $x < 0$, il faut $1 + x \leq 0$, soit $x \leq -1$.

Contrôle : $x = -2$ donne $-0{,}5 \geq -1$, vrai ; $x = -0{,}5$ donne $-2 \geq -1$, faux.

Réponse. $S =]-\infty\,;-1] \cup]0\,;+\infty[$.

Rappel de cours. Avec $\frac{1}{x}$, on distingue toujours les cas $x > 0$ et $x < 0$.

Erreur fréquente. Écrire « $1 \geq -x$ donc $x \geq -1$ » en multipliant par x sans regarder son signe est faux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).