Généralités sur les fonctions — Seconde

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une fonction f associe à chaque nombre x une unique image $f(x)$. On apprend à calculer une image, à lire un graphique (image, antécédent, variations), à dresser un tableau de variations et à repérer les extremums. Ces exercices corrigés couvrent tout le programme de Seconde sur les généralités. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/seconde/fonctions-generalites

Exercice 1 – Calculer des images

Soit $f(x) = x^2 - 3$. Calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(-1)$.

Exercice 2 – Vocabulaire image / antécédent

Soit f telle que $f(3) = 7$. Compléter : « 7 est l'… de 3 » et « 3 est un … de 7 ».

Exercice 3 – Tester une égalité d'image

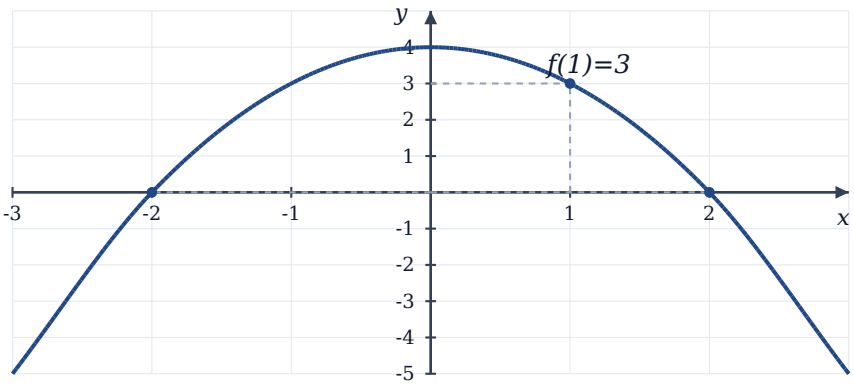
Soit $f(x) = 2x + 1$. Le nombre 5 est-il l'image de 2 par f ?

Exercice 4 – Une fonction définie par un programme

Programme : « choisir un nombre x, calculer son carré, puis ajouter le triple du nombre de départ ». On note $f(x)$ le résultat. Exprimer $f(x)$, puis calculer $f(-2)$ et $f(0{,}5)$.

Exercice 5 – Lecture graphique : image et antécédents

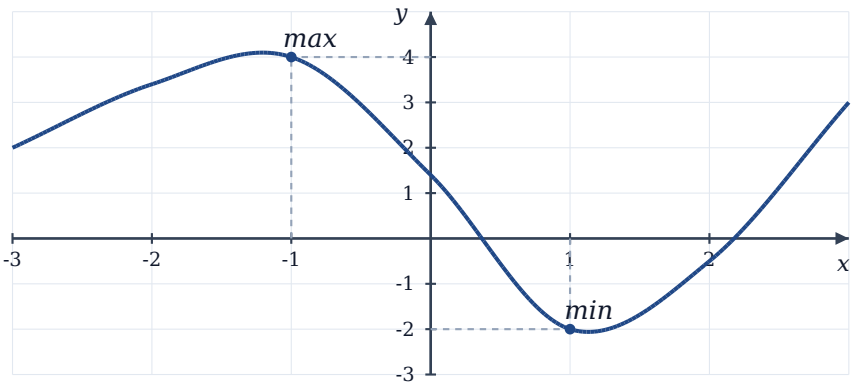
On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f. Lire $f(1)$, puis donner les antécédents de 0.



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Lecture graphique : variations

À partir de la courbe ci-dessous, indiquer sur quels intervalles f est croissante ou décroissante, et donner ses extremums sur $[-3\,;3]$.



Exercice 7 – Image d'une expression

Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$. Calculer $f(3)$ et $f(-5)$.

Exercice 8 – Comparer des images avec un tableau de variations

Une fonction f est définie sur $[-3\,;5]$. Elle est décroissante sur $[-3\,;1]$ et croissante sur $[1\,;5]$. Comparer, si c'est possible, $f(-2)$ et $f(0)$, puis $f(2)$ et $f(4)$, puis $f(0)$ et $f(3)$.

Exercice 9 – Antécédent par le calcul

Soit $f(x) = 3x - 2$. Déterminer le(s) antécédent(s) de 7.

Exercice 10 – Antécédents d'une fonction carré

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer les antécédents de 9.

Exercice 11 – Comparer deux images

Soit $f(x) = x^2$. Comparer $f(2)$ et $f(3)$, puis $f(-2)$ et $f(-3)$.

Exercice 12 – Dresser un tableau de valeurs

Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et repérer le minimum parmi ces valeurs.

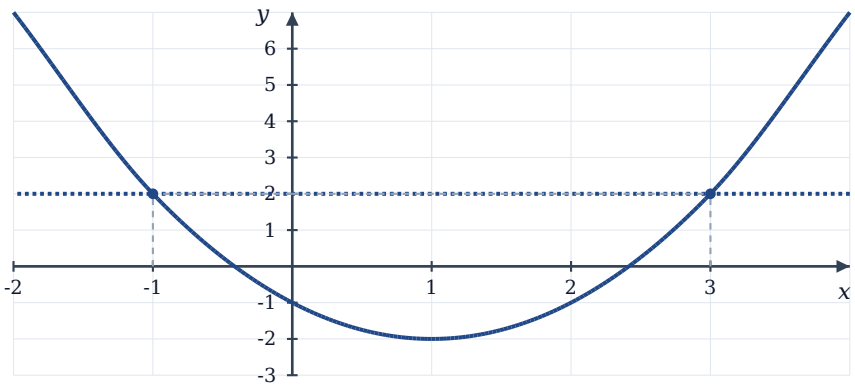
Exercice 13 – Valeur absolue et fonction cube

1. Résoudre $|x - 3| \leq 2$ puis $|x + 2| = 5$. 2. Résoudre $x^3 = -64$ puis $x^3 > 27$. 3. Comparer $(-1{,}5)^3$ et $(-1{,}4)^3$ sans calculatrice.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Résoudre graphiquement une inéquation

On donne la courbe de $f(x) = x^2 - 2x - 1$ sur $[-2\,;4]$ et la droite d'équation $y = 2$. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$, puis confirmer par le calcul.



Exercice 15 – Fonction définie par un graphique

Une fonction f vérifie : $f(0) = 2$, f croissante sur $[0;3]$ avec $f(3) = 5$, puis décroissante sur $[3;6]$ avec $f(6) = 1$. Combien de solutions a l'équation $f(x) = 4$ sur $[0;6]$?

Exercice 16 – Encadrement d'images

Soit f croissante sur $[2;8]$ avec $f(2) = -1$ et $f(8) = 5$. Si $3 \leq x \leq 6$ et $f(3) = 1$, $f(6) = 4$, encadrer $f(x)$.

Exercice 17 – Appartenance à la courbe

Soit $f(x) = x^2 - x + 1$. Le point $A(2\,;3)$ appartient-il à la courbe de f ? Et $B(-1\,;3)$?

Exercice 18 – Résoudre f(x) = g(x) graphiquement

Sur un même graphique, les courbes de f et g se coupent aux points d'abscisses -1 et 2. Que peut-on dire des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$?

Exercice 19 – Aire d'un rectangle de périmètre fixé

Un rectangle a un périmètre de 20 cm. On note x sa largeur (en cm).

1. Exprimer sa longueur, puis son aire $A(x)$, en fonction de x. Sur quel intervalle x varie-t-il ?

2. Calculer $A(3)$ et $A(7)$. Que remarque-t-on ?

3. Montrer que $25 - A(x) = (x-5)^2$. En déduire l'aire maximale et le rectangle correspondant.

Exercice 20 – Démontrer un maximum

Soit $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un maximum, et préciser sa valeur et l'endroit où il est atteint.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des images

$f(0) = 0^2 - 3 = -3$.

$f(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$.

$f(-1) = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$.

Réponse. $f(0) = -3$, $f(2) = 1$, $f(-1) = -2$.

Rappel de cours. Calculer l'image de a, c'est remplacer x par a dans l'expression de f.

Erreur fréquente. $(-1)^2 = 1$ (un carré est positif). Bien mettre les parenthèses pour les nombres négatifs.

Correction de l'exercice 2 – Vocabulaire image / antécédent

$f(3) = 7$: on part de 3, on arrive à 7.

7 est l'image de 3 ; 3 est un antécédent de 7.

Réponse. 7 est l'image de 3 ; 3 est un antécédent de 7.

Rappel de cours. Image : ce qu'on obtient ($f(x)$). Antécédent : ce qu'on met au départ (x).

Correction de l'exercice 3 – Tester une égalité d'image

On calcule $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$.

$f(2) = 5$: oui, 5 est bien l'image de 2.

Réponse. Oui, $f(2) = 5$.

Rappel de cours. Pour vérifier, on calcule l'image et on compare.

Correction de l'exercice 4 – Une fonction définie par un programme

Le carré de x est x^2, le triple de x est $3x$: $f(x) = x^2 + 3x$.

$f(-2) = (-2)^2 + 3 \times (-2) = 4 - 6 = -2$.

$f(0{,}5) = 0{,}25 + 1{,}5 = 1{,}75$.

Réponse. $f(x) = x^2 + 3x$, $f(-2) = -2$, $f(0{,}5) = 1{,}75$.

Rappel de cours. Une fonction associe à chaque nombre x de son ensemble de définition un unique nombre $f(x)$, son image.

Erreur fréquente. Le triple porte sur le nombre de départ x, pas sur le carré.

Correction de l'exercice 5 – Lecture graphique : image et antécédents

Pour lire $f(1)$, on part de 1 sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée : $f(1) = 3$.

Les antécédents de 0 sont les abscisses où la courbe coupe l'axe des abscisses : $x = -2$ et $x = 2$.

Réponse. $f(1) = 3$; antécédents de 0 : -2 et 2.

Rappel de cours. Image : on lit verticalement (de l'axe des x vers la courbe puis vers

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

l'axe des y). Antécédent : on part d'une valeur sur l'axe des y.

Correction de l'exercice 6 – Lecture graphique : variations

La courbe monte jusqu'à $x = -1$, puis descend jusqu'à $x = 1$, puis remonte.

f est croissante sur $[-3; -1]$, décroissante sur $[-1; 1]$, croissante sur $[1; 3]$.

Maximum local $f(-1) = 4$; minimum local $f(1) = -2$.

Réponse. Croissante, max $f(-1) = 4$, décroissante, min $f(1) = -2$, croissante.

Rappel de cours. Courbe qui monte = fonction croissante ; qui descend = décroissante. Les sommets sont les extremums.

Correction de l'exercice 7 – Image d'une expression

$f(3) = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$.

$f(-5) = \dfrac{-5+1}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$.

Réponse. $f(3) = 2$, $f(-5) = -2$.

Rappel de cours. On remplace x, on calcule le numérateur, puis on divise.

Correction de l'exercice 8 – Comparer des images avec un tableau de variations

-2 et 0 sont dans $[-3\,;1]$, où f est décroissante : une fonction décroissante renverse l'ordre. $-2 < 0$, donc $f(-2) > f(0)$.

2 et 4 sont dans $[1\,;5]$, où f est croissante : l'ordre est conservé. $2 < 4$, donc $f(2) < f(4)$.

0 et 3 ne sont pas sur un même intervalle de monotonie : on ne peut pas conclure sans information supplémentaire.

Réponse. $f(-2) > f(0)$; $f(2) < f(4)$; $f(0)$ et $f(3)$ ne peuvent pas être comparés.

Rappel de cours. Croissante : $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. Décroissante : $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$. Uniquement pour a et b dans le même intervalle.

Erreur fréquente. On ne compare jamais deux images de part et d'autre d'un changement de variation.

Correction de l'exercice 9 – Antécédent par le calcul

On cherche x tel que $f(x) = 7$, c'est-à-dire $3x - 2 = 7$.

$3x = 9$, donc $x = 3$.

Réponse. L'antécédent de 7 est 3.

Rappel de cours. Trouver un antécédent de k, c'est résoudre l'équation $f(x) = k$.

Correction de l'exercice 10 – Antécédents d'une fonction carré

On résout $f(x) = 9$, soit $x^2 = 9$.

$x = \pm 3$: il y a deux antécédents, -3 et 3.

Réponse. Les antécédents de 9 sont -3 et 3.

Rappel de cours. Une image peut avoir plusieurs antécédents. $x^2 = k$ ($k > 0$) en a deux : $\pm\sqrt{k}$.

Erreur fréquente. Ne pas oublier la solution négative : $x = -3$ convient aussi car

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$(-3)^2 = 9$.

Correction de l'exercice 11 – Comparer deux images

$f(2) = 4$ et $f(3) = 9$: $f(2) < f(3)$ (la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$).

$f(-2) = 4$ et $f(-3) = 9$: $f(-2) < f(-3)$ (sur les négatifs, plus on s'éloigne de 0, plus le carré est grand).

Réponse. $f(2) < f(3)$ et $f(-2) < f(-3)$.

Rappel de cours. La fonction carré décroît sur $]-\infty; 0]$ puis croît sur $[0; +\infty[$: minimum en 0.

Correction de l'exercice 12 – Dresser un tableau de valeurs

$f(-1) = 1 + 2 = 3$; $f(0) = 0$; $f(1) = 1 - 2 = -1$; $f(2) = 4 - 4 = 0$; $f(3) = 9 - 6 = 3$.

La plus petite valeur est $f(1) = -1$: le minimum est atteint en $x = 1$.

Réponse. $f(1) = -1$ est le minimum (tableau : $3, 0, -1, 0, 3$).

Rappel de cours. Un tableau de valeurs aide à tracer la courbe et à localiser un extremum.

Correction de l'exercice 13 – Valeur absolue et fonction cube

$|x - 3|$ est la distance entre x et 3 : $|x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow 3 - 2 \leq x \leq 3 + 2 \Leftrightarrow x \in [1\,;5]$.

$|x + 2| = |x - (-2)| = 5$: x est à distance 5 de -2, donc $x = -2 - 5 = -7$ ou $x = -2 + 5 = 3$.

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $x^3 = -64$ a une seule solution : $(-4)^3 = -64$, d'où $x = -4$.

$27 = 3^3$ et la fonction cube est croissante : $x^3 > 3^3 \Leftrightarrow x > 3$, soit $x \in]3\,;+\infty[$.

$-1{,}5 < -1{,}4$ et la fonction cube est croissante, donc $(-1{,}5)^3 < (-1{,}4)^3$.

Réponse. $[1\,;5]$; -7 et 3 ; -4 ; $]3\,;+\infty[$; $(-1{,}5)^3 < (-1{,}4)^3$.

Rappel de cours. $|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r\,; a + r]$. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$: $x^3 = k$ a exactement une solution.

Erreur fréquente. $x^3 = -64$ a une solution, contrairement à $x^2 = -64$ qui n'en a aucune ; et $|x + 2|$ est la distance à -2, pas à 2.

Correction de l'exercice 14 – Résoudre graphiquement une inéquation

Graphiquement, on cherche les abscisses des points de la courbe situés au-dessus de la droite $y = 2$ ou sur elle.

La courbe coupe la droite aux points d'abscisses -1 et 3, et elle est au-dessus à gauche de -1 et à droite de 3. Lecture : $S = [-2\,;-1] \cup [3\,;4]$.

Calcul : $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) \geq 0$ (on vérifie en développant : $x^2 - 3x + x - 3$).

Tableau de signes : le produit est positif ou nul pour $x \leq -1$ ou $x \geq 3$. Sur $[-2\,;4]$, on retrouve $S = [-2\,;-1] \cup [3\,;4]$.

Réponse. $S = [-2\,;-1] \cup [3\,;4]$.

Rappel de cours. $f(x) \geq k$: abscisses des points de la courbe au-dessus (ou sur) la droite horizontale $y = k$.

Erreur fréquente. La solution est un ensemble de valeurs de x, lues sur l'axe des

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

abscisses, et non une valeur de y.

Correction de l'exercice 15 – Fonction définie par un graphique

Sur $[0;3]$, f croît de 2 à 5 : elle prend la valeur 4 une fois (car $4 \in [2;5]$).

Sur $[3;6]$, f décroît de 5 à 1 : elle prend la valeur 4 une fois (car $4 \in [1;5]$).

Au total, $f(x) = 4$ a 2 solutions sur $[0;6]$.

Réponse. L'équation $f(x) = 4$ a 2 solutions.

Rappel de cours. Sur un intervalle où f est monotone, $f(x) = k$ a au plus une solution. On raisonne intervalle par intervalle.

Correction de l'exercice 16 – Encadrement d'images

f est croissante : si $3 \leq x \leq 6$, alors $f(3) \leq f(x) \leq f(6)$.

Donc $1 \leq f(x) \leq 4$.

Réponse. $1 \leq f(x) \leq 4$.

Rappel de cours. Une fonction croissante conserve l'ordre : $a \leq x \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Correction de l'exercice 17 – Appartenance à la courbe

A est sur la courbe si $f(2) = 3$. $f(2) = 4 - 2 + 1 = 3$: oui, A appartient à la courbe.

$f(-1) = 1 + 1 + 1 = 3$: oui, $B(-1;3)$ appartient aussi à la courbe.

Réponse. A et B appartiennent tous deux à la courbe ($f(2) = f(-1) = 3$).

Rappel de cours. Un point $(a;b)$ est sur la courbe de f si et seulement si $f(a) = b$.

Correction de l'exercice 18 – Résoudre f(x) = g(x) graphiquement

$f(x) = g(x)$ signifie que les deux courbes ont la même ordonnée, donc qu'elles se croisent.

Les abscisses des points d'intersection sont les solutions : $x = -1$ et $x = 2$.

Réponse. Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont $x = -1$ et $x = 2$.

Rappel de cours. Résoudre $f(x) = g(x)$ graphiquement = lire les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

Correction de l'exercice 19 – Aire d'un rectangle de périmètre fixé

1) Demi-périmètre : 10, donc la longueur vaut $10 - x$ et $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$. Il faut $x > 0$ et $10 - x > 0$: $x \in]0\,;10[$.

2) $A(3) = 3 \times 7 = 21$ et $A(7) = 7 \times 3 = 21$: c'est le même rectangle, tourné d'un quart de tour.

3) $25 - A(x) = 25 - 10x + x^2 = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$ (identité remarquable).

Un carré est positif ou nul : $25 - A(x) \geq 0$, donc $A(x) \leq 25$, avec égalité si et seulement si $x = 5$.

L'aire maximale est 25 cm^2, atteinte pour $x = 5$: le rectangle est alors un carré de côté 5 cm.

Réponse. $A(x) = x(10 - x)$ sur $]0\,;10[$; aire maximale 25 cm^2 pour le carré de côté 5 cm.

Rappel de cours. Pour démontrer qu'une fonction admet un maximum M, on montre que $M - f(x) \geq 0$ pour tout x (souvent en faisant apparaître un carré).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 20 – Démontrer un maximum

Conjecture : un tableau de valeurs ($f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$) suggère un maximum 4 en $x = 3$.

On étudie la différence : $4 - f(x) = 4 + x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Pour tout réel x, $(x - 3)^2 \geq 0$, donc $f(x) \leq 4$.

De plus $f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$: la valeur 4 est atteinte. C’est donc le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Réponse. f admet un maximum égal à 4, atteint en $x = 3$.

Rappel de cours. M est le maximum de f si $f(x) \leq M$ pour tout x et s’il existe a tel que $f(a) = M$.

Erreur fréquente. Montrer $f(x) \leq 4$ ne suffit pas : il faut aussi que la valeur 4 soit atteinte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).