Image et antécédent — Seconde

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

L'image de x est le nombre $f(x)$ qu'on obtient ; un antécédent de y est un nombre x tel que $f(x) = y$. Calculer une image, c'est remplacer ; chercher un antécédent, c'est résoudre une équation. Ces exercices corrigés couvrent calcul d'images, recherche d'antécédents (par le calcul et par lecture graphique), et le fait qu'une image peut avoir plusieurs antécédents. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/seconde/image-et-antecedent

Exercice 1 – Image par une fonction affine

Soit $f(x) = 2x - 3$. Calculer l'image de 4.

Exercice 2 – Image par une fonction carré

Soit $f(x) = x^2 + 1$. Calculer l'image de -3.

Exercice 3 – Antécédent (fonction affine)

Soit $f(x) = 2x - 3$. Déterminer l'antécédent de 5.

Exercice 4 – Image d'une fraction

Soit $f(x) = 3x^2 - x$. Calculer l'image de $\frac{1}{3}$, puis celle de $-\frac{1}{2}$.

Exercice 5 – Image par un quotient

Soit $f(x) = \frac{6}{x}$. Calculer $f(2)$ et $f(-3)$.

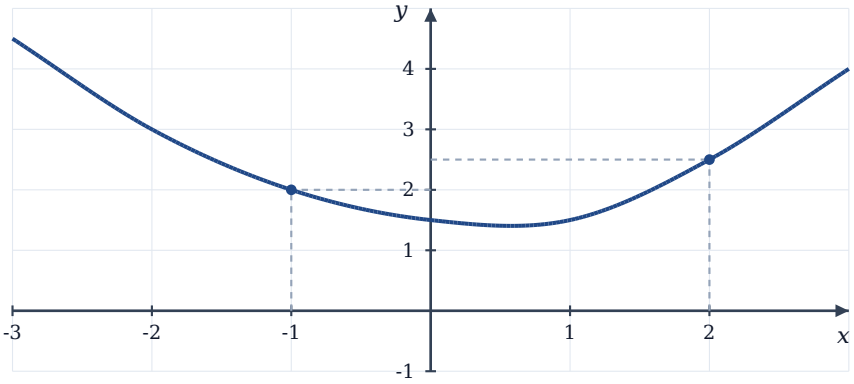
Exercice 6 – Antécédent par un quotient

Soit $f(x) = \frac{6}{x}$. Déterminer l'antécédent de 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Lecture graphique d’une image

Sur la courbe ci-dessous, lire l’image de -1 et l’image de 2.



Exercice 8 – Lire images et antécédents dans un tableau

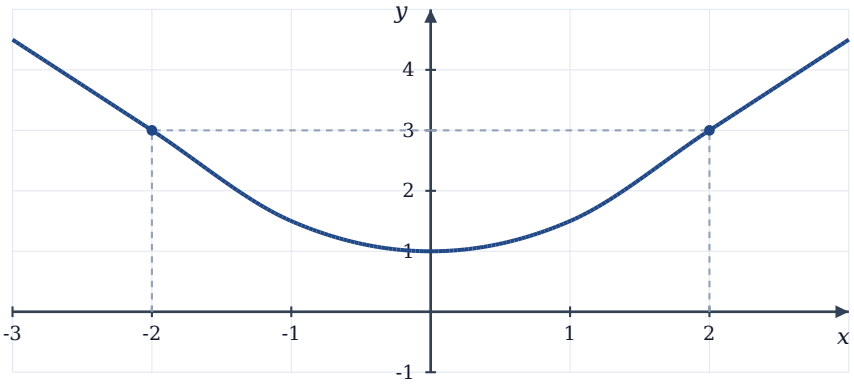
Le tableau donne des valeurs de $f(x) = x^2 - x - 2$: pour $x = -2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3$, on a $f(x) = 4\,;0\,;-2\,;-2\,;0\,;4$. Donner l’image de 3, puis les antécédents de 0 qui apparaissent dans le tableau. Le tableau donne-t-il tous les antécédents de 0 ?

Exercice 9 – Antécédents par un carré

Soit $f(x) = (x-2)^2$. Déterminer les antécédents de 9, puis ceux de 0 et de -1.

Exercice 10 – Lecture graphique d’antécédents

Sur la courbe ci-dessous, déterminer les antécédents de 3.



Exercice 11 – Plusieurs antécédents (calcul)

Soit $f(x) = x^2 - 4$. Déterminer les antécédents de 0.

Exercice 12 – Antécédent inexistant

Soit $f(x) = x^2 + 1$. Le nombre 0 a-t-il un antécédent par f ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Antécédent par une fonction produit

Soit $f(x) = x(x-3)$. Déterminer les antécédents de 0.

Exercice 14 – Tarif de parking défini par morceaux

Un parking coûte 3 € pour une durée t (en heures) jusqu'à 1 h, puis $3 + 1{,}5(t-1)$ € au-delà. On note $P(t)$ le prix pour $t \in]0\,;10]$.

1. Calculer $P(0{,}5)$, $P(1)$ et $P(4)$.

2. Quel est l'antécédent de 9 ? Interpréter.

3. Le nombre 2 a-t-il un antécédent ?

Exercice 15 – Antécédents par un quotient

Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, définie pour $x \neq 3$. Déterminer l'antécédent de 3, puis montrer que 2 n'a pas d'antécédent.

Exercice 16 – Image et antécédent combinés

Soit $f(x) = 2x + 5$. 1) Calculer l'image de -3. 2) Déterminer l'antécédent de -3.

Exercice 17 – Antécédents d'un trinôme

Soit $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Déterminer les antécédents de 0 (on pourra factoriser).

Exercice 18 – Antécédent d'une valeur quelconque

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer les antécédents de 5.

Exercice 19 – Lecture et interprétation

La température d'une pièce (en °C) est donnée par $T(h) = -h^2 + 4h + 15$, où h est l'heure (de 0 à 4). 1) Quelle température à $h = 1$? 2) À quelle(s) heure(s) fait-il 15 °C ?

Exercice 20 – Combien d'antécédents ? La forme canonique

Soit $f(x) = x^2 - 6x$.

1. Montrer que $f(x) = (x-3)^2 - 9$.

2. Déterminer les antécédents de -9, de -10 et de 7.

3. Selon la valeur de k, combien k a-t-il d'antécédents ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Image par une fonction affine

L'image de 4 est $f(4) = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$.

Réponse. L'image de 4 est 5.

Rappel de cours. Image de a : on calcule $f(a)$ en remplaçant x par a.

Correction de l'exercice 2 – Image par une fonction carré

$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$.

Réponse. L'image de -3 est 10.

Rappel de cours. $(-3)^2 = 9$. Les parenthèses évitent l'erreur de signe.

Correction de l'exercice 3 – Antécédent (fonction affine)

On résout $f(x) = 5$: $2x - 3 = 5$, donc $2x = 8$ et $x = 4$.

Réponse. L'antécédent de 5 est 4.

Rappel de cours. Antécédent de k : on résout $f(x) = k$.

Correction de l'exercice 4 – Image d'une fraction

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

Réponse. $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$.

Rappel de cours. Le carré porte sur toute la fraction : $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, puis on multiplie par 3.

Erreur fréquente. $3x^2 \neq (3x)^2$: avec $x = \frac{1}{3}$, $3x^2 = \frac{1}{3}$ alors que $(3x)^2 = 1$.

Correction de l'exercice 5 – Image par un quotient

$f(2) = \frac{6}{2} = 3$.

$f(-3) = \frac{6}{-3} = -2$.

Réponse. $f(2) = 3$, $f(-3) = -2$.

Rappel de cours. On remplace x au dénominateur (qui doit être non nul).

Correction de l'exercice 6 – Antécédent par un quotient

On résout $\frac{6}{x} = 2$. En multipliant par x : $6 = 2x$, donc $x = 3$.

Réponse. L'antécédent de 2 est 3.

Rappel de cours. On résout l'équation $f(x) = k$ en multipliant par le dénominateur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Lecture graphique d'une image

Pour l'image de -1 : on part de -1 sur l'axe des abscisses, on rejoint la courbe, on lit l'ordonnée : $f(-1) = 2$.

Pour l'image de 2 : de même, $f(2) = 2{,}5$.

Réponse. $f(-1) = 2$ et $f(2) = 2{,}5$.

Rappel de cours. Lire une image : monter (ou descendre) verticalement depuis l'axe des x jusqu'à la courbe, puis lire sur l'axe des y.

Correction de l'exercice 8 – Lire images et antécédents dans un tableau

Image de 3 : on lit la colonne $x = 3$, $f(3) = 4$.

Antécédents de 0 dans le tableau : les colonnes où $f(x) = 0$, soit $x = -1$ et $x = 2$.

Un tableau ne montre que quelques valeurs. Pour être sûr, on résout $x^2 - x - 2 = 0$. Or $(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$, donc l'équation équivaut à $(x+1)(x-2) = 0$: $x = -1$ ou $x = 2$. Le tableau les donnait bien tous.

Réponse. $f(3) = 4$; antécédents de 0 : -1 et 2 (et il n'y en a pas d'autre).

Rappel de cours. Un nombre a une seule image, mais peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

Correction de l'exercice 9 – Antécédents par un carré

$f(x) = 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 2 = 3$ ou $x - 2 = -3$, donc $x = 5$ ou $x = -1$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$: un seul antécédent.

$f(x) = -1$: impossible, un carré n'est jamais négatif. -1 n'a pas d'antécédent.

Réponse. Antécédents de 9 : -1 et 5 ; de 0 : 2 ; -1 n'en a pas.

Rappel de cours. $X^2 = k$ avec $k > 0$ donne $X = \sqrt{k}$ ou $X = -\sqrt{k}$.

Erreur fréquente. Oublier la solution $x - 2 = -3$: on ne trouverait que 5.

Correction de l'exercice 10 – Lecture graphique d'antécédents

Pour trouver les antécédents de 3, on part de 3 sur l'axe des ordonnées et on regarde où la droite horizontale $y = 3$ coupe la courbe.

Elle coupe en deux points, d'abscisses -2 et 2 : ce sont les antécédents de 3.

Réponse. Les antécédents de 3 sont -2 et 2.

Rappel de cours. Lire un antécédent : partir de la valeur sur l'axe des y, tracer une horizontale, lire les abscisses des intersections.

Correction de l'exercice 11 – Plusieurs antécédents (calcul)

On résout $x^2 - 4 = 0$, soit $x^2 = 4$.

$x = \pm 2$: deux antécédents, -2 et 2.

Réponse. Les antécédents de 0 sont -2 et 2.

Rappel de cours. Une équation $x^2 = k$ ($k > 0$) a deux solutions : on n'oublie pas la négative.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Antécédent inexistant

On résout $f(x) = 0$, soit $x^2 + 1 = 0$, donc $x^2 = -1$.

Un carré ne peut pas être négatif : l'équation n'a pas de solution.

Donc 0 n'a aucun antécédent par f.

Réponse. Non, 0 n'a pas d'antécédent ($x^2 = -1$ est impossible).

Rappel de cours. Tous les nombres n'ont pas forcément d'antécédent : cela dépend des valeurs prises par f.

Correction de l'exercice 13 – Antécédent par une fonction produit

On résout $x(x - 3) = 0$. Un produit est nul si l'un des facteurs l'est.

$x = 0$ ou $x - 3 = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 3$.

Réponse. Les antécédents de 0 sont 0 et 3.

Rappel de cours. Équation produit : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

Correction de l'exercice 14 – Tarif de parking défini par morceaux

1) $P(0{,}5) = 3$ et $P(1) = 3$ (forfait). $P(4) = 3 + 1{,}5 \times 3 = 7{,}5$ €.

2) $9 > 3$: on est au-delà d'une heure. $3 + 1{,}5(t - 1) = 9 \Leftrightarrow 1{,}5(t - 1) = 6 \Leftrightarrow t - 1 = 4 \Leftrightarrow t = 5$. Pour 9 €, on stationne 5 heures.

3) Le prix minimum est 3 € : $P(t) = 2$ n'a pas de solution, 2 n'a pas d'antécédent.

Réponse. 3 €, 3 €, 7,5 € ; 9 € correspond à 5 h ; 2 n'a pas d'antécédent.

Rappel de cours. Pour une fonction définie par morceaux, on choisit la bonne formule selon l'intervalle où se trouve x.

Erreur fréquente. Croire qu'un nombre n'a qu'un antécédent : ici, tous les nombres de $]0\,;1]$ sont des antécédents de 3.

Correction de l'exercice 15 – Antécédents par un quotient

$f(x) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{2x + 1}{x - 3} = 3$. Pour $x \neq 3$, on multiplie par $x - 3$: $2x + 1 = 3x - 9$, donc $x = 10$. Comme $10 \neq 3$, c'est bien l'antécédent.

Vérification : $f(10) = \dfrac{21}{7} = 3$.

$f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x + 1 = 2(x - 3) = 2x - 6 \Leftrightarrow 1 = -6$: impossible. 2 n'a pas d'antécédent.

Réponse. L'antécédent de 3 est 10 ; 2 n'a pas d'antécédent.

Rappel de cours. Avant de multiplier par le dénominateur, on note la valeur interdite, puis on vérifie que la solution trouvée n'est pas interdite.

Correction de l'exercice 16 – Image et antécédent combinés

Image de -3 : $f(-3) = 2 \times (-3) + 5 = -6 + 5 = -1$.

Antécédent de -3 : on résout $2x + 5 = -3$, soit $2x = -8$, donc $x = -4$.

Réponse. Image de -3 : -1 ; antécédent de -3 : -4.

Rappel de cours. Image et antécédent sont des opérations « inverses » : l'une remplace, l'autre résout. Ne pas les confondre.

Erreur fréquente. « Image de -3 » ≠ « antécédent de -3 » : la question précise dans quel sens on travaille.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 17 – Antécédents d’un trinôme

On résout $x^2 - 2x - 3 = 0$. On cherche deux nombres de somme 2 et produit -3 : 3 et -1.

Donc $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$, d’où $x = 3$ ou $x = -1$.

Réponse. Les antécédents de 0 sont -1 et 3.

Rappel de cours. Chercher les antécédents de 0, c’est résoudre $f(x) = 0$: on factorise ou on utilise les racines.

Correction de l’exercice 18 – Antécédent d’une valeur quelconque

On résout $x^2 = 5$.

$x = \pm\sqrt{5}$: deux antécédents, $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

Réponse. Les antécédents de 5 sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

Rappel de cours. $x^2 = k$ ($k > 0$) donne $x = \pm\sqrt{k}$. La réponse peut contenir une racine carrée.

Correction de l’exercice 19 – Lecture et interprétation

$T(1) = -1 + 4 + 15 = 18$: il fait 18 °C à $h = 1$.

On cherche les antécédents de 15 : $-h^2 + 4h + 15 = 15$, soit $-h^2 + 4h = 0$, donc $-h(h - 4) = 0$.

$h = 0$ ou $h = 4$: il fait 15 °C à $h = 0$ et $h = 4$.

Réponse. $T(1) = 18$ °C ; il fait 15 °C à $h = 0$ et $h = 4$.

Rappel de cours. « Quelle valeur à tel instant » = image ; « à quel instant telle valeur » = antécédent (équation à résoudre).

Correction de l’exercice 20 – Combien d’antécédents ? La forme canonique

1) $(x - 3)^2 - 9 = x^2 - 6x + 9 - 9 = x^2 - 6x = f(x)$.

2) $f(x) = -9 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (un seul antécédent).

$f(x) = -10 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = -1$: impossible, pas d’antécédent.

$f(x) = 7 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 3 = 4$ ou $x - 3 = -4 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -1$.

3) $f(x) = k \Leftrightarrow (x - 3)^2 = k + 9$. Si $k < -9$, aucun antécédent ; si $k = -9$, un seul (3) ; si $k > -9$, deux : $3 - \sqrt{k + 9}$ et $3 + \sqrt{k + 9}$.

Réponse. -9 : un antécédent (3) ; -10 : aucun ; 7 : -1 et 7. En général : 0, 1 ou 2 antécédents selon que $k < -9$, $k = -9$ ou $k > -9$.

Rappel de cours. La forme $(x - a)^2 + b$ montre le minimum b de la fonction : les valeurs inférieures à b n’ont aucun antécédent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).