

Probabilités conditionnelles — Seconde

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La probabilité de B sachant A , notée $P_A(B)$, est la probabilité de B quand on sait que A est réalisé. Ces 20 exercices corrigés la calculent de trois façons : en comptant des issues équiprobables, dans un tableau croisé, et sur un arbre pondéré, en multipliant le long d'un chemin. Ils insistent sur le piège central du chapitre, la confusion entre $P_A(B)$ et $P_B(A)$, avec les faux positifs d'un test de dépistage, puis terminent par des classiques : le jeu des trois portes, les deux enfants, le sondage à réponse aléatoire.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/seconde/probabilites-conditionnelles

Exercice 1 - Un dé et une information

On lance un dé équilibré. On sait que le résultat est pair. Quelle est la probabilité qu'il soit au moins égal à 4 ? Compare avec la probabilité sans information.

Exercice 2 - As et piques

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes (4 couleurs de 8 cartes, un as par couleur). Calcule $P_{\text{pique}}(\text{as})$ et $P_{\text{as}}(\text{pique})$.

Exercice 3 - Appliquer la définition

On sait que $P(A) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,2$. Calcule $P_A(B)$ et $P_A(\bar{B})$.

Exercice 4 - Probabilité d'une intersection

25 % des élèves d'un lycée sont internes, et 80 % des internes rentrent chez eux le week-end. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit interne et rentre chez lui le week-end ?

Exercice 5 - Avec un tableau croisé

On choisit au hasard un élève parmi 300 :

	Filles	Garçons	Total
Maths	48	72	120
SES	54	36	90
SVT	48	42	90
Total	150	150	300

On note F : « c'est une fille » et S : « il suit SES ». Calcule $P(S)$, $P(F \cap S)$, $P_F(S)$ et $P_S(F)$.

Exercice 6 - Tirages sans remise

Une urne contient 4 boules rouges et 2 bleues. On tire successivement deux boules, sans remise.

1. Calcule la probabilité de tirer deux rouges.
2. Calcule la probabilité de tirer deux boules de la même couleur.

Exercice 7 - Pluie et retard

Il pleut un jour sur quatre. Les jours de pluie, le bus est en retard avec la probabilité 0,4 ; les autres jours, avec la probabilité 0,08.

1. Calcule la probabilité que le bus soit en retard.
2. Le bus est en retard : quelle est la probabilité qu'il pleuve ?

Exercice 8 - Compléter un arbre

Dans un arbre pondéré, on lit $P(A) = 0,35$, $P_A(B) = 0,6$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$. Calcule les probabilités des quatre chemins et vérifie que leur somme vaut 1.

Exercice 9 - Traduire des phrases

On choisit un client au hasard ; J : « il a moins de 25 ans », T : « il paie par téléphone ». Traduis : a) « 30 % des clients ont moins de 25 ans » ; b) « la moitié des moins de 25 ans paient par téléphone » ; c) « 15 % des clients sont des jeunes qui paient par téléphone ». Vérifie la cohérence.

Exercice 10 - Ne pas confondre

Dans une entreprise, $P(C) = 0,2$ (« cadre »), $P_C(V) = 0,75$ (« voiture de fonction ») et $P(V) = 0,25$. Un employé affirme : « 75 % des voitures de fonction sont attribuées à des cadres ». A-t-il raison ?

Exercice 11 - Un dépistage

Une maladie touche 0,5 % de la population. Un test a une sensibilité de 98 % et une spécificité de 97 %. En raisonnant sur 100 000 personnes, calcule la probabilité qu'une personne testée positive soit malade.

Exercice 12 - L'effet de la prévalence

Le même test (sensibilité 98 %, spécificité 97 %) est utilisé chez des patients qui ont des symptômes, parmi lesquels 20 % sont malades. Calcule $P_T(M)$ sur 10 000 patients et compare avec l'exercice précédent.

Exercice 13 - Réponse au hasard

À une question de QCM à 5 propositions, un élève connaît la réponse avec la probabilité 0,5 ; sinon il répond au hasard. Il a répondu juste : quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse ?

Exercice 14 - Trois machines

Trois machines produisent respectivement 45 %, 35 % et 20 % des pièces, avec des taux de défaut de 1 %, 2 % et 4 %. Une pièce est défectueuse : quelle est la probabilité qu'elle vienne de la troisième machine ?

Exercice 15 - Choisir un modèle

On lance 2 000 fois une pièce de forme irrégulière : elle tombe 1 240 fois sur la face A. Quel modèle proposer ? Avec ce modèle, et si deux lancers ne s'influencent pas, quelle est la probabilité d'obtenir deux fois la face A ?

Exercice 16 - Simuler en Python

Un programme Python simule n lancers de deux dés équilibrés avec la fonction `randint`. Il compte dans une variable a les lancers où le premier dé donne 6, et dans une variable b ceux, parmi ces lancers-là seulement, où la somme des deux dés est au moins 10. Il renvoie $\frac{b}{a}$. Quelle probabilité ce programme estime-t-il ? Calcule sa valeur exacte.

Exercice 17 - Le jeu des trois portes

Une voiture est cachée derrière l'une de trois portes. Le candidat choisit une porte ; l'animateur, qui sait où est la voiture, ouvre une autre porte vide et propose de changer. Quelle est la probabilité de gagner en changeant ?

Exercice 18 - Deux enfants

Une famille a deux enfants ; on suppose les cas GG, GF, FG, FF équiprobables (aîné puis cadet). On sait qu'elle a au moins une fille. Quelle est la probabilité qu'elle ait deux filles ? Et si l'on sait que la cadette est une fille ?

Exercice 19 - Sondage à réponse aléatoire

Pour une question délicate, chaque personne lance un dé en secret : si elle obtient 1 ou 2, elle répond « oui » quoi qu'il arrive ; sinon, elle répond honnêtement. On note p la proportion de personnes concernées. 45 % des réponses sont « oui ». Estime p .

Exercice 20 - Une empreinte au tribunal

Une empreinte retrouvée sur une scène correspond à celle d'un suspect. La probabilité qu'une personne innocente ait par hasard une empreinte correspondante est $\frac{1}{500\,000}$. La ville compte 2 000 000 d'habitants, dont le coupable. Sans autre élément, quelle est la probabilité que le suspect soit coupable ?

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Un dé et une information

Les six issues sont équiprobables : $P_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.

A : « pair » = $\{2; 4; 6\}$; B : « au moins 4 » = $\{4; 5; 6\}$; $A \cap B = \{4; 6\}$.

$$P_A(B) = \frac{2}{3}.$$

Sans information, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$: savoir que le résultat est pair rend B plus probable.

Réponse. $P_A(B) = \frac{2}{3}$ (au lieu de $\frac{1}{2}$).

Correction de l'exercice 2 - As et piques

Parmi les 8 piques, il y a un as : $P_{\text{pique}}(\text{as}) = \frac{1}{8}$.

Parmi les 4 as, il y a un pique : $P_{\text{as}}(\text{pique}) = \frac{1}{4}$.

Les deux probabilités conditionnelles n'ont pas la même population de référence : elles sont différentes.

Réponse. $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 3 - Appliquer la définition

Définition : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$.

Sachant A , B et $\bar{B}$ se partagent les issues : $P_A(\bar{B}) = 1 - 0,4 = 0,6$.

Réponse. 0,4 et 0,6.

Correction de l'exercice 4 - Probabilité d'une intersection

On traduit : $P(I) = 0,25$ et $P_I(W) = 0,8$ (« parmi les internes »).

$$P(I \cap W) = P(I) \times P_I(W) = 0,25 \times 0,8 = 0,2.$$

20 % des élèves sont des internes qui rentrent le week-end.

Réponse. 0,2.

Rappel de cours. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$: c'est un pourcentage de pourcentage.

Correction de l'exercice 5 - Avec un tableau croisé

Tirage équiprobable : chaque probabilité est une fréquence du tableau.

$$P(S) = \frac{90}{300} = 0,3 ; P(F \cap S) = \frac{54}{300} = 0,18.$$

$$P_F(S) = \frac{54}{150} = 0,36 \text{ (on lit la colonne des filles).}$$

$$P_S(F) = \frac{54}{90} = 0,6 \text{ (on lit la ligne SES).}$$

Réponse. 0,3 ; 0,18 ; 0,36 ; 0,6.

Correction de l'exercice 6 - Tirages sans remise

Arbre : $P(R_1) = \frac{4}{6}$; après une rouge, il reste 3 rouges sur 5 : $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{5}$.

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Deux bleues : } \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

$$\text{Même couleur (deux chemins) : } \frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}.$$

Réponse. $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{15}$.

Correction de l'exercice 7 - Pluie et retard

Arbre : $P(P) = 0,25$, $P_P(R) = 0,4$; $P(\overline{P}) = 0,75$, $P_{\overline{P}}(R) = 0,08$.

Deux chemins mènent à R : $P(R) = 0,25 \times 0,4 + 0,75 \times 0,08 = 0,1 + 0,06 = 0,16$.

$$P_R(P) = \frac{P(P \cap R)}{P(R)} = \frac{0,1}{0,16} = 0,625.$$

Réponse. $0,16 \cdot 0,625$.

Correction de l'exercice 8 - Compléter un arbre

Branches complémentaires : $P(\overline{A}) = 0,65$, $P_A(\overline{B}) = 0,4$, $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,8$.

$$P(A \cap B) = 0,35 \times 0,6 = 0,21 ; P(A \cap \overline{B}) = 0,35 \times 0,4 = 0,14.$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 0,65 \times 0,2 = 0,13 ; P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,65 \times 0,8 = 0,52.$$

$$\text{Contrôle : } 0,21 + 0,14 + 0,13 + 0,52 = 1.$$

Réponse. $0,21$; $0,14$; $0,13$; $0,52$.

Correction de l'exercice 9 - Traduire des phrases

a) $P(J) = 0,3$; b) $P_J(T) = 0,5$ (« parmi les moins de 25 ans ») ; c) $P(J \cap T) = 0,15$.

Cohérence : $P(J) \times P_J(T) = 0,3 \times 0,5 = 0,15 = P(J \cap T)$.

Réponse. $P(J) = 0,3$, $P_J(T) = 0,5$, $P(J \cap T) = 0,15$: cohérent.

Correction de l'exercice 10 - Ne pas confondre

$P_C(V) = 0,75$ signifie : parmi les cadres, 75 % ont une voiture de fonction.

L'employé parle de $P_V(C)$. On calcule $P(C \cap V) = 0,2 \times 0,75 = 0,15$, puis

$$P_V(C) = \frac{0,15}{0,25} = 0,6.$$

Il a tort : 60 % des voitures de fonction sont attribuées à des cadres.

Réponse. Non : $P_V(C) = 0,6$.

Erreur fréquente. Confondre $P_C(V)$ et $P_V(C)$: c'est l'erreur d'inversion du conditionnement.

Correction de l'exercice 11 - Un dépistage

Malades : 500, dont $0,98 \times 500 = 490$ positifs.

Sains : 99 500, dont 3 % positifs à tort : $0,03 \times 99\,500 = 2\,985$.

Positifs : $490 + 2\,985 = 3\,475$.

$$P_T(M) = \frac{490}{3475} \approx 0,141.$$

Seule une personne positive sur sept environ est malade : la maladie est rare, les faux positifs sont nombreux.

Réponse. Environ 0,141.

Erreur fréquente. Répondre 98 % : c'est $P_M(T)$, pas $P_T(M)$.

Correction de l'exercice 12 - L'effet de la prévalence

Malades : 2 000, dont 1 960 positifs ; sains : 8 000, dont $0,03 \times 8\,000 = 240$ positifs.

$$P_T(M) = \frac{1\,960}{2\,200} \approx 0,891.$$

Dans cette population où la maladie est fréquente, un test positif est fiable à environ 89 %, contre 14 % en dépistage général.

Réponse. Environ 0,891.

Correction de l'exercice 13 - Réponse au hasard

$$\text{Arbre : } P(C) = 0,5, P_C(J) = 1 ; P(\overline{C}) = 0,5, P_{\overline{C}}(J) = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$P(J) = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 0,2 = 0,6.$$

$$P_J(C) = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6} \approx 0,833.$$

Réponse. $\frac{5}{6}$.

Correction de l'exercice 14 - Trois machines

Chemins vers D : $0,45 \times 0,01 = 0,0045$; $0,35 \times 0,02 = 0,007$; $0,2 \times 0,04 = 0,008$.

$$P(D) = 0,0045 + 0,007 + 0,008 = 0,0195.$$

$$P_D(M_3) = \frac{0,008}{0,0195} \approx 0,41.$$

La troisième machine fait 20 % des pièces mais environ 41 % des défauts.

Réponse. Environ 0,41.

Correction de l'exercice 15 - Choisir un modèle

Rien ne justifie l'équiprobabilité. D'après la loi des grands nombres, la fréquence observée sur 2 000 lancers est proche de la probabilité : $P(A) \approx \frac{1\,240}{2\,000} = 0,62$.

Modèle : $P(A) = 0,62$ et $P(B) = 0,38$.

Deux lancers indépendants : $P(AA) = 0,62 \times 0,62 = 0,3844$.

Réponse. $P(A) = 0,62$; $P(AA) = 0,3844$.

Correction de l'exercice 16 - Simuler en Python

Le compteur a compte les lancers où le premier dé donne 6 ; b compte, parmi eux seulement, ceux dont la somme est au moins 10.

La fonction estime $P_{D_1=6}(S \geq 10)$.

Si le premier dé donne 6, la somme est au moins 10 quand le second donne 4, 5 ou 6 :

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Pour n grand, la fonction renvoie presque toujours une valeur proche de 0,5.

Réponse. $P_{D_1=6}(S \geq 10) = \frac{1}{2}.$

Correction de l'exercice 17 - Le jeu des trois portes

Le premier choix est bon avec la probabilité $\frac{1}{3}$; dans ce cas, changer fait perdre.

Il est mauvais avec la probabilité $\frac{2}{3}$; l'animateur ouvre alors la seule porte vide restante, et changer fait gagner à coup sûr.

$$P(\text{gagner en changeant}) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}.$$

Changer double les chances de gagner ($\frac{2}{3}$ contre $\frac{1}{3}$).

Réponse. $\frac{2}{3}.$

Correction de l'exercice 18 - Deux enfants

« Au moins une fille » = $\{GF; FG; FF\}$: 3 cas, dont un seul avec deux filles. $P = \frac{1}{3}.$

« La cadette est une fille » = $\{GF; FF\}$: 2 cas, dont un avec deux filles. $P = \frac{1}{2}.$

Les deux informations ne réduisent pas l'univers de la même façon.

Réponse. $\frac{1}{3}$ puis $\frac{1}{2}.$

Correction de l'exercice 19 - Sondage à réponse aléatoire

Arbre : « 1 ou 2 » avec la probabilité $\frac{1}{3}$, puis « oui » à coup sûr ; sinon ($\frac{2}{3}$), « oui » avec la probabilité p .

$$P(\text{oui}) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p.$$

On égale à la fréquence observée : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}p = 0,45$, donc $\frac{2}{3}p = 0,45 - \frac{1}{3} \approx 0,1167$ et $p \approx 0,175$.

Environ 17,5 % des personnes sont concernées, sans qu'aucune réponse individuelle ne trahisse personne.

Réponse. $p \approx 0,175.$

Correction de l'exercice 20 - Une empreinte au tribunal

Parmi environ 2 000 000 d'innocents, environ $2\,000\,000 \times \frac{1}{500\,000} = 4$ ont une empreinte correspondante.

Les personnes correspondantes sont donc environ 5 : le coupable et 4 innocents.

Sans autre élément, $P_{\text{correspondance}}(\text{coupable}) \approx \frac{1}{5} = 0,2.$

Dire « il n'y a qu'une chance sur 500 000 qu'il soit innocent » confond $P_{\text{innocent}}(\text{correspondance})$ et $P_{\text{correspondance}}(\text{innocent})$, qui vaut environ 0,8.

Réponse. Environ 0,2.