Vecteurs du plan — Seconde

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ décrit un déplacement : une direction, un sens et une longueur. On additionne les vecteurs avec la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, et l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $ABDC$ est un parallélogramme. Ces exercices corrigés couvrent égalité de vecteurs, relation de Chasles, milieux et parallélogrammes. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/seconde/vecteurs

Exercice 1 – Égalité de vecteurs

$ABCD$ est un parallélogramme. Citer un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2 – Relation de Chasles

Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Exercice 3 – Vecteur opposé

Que vaut $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$? Et comment s'écrit l'opposé de $\overrightarrow{AB}$?

Exercice 4 – Translation et parallélogramme

D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Traduire cette phrase par une égalité de vecteurs, puis donner la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 5 – Chasles avec plusieurs vecteurs

Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

Exercice 6 – Milieu et vecteurs

I est le milieu de $[AB]$. Que peut-on dire de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$?

Exercice 7 – Caractériser un parallélogramme

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Quel quadrilatère forment A, B, C, D ?

Exercice 8 – Vecteurs dans un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Simplifier $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Une somme qui s'annule

Simplifier $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB}$, où M, A, B sont trois points quelconques.

Exercice 10 – Construire une somme

Avec la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{AC}$ en passant par le point D.

Exercice 11 – Simplifier une expression vectorielle

Simplifier $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$.

Exercice 12 – Égalité vectorielle et milieu

Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à « les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ coïncident ».

Exercice 13 – Vecteur médiane

ABC est un triangle et I le milieu de $[BC]$. Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Exercice 14 – Caractériser un milieu

Démontrer que si un point M vérifie $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, alors M est le milieu de $[AB]$.

Exercice 15 – Démontrer un parallélogramme

$ABCD$ est un quadrilatère. I milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. Démontrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Exercice 16 – Point défini par un vecteur

ABC est un triangle. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Quel quadrilatère est $ABDC$?

Exercice 17 – Alignement par les vecteurs

Trois points vérifient $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. Que peut-on dire de A, B, C ?

Exercice 18 – Centre de gravité

G est défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (centre de gravité du triangle ABC). Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 19 – Parallélisme par les vecteurs

On a $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Un milieu caché dans un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme. On définit E et F par $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$.
Démontrer que C est le milieu de $[EF]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Égalité de vecteurs

Dans un parallélogramme $ABCD$, les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur, orientés dans le même sens.

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Rappel de cours. $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (côtés opposés, même sens).

Erreur fréquente. Attention à l'ordre des lettres : c'est $\overrightarrow{DC}$, pas $\overrightarrow{CD}$ (qui serait le vecteur opposé).

Correction de l'exercice 2 – Relation de Chasles

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (on enchaîne les déplacements).

Réponse. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Rappel de cours. Chasles : le point d'arrivée du premier vecteur est le départ du second ; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Correction de l'exercice 3 – Vecteur opposé

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (on revient au point de départ).

L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Réponse. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$; opposé de $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{BA}$.

Rappel de cours. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$: même direction et longueur, sens opposé.

Correction de l'exercice 4 – Translation et parallélogramme

« D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ » signifie $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: les segments $[AD]$ et $[BC]$ sont parallèles, de même longueur et de même sens. Le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme (éventuellement aplati si A, B, C sont alignés).

Réponse. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$: $ABCD$ est un parallélogramme.

Rappel de cours. L'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Correction de l'exercice 5 – Chasles avec plusieurs vecteurs

On enchaîne : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Réponse. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Rappel de cours. Chasles s'enchaîne : seuls comptent le tout premier départ et le tout dernier arrivée.

Correction de l'exercice 6 – Milieu et vecteurs

I milieu de $[AB]$: I partage le segment en deux parties égales, dans le même sens.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ (et aussi $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$).

Réponse. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Rappel de cours. I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Correction de l'exercice 7 – Caractériser un parallélogramme

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles, de même longueur et même sens.

$ABCD$ est donc un parallélogramme.

Réponse. $ABCD$ est un parallélogramme.

Rappel de cours. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD$ parallélogramme. Vérifier l'ordre des sommets.

Correction de l'exercice 8 – Vecteurs dans un parallélogramme

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (parallélogramme), donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Chasles).

O est le milieu de $[AC]$: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$, donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

Réponse. $\overrightarrow{AC}$, $\vec{0}$ et $\overrightarrow{DB}$.

Rappel de cours. Règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, la diagonale issue de A.

Erreur fréquente. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ est l'autre diagonale, orientée de D vers B : $\overrightarrow{DB}$, pas $\overrightarrow{BD}$.

Correction de l'exercice 9 – Une somme qui s'annule

$-\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BM}$, donc $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}$ (Chasles).

Puis $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

Réponse. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Rappel de cours. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ pour tout point M : le point M disparaît.

Correction de l'exercice 10 – Construire une somme

On insère le point D : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

Réponse. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

Rappel de cours. Chasles « à l'envers » : on peut décomposer un vecteur en insérant un point intermédiaire.

Correction de l'exercice 11 – Simplifier une expression vectorielle

$-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Par Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Réponse. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$.

Rappel de cours. Soustraire un vecteur = ajouter son opposé : $-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$.

Erreur fréquente. On transforme $-\overrightarrow{CB}$ en $+\overrightarrow{BC}$ avant d'appliquer Chasles.

Correction de l'exercice 12 – Égalité vectorielle et milieu

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que $ABCD$ est un parallélogramme.

Or, dans un parallélogramme, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ coïncident.

Réponse. Oui : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (parallélogramme) ⇒ mêmes milieux des diagonales.

Rappel de cours. Propriété : un quadrilatère est un parallélogramme ⇔ ses diagonales ont le même milieu.

Correction de l'exercice 13 – Vecteur médiane

Chasles en passant par I : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$.

En additionnant : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

I milieu de $[BC]$: $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{IB}$, donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Il reste $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$, d'où $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Réponse. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Rappel de cours. I milieu de $[BC] \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Correction de l'exercice 14 – Caractériser un milieu

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BM}$.

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}$: on va de B à M comme de M à A, donc M est sur $[AB]$ et $BM = MA$.

Autre rédaction : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Réponse. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: M est le milieu de $[AB]$.

Rappel de cours. Pour situer un point défini par une relation vectorielle, on exprime $\overrightarrow{AM}$ en fonction d'un vecteur connu.

Correction de l'exercice 15 – Démontrer un parallélogramme

I milieu de $[AC]$: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$. I milieu de $[BD]$: $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{ID}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC}$. Or $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$.

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DC}$. $ABCD$ est un parallélogramme.

Réponse. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: $ABCD$ est un parallélogramme.

Rappel de cours. On décompose les vecteurs avec Chasles autour du point commun I, puis on utilise les égalités des milieux.

Correction de l'exercice 16 – Point défini par un vecteur

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: D est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (car $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$), donc $ABDC$ est un parallélogramme.

Réponse. $ABDC$ est un parallélogramme.

Rappel de cours. La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est la diagonale du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (règle du parallélogramme).

Correction de l'exercice 17 – Alignement par les vecteurs

$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$: les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires (l'un est un multiple de l'autre).

Deux vecteurs colinéaires partageant le point A signifient que A, B, C sont alignés.

Réponse. A, B, C sont alignés ($\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (k réel) $\Leftrightarrow$ A, B, C alignés.

Correction de l'exercice 18 – Centre de gravité

On décompose avec Chasles à partir de A : $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AC}$.

Somme $= \vec{0}$: $-\overrightarrow{AG} + (-\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB}) + (-\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$, soit $-3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Réponse. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Rappel de cours. Le centre de gravité vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$: on l'obtient en décomposant tout depuis un sommet avec Chasles.

Correction de l'exercice 19 – Parallélisme par les vecteurs

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Deux vecteurs directeurs colinéaires $\Rightarrow$ les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Réponse. $(AB) \parallel (CD)$ (vecteurs directeurs colinéaires).

Rappel de cours. Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles (ou confondues).

Correction de l'exercice 20 – Un milieu caché dans un parallélogramme

Le milieu K de $[EF]$ vérifie, comme tout milieu (voir l'exercice « Vecteur médiane »), $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})$.

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Dans le parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC}$, et $K = C$.

Réponse. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC}$: le milieu de $[EF]$ est C.

Rappel de cours. Deux points K et C tels que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC}$ sont confondus.

Erreur fréquente. Une figure bien faite le suggère, mais seule l'égalité vectorielle le démontre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).