Calcul intégral et calculs d’aires — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

L’intégrale d’une fonction positive est l’aire sous sa courbe ; elle se calcule avec une primitive : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires couvrent le calcul d’intégrales, la relation de Chasles, l’aire entre deux courbes, la valeur moyenne, la méthode des rectangles, la fonction $x \mapsto \int_a^x f$, l’encadrement d’une intégrale et la méthode de Monte-Carlo, avec des contextes concrets : distance parcourue, énergie consommée, volume d’un réservoir.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/calcul-integral

Exercice 1 – Aires de figures simples

Calcule $\int_0^3 2\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^4 x\,\mathrm{d}x$ en utilisant des aires.

Exercice 2 – Avec une primitive

Calcule $\int_1^2 3x^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 – Exponentielle et inverse

Calcule $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 – Relation de Chasles

On sait que $\int_0^2 f = 5$ et $\int_2^6 f = 3$. Calcule $\int_0^6 f$ et $\int_2^0 f$.

Exercice 5 – Polynôme du second degré

Calcule $\int_0^2 (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 – Exponentielle affine

Calcule $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ (au millième).

Exercice 7 – Somme de deux termes

Calcule $\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + x\right)\mathrm{d}x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Formes composées

Calcule $I = \int_0^1 2x\,e^{x^2}\,dx$ et $J = \int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

Exercice 9 – Aire entre deux courbes

Calcule l'aire du domaine compris entre les courbes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$ sur $[0\,;2]$.

Exercice 10 – Valeur moyenne

Calcule la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0\,;3]$.

Exercice 11 – Méthode des rectangles

Encadre $\int_0^2 x^2\,dx$ avec 4 rectangles à gauche et 4 à droite, puis compare à la valeur exacte.

Exercice 12 – Distance parcourue

Une voiture accélère avec la vitesse $v(t) = 2t + 1$ (m/s) pendant 10 s. Calcule la distance parcourue et la vitesse moyenne.

Exercice 13 – Parabole et droite

Calcule l'aire du domaine compris entre la parabole $y = 6 - x^2$ et la droite $y = x$.

Exercice 14 – Énergie consommée

Un appareil consomme une puissance $P(t) = 4 - 0{,}5t$ kW pendant 6 heures. Quelle énergie consomme-t-il ?

Exercice 15 – Concentration moyenne

La concentration d'un polluant vaut $c(t) = e^{-0{,}2t}$ g/L. Calcule la concentration moyenne sur les 10 premières heures (au millième).

Exercice 16 – Intégrale et aire géométrique

Calcule $\int_{-1}^2 x^3\,dx$, puis l'aire du domaine entre la courbe de x^3 et l'axe des abscisses sur $[-1\,;2]$.

Exercice 17 – Fonction définie par une intégrale

Soit $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$ pour $x \geq 1$. Calcule $F(1)$, $F'(x)$ et donne le sens de variation de F.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Encadrer sans primitive

On ne sait pas calculer $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Montre que $\mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$ sur $[0\,;1]$, puis encadre I.

Exercice 19 – Méthode de Monte-Carlo

On tire 10 000 points au hasard dans le carré $[0\,;1]^2$; 6 680 sont sous la courbe de $y = \sqrt{x}$. Quelle estimation de $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ obtient-on ? Compare à la valeur exacte.

Exercice 20 – Problème : le réservoir

Un réservoir se remplit avec un débit $d(t) = 6\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ L/min.

1. Quel volume entre en 10 minutes ?

2. Quel est le débit moyen sur ces 10 minutes ?

3. Le volume peut-il dépasser 30 L ? Quand atteint-il 20 L ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Aires de figures simples

Rectangle de largeur 3 et de hauteur 2 : aire 6.

Triangle de base 4 et de hauteur 4 : aire $\frac{4 \times 4}{2} = 8$.

Réponse. 6 et 8.

Correction de l'exercice 2 – Avec une primitive

Une primitive de $3x^2$ est x^3.

$\left[x^3\right]_1^2 = 8 - 1 = 7$.

Réponse. 7.

Correction de l'exercice 3 – Exponentielle et inverse

$[\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - 1 \approx 1{,}718$.

$[\ln x]_1^{\mathrm{e}} = 1 - 0 = 1$.

Réponse. $\mathrm{e} - 1$ et 1.

Correction de l'exercice 4 – Relation de Chasles

Chasles : $\int_0^6 f = \int_0^2 f + \int_2^6 f = 8$.

Échanger les bornes change le signe : $\int_2^0 f = -5$.

Réponse. 8 et -5.

Correction de l'exercice 5 – Polynôme du second degré

Primitive : $\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x$.

$\frac{8}{3} - 4 + 6 = \frac{14}{3} \approx 4{,}67$.

Réponse. $\frac{14}{3}$.

Correction de l'exercice 6 – Exponentielle affine

Primitive : $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$.

$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1) \approx 3{,}195$.

Réponse. $\frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2} \approx 3{,}195$.

Correction de l'exercice 7 – Somme de deux termes

Primitive : $\ln x + \frac{x^2}{2}$.

$\left(\ln 3 + \frac{9}{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \ln 3 + 4 \approx 5{,}099$.

Réponse. $\ln 3 + 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Formes composées

$I = \left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1$.

$J = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\ln 5 \approx 0{,}805$.

Réponse. $I = \mathrm{e} - 1$; $J = \frac{1}{2}\ln 5$.

Correction de l'exercice 9 – Aire entre deux courbes

Sur $[0\,;2]$, $2x - x^2 = x(2-x) \geq 0$: g est au-dessus.

$\int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

Réponse. $\frac{4}{3}$ u.a.

Correction de l'exercice 10 – Valeur moyenne

$\mu = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times 9$.

Réponse. $\mu = 3$.

Erreur fréquente. Ce n'est pas $f(1{,}5) = 2{,}25$: la fonction n'est pas affine.

Correction de l'exercice 11 – Méthode des rectangles

$\Delta x = 0{,}5$, points 0 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2.

À gauche : $0{,}5(0 + 0{,}25 + 1 + 2{,}25) = 1{,}75$; à droite : $0{,}5(0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4) = 3{,}75$.

Valeur exacte $\frac{8}{3} \approx 2{,}67$, bien comprise entre les deux.

Réponse. $1{,}75 \leq I \leq 3{,}75$, $I = \frac{8}{3}$.

Correction de l'exercice 12 – Distance parcourue

Distance $= \int_0^{10} (2t+1)\,\mathrm{d}t = \left[t^2 + t\right]_0^{10} = 110$ m.

Vitesse moyenne $= \frac{110}{10} = 11$ m/s.

Réponse. 110 m ; 11 m/s.

Correction de l'exercice 13 – Parabole et droite

Intersections : $6 - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 2$.

Sur $[-3\,;2]$, la parabole est au-dessus (en 0 : $6 > 0$).

$\int_{-3}^2 (6 - x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^2 = \frac{22}{3} + \frac{27}{2} = \frac{125}{6} \approx 20{,}83$.

Réponse. $\frac{125}{6}$ u.a.

Correction de l'exercice 14 – Énergie consommée

Énergie $= \int_0^6 (4 - 0{,}5t)\,\mathrm{d}t = \left[4t - 0{,}25t^2\right]_0^6 = 24 - 9$.

Réponse. 15 kWh.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 15 – Concentration moyenne

$\int_0^{10} \mathrm{e}^{-0{,}2t}\,\mathrm{d}t = \left[-5\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^{10} = 5(1-\mathrm{e}^{-2})$.

$\mu = \dfrac{5(1-\mathrm{e}^{-2})}{10} \approx 0{,}432$ g/L.

Réponse. $\mu \approx 0{,}432$ g/L.

Correction de l'exercice 16 – Intégrale et aire géométrique

$\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = 4 - \dfrac{1}{4} = 3{,}75$.

Sur $[-1\,;0]$, $x^3 \leq 0$: aire $-\int_{-1}^{0} x^3 = \dfrac{1}{4}$. Sur $[0\,;2]$: aire 4.

Aire totale : 4,25.

Réponse. Intégrale 3,75 ; aire 4,25 u.a.

Correction de l'exercice 17 – Fonction définie par une intégrale

$F(1) = \int_1^1 \ln t\,\mathrm{d}t = 0$.

La fonction aire a pour dérivée la fonction intégrée : $F'(x) = \ln x$.

Pour $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$: F est croissante.

Réponse. $F(1) = 0$, $F'(x) = \ln x$, F croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 18 – Encadrer sans primitive

Sur $[0\,;1]$, $x^2 \leq x$, donc $-x^2 \geq -x$ et $\mathrm{e}^{-x^2} \geq \mathrm{e}^{-x}$. Et $-x^2 \leq 0$ donne $\mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$.

Par ordre des intégrales : $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \leq I \leq \int_0^1 1$.

$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$.

Réponse. $0{,}632 \leq I \leq 1$.

Correction de l'exercice 19 – Méthode de Monte-Carlo

La proportion de points sous la courbe estime l'aire : $\dfrac{6\,680}{10\,000} = 0{,}668$.

Valeur exacte : $\left[\dfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}667$.

Réponse. Estimation 0,668 pour $\dfrac{2}{3} \approx 0{,}667$.

Correction de l'exercice 20 – Problème : le réservoir

$\int_0^{10} 6\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,\mathrm{d}t = \left[-30\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^{10} = 30(1-\mathrm{e}^{-2}) \approx 25{,}9$ L.

Débit moyen $\approx 2{,}59$ L/min.

$V(t) = 30(1-\mathrm{e}^{-0{,}2t}) < 30$: jamais. $V(t) = 20 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}2t} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow t = 5\ln 3 \approx 5{,}5$ min.

Réponse. 25,9 L ; 2,59 L/min ; jamais 30 L ; 20 L au bout de 5,5 min.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).