Calcul intégral et calculs d'aires — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

L'intégrale d'une fonction positive est l'aire sous sa courbe ; elle se calcule avec une primitive : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires couvrent le calcul d'intégrales, la relation de Chasles, l'aire entre deux courbes, la valeur moyenne, la méthode des rectangles, la fonction $x \mapsto \int_a^x f$, l'encadrement d'une intégrale et la méthode de Monte-Carlo, avec des contextes concrets : distance parcourue, énergie consommée, volume d'un réservoir.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/calcul-integral

Exercice 1 – Aires de figures simples

Calcule $\int_0^3 2\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^4 x\,\mathrm{d}x$ en utilisant des aires.

Exercice 2 – Avec une primitive

Calcule $\int_1^2 3x^2\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 – Exponentielle et inverse

Calcule $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 – Relation de Chasles

On sait que $\int_0^2 f = 5$ et $\int_2^6 f = 3$. Calcule $\int_0^6 f$ et $\int_2^0 f$.

Exercice 5 – Polynôme du second degré

Calcule $\int_0^2 (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 – Exponentielle affine

Calcule $\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ (au millième).

Exercice 7 – Somme de deux termes

Calcule $\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + x\right)\mathrm{d}x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Formes composées

Calcule $I = \int_0^1 2x\,e^{x^2}\,dx$ et $J = \int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

Exercice 9 – Aire entre deux courbes

Calcule l'aire du domaine compris entre les courbes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x$ sur $[0\,;2]$.

Exercice 10 – Valeur moyenne

Calcule la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0\,;3]$.

Exercice 11 – Méthode des rectangles

Encadre $\int_0^2 x^2\,dx$ avec 4 rectangles à gauche et 4 à droite, puis compare à la valeur exacte.

Exercice 12 – Distance parcourue

Une voiture accélère avec la vitesse $v(t) = 2t + 1$ (m/s) pendant 10 s. Calcule la distance parcourue et la vitesse moyenne.

Exercice 13 – Parabole et droite

Calcule l'aire du domaine compris entre la parabole $y = 6 - x^2$ et la droite $y = x$.

Exercice 14 – Énergie consommée

Un appareil consomme une puissance $P(t) = 4 - 0{,}5t$ kW pendant 6 heures. Quelle énergie consomme-t-il ?

Exercice 15 – Concentration moyenne

La concentration d'un polluant vaut $c(t) = e^{-0{,}2t}$ g/L. Calcule la concentration moyenne sur les 10 premières heures (au millième).

Exercice 16 – Intégrale et aire géométrique

Calcule $\int_{-1}^2 x^3\,dx$, puis l'aire du domaine entre la courbe de x^3 et l'axe des abscisses sur $[-1\,;2]$.

Exercice 17 – Fonction définie par une intégrale

Soit $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$ pour $x \geq 1$. Calcule $F(1)$, $F'(x)$ et donne le sens de variation de F.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Encadrer sans primitive

On ne sait pas calculer $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Montre que $\mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$ sur $[0\,;1]$, puis encadre I.

Exercice 19 – Méthode de Monte-Carlo

On tire 10 000 points au hasard dans le carré $[0\,;1]^2$; 6 680 sont sous la courbe de $y = \sqrt{x}$. Quelle estimation de $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ obtient-on ? Compare à la valeur exacte.

Exercice 20 – Problème : le réservoir

Un réservoir se remplit avec un débit $d(t) = 6\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ L/min.

1. Quel volume entre en 10 minutes ?

2. Quel est le débit moyen sur ces 10 minutes ?

3. Le volume peut-il dépasser 30 L ? Quand atteint-il 20 L ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).