Courbe de Lorenz et indice de Gini — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Comment mesurer les inégalités de revenus ou de salaires ? La courbe de Lorenz indique quelle part de la richesse détiennent les x % les plus pauvres ; l'indice de Gini $G = 1 - 2\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x$ résume l'écart à l'égalité par un nombre entre 0 et 1. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires vont du calcul des quantiles à la construction d'une courbe de Lorenz, à la vérification d'un modèle (croissant, convexe, points fixes) et au calcul de l'indice de Gini, par une intégrale ou par la méthode des trapèzes.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/courbe-de-lorenz-indice-de-gini

Exercice 1 – Médiane et moyenne

Salaires mensuels (en €) de 10 salariés : 1 200 ; 1 300 ; 1 400 ; 1 500 ; 1 600 ; 1 800 ; 2 000 ; 2 400 ; 3 000 ; 4 800. Calcule la moyenne et la médiane, puis compare.

Exercice 2 – Rapport interdécile

Dans un pays, $D_1 = 11\,000$ € et $D_9 = 38\,500$ € (revenus annuels). Calcule et interprète le rapport interdécile.

Exercice 3 – Lire une courbe de Lorenz

Sur une courbe de Lorenz, on lit $L(0{,}6) = 0{,}35$. Interprète, puis donne la part des 40 % les plus riches.

Exercice 4 – Égalité parfaite

Quelle est la courbe de Lorenz et l'indice de Gini d'une population où tout le monde a le même revenu ?

Exercice 5 – Construire la courbe

Les quintiles d'une population (du plus pauvre au plus riche) reçoivent 6 %, 12 %, 17 %, 24 % et 41 % du revenu total. Donne les points de la courbe de Lorenz.

Exercice 6 – Gini par les trapèzes

Avec les points précédents, calcule l'aire sous la ligne polygonale par la méthode des trapèzes, puis l'indice de Gini.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Gini d'un modèle

Calcule l'indice de Gini pour $L(x) = x^2$, puis pour $L(x) = x^4$. Lequel est le plus inégalitaire ?

Exercice 8 – Vérifier un modèle

Montre que $L(x) = 0{,}4x + 0{,}6x^2$ peut modéliser une courbe de Lorenz, puis calcule $L(0{,}5)$ et l'indice de Gini.

Exercice 9 – Modèles refusés

Explique pourquoi aucune de ces fonctions ne peut être une courbe de Lorenz sur $[0\,;1]$: a) $\sqrt{x}$; b) $x^2 + 0{,}1$; c) $1{,}2x^2$.

Exercice 10 – Courbe de Lorenz des salaires

Reprends les 10 salaires (total 21 000 €). Quelle part de la masse salariale touchent les 50 % les moins payés ? Et le salarié le mieux payé ?

Exercice 11 – Gini de l'entreprise

Pour ces 10 salaires, les valeurs intérieures $L(0{,}1), \ldots, L(0{,}9)$ ont pour somme environ 3,286. Calcule l'indice de Gini.

Exercice 12 – Comparer deux pays

Dans le pays B, les quintiles reçoivent 3 %, 7 %, 12 %, 20 % et 58 % du revenu. Calcule son indice de Gini et compare-le à 0,328.

Exercice 13 – Trois groupes

Une population est divisée en trois tiers égaux qui détiennent 10 %, 30 % et 60 % de la richesse. Calcule l'indice de Gini.

Exercice 14 – Aire de concentration

L'aire entre la bissectrice et une courbe de Lorenz vaut 0,17. Que vaut l'indice de Gini ? Et l'intégrale de L sur $[0\,;1]$?

Exercice 15 – Modèle exponentiel

Soit $L(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e} - 1}$ sur $[0\,;1]$. Vérifie que c'est une courbe de Lorenz, puis calcule l'indice de Gini.

Exercice 16 – Effet d'une hausse uniforme

Tous les revenus d'un pays augmentent de 5 %. Que deviennent la courbe de Lorenz et l'indice de Gini ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Effet d'une prime fixe

On verse une prime identique de 200 € par mois à chacun des 10 salariés. L'indice de Gini augmente-t-il ou diminue-t-il ?

Exercice 18 – Pourquoi L(x) ≤ x

Explique pourquoi une fonction de Lorenz, convexe avec $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$, vérifie $L(x) \leq x$ sur $[0\,;1]$. Déduis-en que $0 \leq G \leq 1$.

Exercice 19 – Famille de modèles

Pour $L(x) = x^n$ ($n \geq 1$), exprime G en fonction de n, puis trouve n pour que $G = 0{,}5$.

Exercice 20 – Problème complet : deux modèles

Les revenus du pays A sont modélisés par $L_A(x) = 0{,}3x + 0{,}7x^2$, ceux du pays B par $L_B(x) = x^3$.

1. Vérifie que L_A est une courbe de Lorenz.

2. Compare la part des 50 % les plus pauvres.

3. Calcule les deux indices de Gini et conclus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Médiane et moyenne

Total 21 000 € : moyenne 2 100 €.

Médiane : moyenne des 5e et 6e valeurs, $\frac{1\,600 + 1\,800}{2} = 1\,700$ €.

La moyenne dépasse la médiane : quelques salaires élevés tirent la moyenne vers le haut.

Réponse. Moyenne 2 100 € ; médiane 1 700 €.

Correction de l'exercice 2 – Rapport interdécile

$\frac{D_9}{D_1} = \frac{38\,500}{11\,000} = 3{,}5$.

Réponse. 3,5 : le seuil des 10 % les plus aisés est 3,5 fois celui des 10 % les plus modestes.

Correction de l'exercice 3 – Lire une courbe de Lorenz

Les 60 % les plus pauvres détiennent 35 % de la richesse.

Les 40 % les plus riches détiennent donc $1 - 0{,}35 = 65\,\%$.

Réponse. 60 % les plus pauvres : 35 % ; 40 % les plus riches : 65 %.

Correction de l'exercice 4 – Égalité parfaite

Les $x \times 100\,\%$ premiers ont $x \times 100\,\%$ de la richesse : $L(x) = x$.

L'aire entre la bissectrice et la courbe est nulle : $G = 0$.

Réponse. $L(x) = x$; $G = 0$.

Correction de l'exercice 5 – Construire la courbe

On cumule : 0,06 ; 0,18 ; 0,35 ; 0,59 ; 1.

Réponse. (0 ; 0), (0,2 ; 0,06), (0,4 ; 0,18), (0,6 ; 0,35), (0,8 ; 0,59), (1 ; 1).

Correction de l'exercice 6 – Gini par les trapèzes

Aire
$= 0{,}2 \times \frac{(0 + 0{,}06) + (0{,}06 + 0{,}18) + (0{,}18 + 0{,}35) + (0{,}35 + 0{,}59) + (0{,}59 + 1)}{2} = 0{,}2 \times \frac{3{,}36}{2} = 0{,}336$.

$G = 1 - 2 \times 0{,}336 = 0{,}328$.

Réponse. Aire 0,336 ; $G \approx 0{,}328$.

Correction de l'exercice 7 – Gini d'un modèle

$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$: $G = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$\int_0^1 x^4 = \frac{1}{5}$: $G = 1 - \frac{2}{5} = 0{,}6$.

Réponse. $\frac{1}{3}$ et 0,6 : le modèle x^4 est plus inégalitaire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 8 – Vérifier un modèle

$L(0) = 0$, $L(1) = 1$; $L'(x) = 0{,}4 + 1{,}2x > 0$: croissante ; $L'' = 1{,}2 > 0$: convexe.

$L(0{,}5) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$.

$\int_0^1 L = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$: $G = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Réponse. Modèle valide ; $L(0{,}5) = 0{,}35$; $G = 0{,}2$.

Correction de l’exercice 9 – Modèles refusés

a) $\sqrt{x}$ est concave et au-dessus de la bissectrice ($\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 > 0{,}25$).

b) $L(0) = 0{,}1 \neq 0$.

c) $L(1) = 1{,}2 \neq 1$.

Réponse. a) concave ; b) $L(0) \neq 0$; c) $L(1) \neq 1$.

Correction de l’exercice 10 – Courbe de Lorenz des salaires

$1\,200 + 1\,300 + 1\,400 + 1\,500 + 1\,600 = 7\,000$: $\frac{7\,000}{21\,000} \approx 33{,}3\,\%$.

$\frac{4\,800}{21\,000} \approx 22{,}9\,\%$.

Réponse. 33,3 % pour la moitié la moins payée ; 22,9 % pour le mieux payé.

Correction de l’exercice 11 – Gini de l’entreprise

Trapèzes de largeur 0,1 : aire $= 0{,}1 \times \left(\frac{0+1}{2} + 3{,}286\right) \approx 0{,}3786$.

$G = 1 - 2 \times 0{,}3786 \approx 0{,}243$.

Réponse. $G \approx 0{,}24$.

Correction de l’exercice 12 – Comparer deux pays

Cumuls : 0,03 ; 0,10 ; 0,22 ; 0,42 ; 1.

Aire $= 0{,}2 \times \dfrac{0{,}03 + 0{,}13 + 0{,}32 + 0{,}64 + 1{,}42}{2} = 0{,}254$.

$G = 1 - 0{,}508 = 0{,}492$.

Réponse. $G \approx 0{,}49$: le pays B est nettement plus inégalitaire.

Correction de l’exercice 13 – Trois groupes

Points : $(0\,;0)$, $\left(\frac{1}{3}\,;0{,}1\right)$, $\left(\frac{2}{3}\,;0{,}4\right)$, $(1\,;1)$.

Aire $= \frac{1}{3} \times \dfrac{0{,}1 + 0{,}5 + 1{,}4}{2} = \frac{1}{3}$.

$G = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Réponse. $G = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Correction de l’exercice 14 – Aire de concentration

$G = 2 \times 0{,}17 = 0{,}34$.

$\int_0^1 L = \frac{1}{2} - 0{,}17 = 0{,}33$ (aire sous la bissectrice : $\frac{1}{2}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $G = 0{,}34$; $\int_0^1 L = 0{,}33$.

Correction de l'exercice 15 – Modèle exponentiel

$L(0) = 0$, $L(1) = 1$, $L'(x) = \frac{e^x}{e-1} > 0$, $L''(x) > 0$: croissante et convexe.

$\int_0^1 L = \frac{1}{e-1}[e^x - x]_0^1 = \frac{e-2}{e-1} \approx 0{,}418$.

$G = 1 - 2 \times 0{,}418 \approx 0{,}164$.

Réponse. Modèle valide ; $G \approx 0{,}164$ (répartition peu inégalitaire).

Correction de l'exercice 16 – Effet d'une hausse uniforme

Chaque revenu et le total sont multipliés par 1,05 : les parts ne changent pas.

Réponse. Ni la courbe ni l'indice ne changent.

Correction de l'exercice 17 – Effet d'une prime fixe

Pour 1 200 €, la hausse est de 16,7 % ; pour 4 800 €, de 4,2 %.

Les bas salaires gagnent plus en proportion : la répartition devient plus égale.

Réponse. L'indice de Gini diminue.

Correction de l'exercice 18 – Pourquoi L(x) ≤ x

Une fonction convexe est sous ses sécantes ; la sécante entre $(0\,;0)$ et $(1\,;1)$ est la droite $y = x$.

Donc $0 \leq x - L(x)$, et comme $L \geq 0$, $x - L(x) \leq x$. En intégrant : $0 \leq \int_0^1 (x - L) \leq \frac{1}{2}$, donc $0 \leq G \leq 1$.

Réponse. Convexité $\Longrightarrow$ sous la bissectrice $\Longrightarrow$ $0 \leq G \leq 1$.

Correction de l'exercice 19 – Famille de modèles

$\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$, donc $G = 1 - \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$.

$\frac{n-1}{n+1} = 0{,}5 \Leftrightarrow n - 1 = 0{,}5n + 0{,}5 \Leftrightarrow n = 3$.

Réponse. $G = \frac{n-1}{n+1}$; $n = 3$.

Correction de l'exercice 20 – Problème complet : deux modèles

$L_A(0) = 0$, $L_A(1) = 1$, $L_A'(x) = 0{,}3 + 1{,}4x > 0$, $L_A'' = 1{,}4 > 0$.

$L_A(0{,}5) = 0{,}15 + 0{,}175 = 0{,}325$; $L_B(0{,}5) = 0{,}125$.

$\int_0^1 L_A = 0{,}15 + \frac{0{,}7}{3} \approx 0{,}383$, $G_A \approx 0{,}233$; $G_B = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = 0{,}5$.

Réponse. $G_A \approx 0{,}23$, $G_B = 0{,}5$: le pays B est bien plus inégalitaire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).