Courbe de Lorenz et indice de Gini — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Comment mesurer les inégalités de revenus ou de salaires ? La courbe de Lorenz indique quelle part de la richesse détiennent les x % les plus pauvres ; l'indice de Gini $G = 1 - 2\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x$ résume l'écart à l'égalité par un nombre entre 0 et 1. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires vont du calcul des quantiles à la construction d'une courbe de Lorenz, à la vérification d'un modèle (croissant, convexe, points fixes) et au calcul de l'indice de Gini, par une intégrale ou par la méthode des trapèzes.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/courbe-de-lorenz-indice-de-gini

Exercice 1 – Médiane et moyenne

Salaires mensuels (en €) de 10 salariés : 1 200 ; 1 300 ; 1 400 ; 1 500 ; 1 600 ; 1 800 ; 2 000 ; 2 400 ; 3 000 ; 4 800. Calcule la moyenne et la médiane, puis compare.

Exercice 2 – Rapport interdécile

Dans un pays, $D_1 = 11\,000$ € et $D_9 = 38\,500$ € (revenus annuels). Calcule et interprète le rapport interdécile.

Exercice 3 – Lire une courbe de Lorenz

Sur une courbe de Lorenz, on lit $L(0{,}6) = 0{,}35$. Interprète, puis donne la part des 40 % les plus riches.

Exercice 4 – Égalité parfaite

Quelle est la courbe de Lorenz et l'indice de Gini d'une population où tout le monde a le même revenu ?

Exercice 5 – Construire la courbe

Les quintiles d'une population (du plus pauvre au plus riche) reçoivent 6 %, 12 %, 17 %, 24 % et 41 % du revenu total. Donne les points de la courbe de Lorenz.

Exercice 6 – Gini par les trapèzes

Avec les points précédents, calcule l'aire sous la ligne polygonale par la méthode des trapèzes, puis l'indice de Gini.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Gini d'un modèle

Calcule l'indice de Gini pour $L(x) = x^2$, puis pour $L(x) = x^4$. Lequel est le plus inégalitaire ?

Exercice 8 – Vérifier un modèle

Montre que $L(x) = 0{,}4x + 0{,}6x^2$ peut modéliser une courbe de Lorenz, puis calcule $L(0{,}5)$ et l'indice de Gini.

Exercice 9 – Modèles refusés

Explique pourquoi aucune de ces fonctions ne peut être une courbe de Lorenz sur $[0\,;1]$: a) $\sqrt{x}$; b) $x^2 + 0{,}1$; c) $1{,}2x^2$.

Exercice 10 – Courbe de Lorenz des salaires

Reprends les 10 salaires (total 21 000 €). Quelle part de la masse salariale touchent les 50 % les moins payés ? Et le salarié le mieux payé ?

Exercice 11 – Gini de l'entreprise

Pour ces 10 salaires, les valeurs intérieures $L(0{,}1), \ldots, L(0{,}9)$ ont pour somme environ 3,286. Calcule l'indice de Gini.

Exercice 12 – Comparer deux pays

Dans le pays B, les quintiles reçoivent 3 %, 7 %, 12 %, 20 % et 58 % du revenu. Calcule son indice de Gini et compare-le à 0,328.

Exercice 13 – Trois groupes

Une population est divisée en trois tiers égaux qui détiennent 10 %, 30 % et 60 % de la richesse. Calcule l'indice de Gini.

Exercice 14 – Aire de concentration

L'aire entre la bissectrice et une courbe de Lorenz vaut 0,17. Que vaut l'indice de Gini ? Et l'intégrale de L sur $[0\,;1]$?

Exercice 15 – Modèle exponentiel

Soit $L(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e} - 1}$ sur $[0\,;1]$. Vérifie que c'est une courbe de Lorenz, puis calcule l'indice de Gini.

Exercice 16 – Effet d'une hausse uniforme

Tous les revenus d'un pays augmentent de 5 %. Que deviennent la courbe de Lorenz et l'indice de Gini ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Effet d'une prime fixe

On verse une prime identique de 200 € par mois à chacun des 10 salariés. L'indice de Gini augmente-t-il ou diminue-t-il ?

Exercice 18 – Pourquoi L(x) ≤ x

Explique pourquoi une fonction de Lorenz, convexe avec $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$, vérifie $L(x) \leq x$ sur $[0\,;1]$. Déduis-en que $0 \leq G \leq 1$.

Exercice 19 – Famille de modèles

Pour $L(x) = x^n$ ($n \geq 1$), exprime G en fonction de n, puis trouve n pour que $G = 0{,}5$.

Exercice 20 – Problème complet : deux modèles

Les revenus du pays A sont modélisés par $L_A(x) = 0{,}3x + 0{,}7x^2$, ceux du pays B par $L_B(x) = x^3$.

1. Vérifie que L_A est une courbe de Lorenz.

2. Compare la part des 50 % les plus pauvres.

3. Calcule les deux indices de Gini et conclus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).