Dérivation et étude de fonctions — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La dérivation sert à étudier les variations d'une fonction et à résoudre des problèmes d'optimisation : volume maximal, pic de concentration d'un médicament, coût moyen minimal, bénéfice maximal. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires entraînent aux quatre formules du programme, $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$, $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $(u^2)' = 2uu'$, puis aux études de fonctions complètes et aux problèmes concrets.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/derivation-etude-fonctions

Exercice 1 – Composée affine

Dérive $f(x) = (3x+2)^4$.

Exercice 2 – Exponentielle d'une affine

Dérive $g(x) = \mathrm{e}^{-4x+1}$.

Exercice 3 – Logarithme d'une affine

Dérive $h(x) = \ln(5x-2)$ sur $\left]\frac{2}{5}\,;+\infty\right[$.

Exercice 4 – Carré d'une fonction

Dérive $k(x) = (x^2+3)^2$ de deux façons : avec $(u^2)' = 2uu'$, puis en développant.

Exercice 5 – Deux composées

Dérive $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ et $g(x) = \ln(x^2+4)$.

Exercice 6 – Produit et maximum

Soit $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$. Calcule $f'(x)$ et détermine le maximum de f.

Exercice 7 – Tangente remarquable

Détermine la tangente à la courbe de $f(x) = \mathrm{e}^{x-1}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 8 – Étude complète

Étudie les variations de $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ et donne ses extremums.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Avec un logarithme

Soit $f(x) = x^2 - 2\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$. Détermine son minimum.

Exercice 10 – La boîte de volume maximal

Dans un carré de carton de 24 cm de côté, on découpe aux coins des carrés de côté x puis on plie. Quel x donne le volume maximal ?

Exercice 11 – Pic de concentration

La concentration d'un médicament est $C(t) = 8t\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ (mg/L, t en heures). Quand est-elle maximale et que vaut-elle ?

Exercice 12 – Coût moyen minimal

Le coût de production de q objets est $C(q) = q^2 + 10q + 400$ (en euros), $q > 0$.

1. Exprime le coût moyen $C_M(q)$.

2. Pour quelle production est-il minimal ?

3. Compare avec le coût marginal en ce point.

Exercice 13 – Bénéfice maximal

Le bénéfice (en milliers d'euros) pour x centaines d'articles est $B(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x - 50$, $x \in [0\,;10]$. Détermine le bénéfice maximal.

Exercice 14 – Prix et recette

Au prix p (en €), on vend $200 - 4p$ objets ($0 \le p \le 50$). Quel prix maximise la recette ?

Exercice 15 – Nombre de solutions

Combien de solutions l'équation $x\,\mathrm{e}^{-x} = 0{,}3$ a-t-elle sur $[0\,;+\infty[$?

Exercice 16 – Vitesse d'un mobile

La position d'un mobile est $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en m, t en s). À quels instants le mobile s'arrête-t-il ? Quand recule-t-il ?

Exercice 17 – Distance minimale

Quelle est la plus petite distance entre le point $A(0\,;2)$ et un point $M(x\,;x^2)$ de la parabole $y = x^2$?

Exercice 18 – La canette économique

Une canette cylindrique doit contenir 1 000 cm³. Sa surface est $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2\,000}{r}$ (r rayon en cm). Quel rayon minimise la quantité de métal ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Fonction toujours décroissante

Montre que $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 – Problème complet

Soit $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ sur $[0\,; +\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations (on admet $\lim_{+\infty} f = 0$).

2. Donne l'équation de la tangente en 0.

3. Combien de solutions a $f(x) = 1$? Encadre la solution non nulle au centième.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Composée affine

$(f(ax+b))' = af'(ax+b)$ avec $f(X) = X^4$, $f'(X) = 4X^3$ et $a = 3$.

$f'(x) = 3 \times 4(3x+2)^3 = 12(3x+2)^3$.

Réponse. $f'(x) = 12(3x+2)^3$.

Correction de l'exercice 2 – Exponentielle d'une affine

$u = -4x+1$, $u' = -4$.

$g'(x) = u'\mathrm{e}^u = -4\mathrm{e}^{-4x+1}$.

Réponse. $g'(x) = -4\mathrm{e}^{-4x+1}$.

Erreur fréquente. Ne pas oublier le facteur u', ni son signe.

Correction de l'exercice 3 – Logarithme d'une affine

$u = 5x-2 > 0$, $u' = 5$.

$h'(x) = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{5}{5x-2}$.

Réponse. $h'(x) = \dfrac{5}{5x-2}$.

Correction de l'exercice 4 – Carré d'une fonction

$u = x^2+3$, $u' = 2x$: $k'(x) = 2(x^2+3) \times 2x = 4x(x^2+3)$.

En développant : $k(x) = x^4+6x^2+9$, $k'(x) = 4x^3+12x = 4x(x^2+3)$. Même résultat.

Réponse. $k'(x) = 4x(x^2+3)$.

Correction de l'exercice 5 – Deux composées

$f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ (forme $u'\mathrm{e}^u$).

$g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$ (forme $\dfrac{u'}{u}$, $u > 0$).

Réponse. $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$; $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$.

Correction de l'exercice 6 – Produit et maximum

$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

$\mathrm{e}^{-x} > 0$: f' est du signe de $-x-1$, positive pour $x < -1$, négative pour $x > -1$.

Maximum $f(-1) = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2{,}718$.

Réponse. $f'(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$; maximum e en $x = -1$.

Correction de l'exercice 7 – Tangente remarquable

$f(1) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f'(x) = \mathrm{e}^{x-1}$, donc $f'(1) = 1$.

$y = 1 \times (x-1) + 1 = x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $y = x$ (elle passe par l'origine).

Correction de l'exercice 8 – Étude complète

$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$.

Signe de $x(2-x)$: négatif sur $]-\infty\,;0[$, positif sur $]0\,;2[$, négatif sur $]2\,;+\infty[$.

Minimum $f(0) = 0$; maximum local $f(2) = 4e^{-2} \approx 0{,}541$.

Réponse. Décroissante, croissante sur $[0\,;2]$, décroissante ; min 0 en 0, max $4e^{-2}$ en 2.

Correction de l'exercice 9 – Avec un logarithme

$f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x^2-1)}{x} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

Sur $]0\,;+\infty[$, f' est du signe de $x-1$.

Minimum $f(1) = 1 - 0 = 1$.

Réponse. Minimum 1, atteint en $x = 1$.

Correction de l'exercice 10 – La boîte de volume maximal

$V(x) = x(24-2x)^2$ pour $x \in [0\,;12]$.

$V'(x) = (24-2x)^2 + x \times 2(24-2x)(-2) = (24-2x)(24-6x)$.

Sur $[0\,;12]$, $24-2x \geq 0$: V' est du signe de $24-6x$, maximum en $x = 4$.
$V(4) = 4 \times 16^2 = 1\,024$ cm³.

Réponse. $x = 4$ cm, volume 1 024 cm³.

Correction de l'exercice 11 – Pic de concentration

$C'(t) = 8e^{-0{,}25t} + 8t \times (-0{,}25)e^{-0{,}25t} = 8e^{-0{,}25t}(1-0{,}25t)$.

Positive pour $t < 4$, négative pour $t > 4$.

$C(4) = 32e^{-1} \approx 11{,}77$ mg/L.

Réponse. Au bout de 4 h, environ 11,77 mg/L.

Correction de l'exercice 12 – Coût moyen minimal

$C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q} = q + 10 + \dfrac{400}{q}$.

$C_M'(q) = 1 - \dfrac{400}{q^2} = \dfrac{(q-20)(q+20)}{q^2}$: minimum en $q = 20$, $C_M(20) = 50$ €.

$C'(q) = 2q + 10$, $C'(20) = 50$: coût marginal = coût moyen au minimum.

Réponse. $q = 20$ objets, coût moyen 50 € = coût marginal.

Correction de l'exercice 13 – Bénéfice maximal

$B'(x) = -3x^2 + 18x + 21 = -3(x^2 - 6x - 7) = -3(x-7)(x+1)$.

Sur $[0\,;10]$, $x+1 > 0$: $B' > 0$ sur $[0\,;7[$, $B' < 0$ sur $]7\,;10]$.

$B(7) = -343 + 441 + 147 - 50 = 195$.

Réponse. Bénéfice maximal 195 000 €, pour 700 articles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Prix et recette

$R(p) = p(200 - 4p) = 200p - 4p^2$.

$R'(p) = 200 - 8p$, nulle pour $p = 25$, positive avant, négative après.

$R(25) = 25 \times 100 = 2\,500$ €.

Réponse. Prix 25 €, recette 2 500 €.

Correction de l'exercice 15 – Nombre de solutions

$g(x) = xe^{-x}$, $g'(x) = (1 - x)e^{-x}$: g croît sur $[0\,;1]$ de 0 à $\frac{1}{e} \approx 0{,}368$, puis décroît vers 0 (admis).

0,3 est entre 0 et 0,368 : une solution sur $[0\,;1]$, une sur $[1\,;+\infty[$ (TVI, stricte monotonie).

Réponse. Deux solutions.

Correction de l'exercice 16 – Vitesse d'un mobile

Vitesse $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3)$.

$v(t) = 0$ pour $t = 1$ et $t = 3$: le mobile s'arrête.

$v(t) < 0$ sur $]1\,;3[$: il recule entre 1 s et 3 s.

Réponse. Arrêts à 1 s et 3 s ; recul entre 1 s et 3 s.

Correction de l'exercice 17 – Distance minimale

$AM^2 = x^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4$. Minimiser AM revient à minimiser AM^2.

$d(x) = x^4 - 3x^2 + 4$, $d'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$, nulle en 0 et $\pm\sqrt{1{,}5}$.

Minimum en $x^2 = 1{,}5$: $d = 2{,}25 - 4{,}5 + 4 = 1{,}75$, donc $AM = \sqrt{1{,}75} \approx 1{,}32$.

Réponse. Distance minimale $\sqrt{1{,}75} \approx 1{,}32$.

Correction de l'exercice 18 – La canette économique

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2\,000}{r^2}.$$

$S'(r) = 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{500}{\pi} \Leftrightarrow r \approx 5{,}42$ cm ; S' négative avant, positive après.

Hauteur $h = \frac{1\,000}{\pi r^2} \approx 10{,}84$ cm $= 2r$: la canette idéale est aussi haute que large.

Réponse. $r \approx 5{,}42$ cm, $h \approx 10{,}84$ cm.

Correction de l'exercice 19 – Fonction toujours décroissante

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 1 = \frac{2x - x^2 - 1}{x^2 + 1} = -\frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}.$$

Un carré est positif et $x^2 + 1 > 0$: $f'(x) \leq 0$, nulle seulement en 1.

Réponse. $f'(x) = -\frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \leq 0$: f est décroissante.

Correction de l'exercice 20 – Problème complet

$f'(x) = 2e^{-x} - (2x + 1)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x}$: croissante sur $[0\,;0{,}5]$, décroissante ensuite ; maximum $f(0{,}5) = 2e^{-0{,}5} \approx 1{,}213$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f(0) = 1$, $f'(0) = 1$: $y = x + 1$.

$x = 0$ est solution. Sur $[0{,}5\,; +\infty[$, f décroît de 1,213 vers 0 : une autre solution.
$f(1{,}25) - 1 \approx 0{,}003$, $f(1{,}26) - 1 \approx -0{,}002$.

Réponse. Max $2\mathrm{e}^{-0{,}5}$ en 0,5 ; tangente $y = x + 1$; deux solutions : 0 et $\alpha \in]1{,}25\,; 1{,}26[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).