Dérivation et étude de fonctions — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

La dérivation sert à étudier les variations d'une fonction et à résoudre des problèmes d'optimisation : volume maximal, pic de concentration d'un médicament, coût moyen minimal, bénéfice maximal. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires entraînent aux quatre formules du programme, $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$, $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $(u^2)' = 2uu'$, puis aux études de fonctions complètes et aux problèmes concrets.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/derivation-etude-fonctions

Exercice 1 – Composée affine

Dérive $f(x) = (3x+2)^4$.

Exercice 2 – Exponentielle d'une affine

Dérive $g(x) = \mathrm{e}^{-4x+1}$.

Exercice 3 – Logarithme d'une affine

Dérive $h(x) = \ln(5x-2)$ sur $\left]\frac{2}{5}\,;+\infty\right[$.

Exercice 4 – Carré d'une fonction

Dérive $k(x) = (x^2+3)^2$ de deux façons : avec $(u^2)' = 2uu'$, puis en développant.

Exercice 5 – Deux composées

Dérive $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ et $g(x) = \ln(x^2+4)$.

Exercice 6 – Produit et maximum

Soit $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$. Calcule $f'(x)$ et détermine le maximum de f.

Exercice 7 – Tangente remarquable

Détermine la tangente à la courbe de $f(x) = \mathrm{e}^{x-1}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 8 – Étude complète

Étudie les variations de $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ et donne ses extremums.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Avec un logarithme

Soit $f(x) = x^2 - 2\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$. Détermine son minimum.

Exercice 10 – La boîte de volume maximal

Dans un carré de carton de 24 cm de côté, on découpe aux coins des carrés de côté x puis on plie. Quel x donne le volume maximal ?

Exercice 11 – Pic de concentration

La concentration d'un médicament est $C(t) = 8t\,\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ (mg/L, t en heures). Quand est-elle maximale et que vaut-elle ?

Exercice 12 – Coût moyen minimal

Le coût de production de q objets est $C(q) = q^2 + 10q + 400$ (en euros), $q > 0$.

1. Exprime le coût moyen $C_M(q)$.

2. Pour quelle production est-il minimal ?

3. Compare avec le coût marginal en ce point.

Exercice 13 – Bénéfice maximal

Le bénéfice (en milliers d'euros) pour x centaines d'articles est $B(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x - 50$, $x \in [0\,;10]$. Détermine le bénéfice maximal.

Exercice 14 – Prix et recette

Au prix p (en €), on vend $200 - 4p$ objets ($0 \le p \le 50$). Quel prix maximise la recette ?

Exercice 15 – Nombre de solutions

Combien de solutions l'équation $x\,\mathrm{e}^{-x} = 0{,}3$ a-t-elle sur $[0\,;+\infty[$?

Exercice 16 – Vitesse d'un mobile

La position d'un mobile est $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en m, t en s). À quels instants le mobile s'arrête-t-il ? Quand recule-t-il ?

Exercice 17 – Distance minimale

Quelle est la plus petite distance entre le point $A(0\,;2)$ et un point $M(x\,;x^2)$ de la parabole $y = x^2$?

Exercice 18 – La canette économique

Une canette cylindrique doit contenir 1 000 cm³. Sa surface est $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2\,000}{r}$ (r rayon en cm). Quel rayon minimise la quantité de métal ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Fonction toujours décroissante

Montre que $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 – Problème complet

Soit $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ sur $[0\,; +\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations (on admet $\lim_{+\infty} f = 0$).

2. Donne l'équation de la tangente en 0.

3. Combien de solutions a $f(x) = 1$? Encadre la solution non nulle au centième.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).