Fonction logarithme népérien — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Le logarithme népérien, réciproque de l'exponentielle, transforme les produits en sommes : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. C'est l'outil qui permet de résoudre une équation dont l'inconnue est en exposant, de calculer un seuil, une demi-vie ou un temps de doublement. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires vont des simplifications aux études de fonctions, en passant par la datation au carbone 14, le pH et l'algorithme historique de Briggs.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/fonction-logarithme-neperien

Exercice 1 – Simplifier

Simplifie chaque expression.

1. $\ln(\mathrm{e}^5)$

2. $\mathrm{e}^{\ln 3}$

3. $\ln 1 + \ln \mathrm{e}$

Exercice 2 – Avec ln 2 et ln 3

Écris en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$.

1. $\ln 18$

2. $\ln \frac{4}{9}$

3. $\ln \sqrt{8}$

Exercice 3 – Équations simples

Résous dans $\mathbb{R}$: a) $\mathrm{e}^x = 7$; b) $\ln x = -1$.

Exercice 4 – Ensemble de définition

Pour quelles valeurs de x l'expression $\ln(3 - x)$ est-elle définie ?

Exercice 5 – Exposant affine

Résous $\mathrm{e}^{3x-1} = 5$ et donne une valeur approchée au millième.

Exercice 6 – Inéquation avec exposant négatif

Résous $\mathrm{e}^{-0{,}5x} \leq 0{,}2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Inéquation avec logarithme

Résous $\ln(2x+1) > 1$.

Exercice 8 – Somme de logarithmes

Résous $\ln x + \ln(x+2) = \ln 3$.

Exercice 9 – Seuil d'une suite géométrique

Un médicament perd 8 % de son efficacité par mois : $E_n = E_0 \times 0{,}92^n$. Au bout de combien de mois l'efficacité passe-t-elle sous 25 % de sa valeur initiale ?

Exercice 10 – Temps de doublement

Une population augmente de 4 % par an. Au bout de combien d'années aura-t-elle doublé ?

Exercice 11 – Étude d'une fonction

Soit $f(x) = x - 3\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$. Étudie ses variations et donne son minimum.

Exercice 12 – Maximum d'un quotient

Soit $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Montre que $g'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ et déduis-en le maximum de g.

Exercice 13 – Iode radioactif

L'iode 131 a une demi-vie de 8 jours : $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. Calcule λ.

2. Quelle proportion reste-t-il au bout de 30 jours ?

Exercice 14 – Datation au carbone 14

Un fragment de bois contient 30 % du carbone 14 initial. La demi-vie du carbone 14 est 5 730 ans. Estime l'âge du fragment.

Exercice 15 – pH d'une solution

Le pH d'une solution vaut $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H_3O\^{}+}]$, avec $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$. Calcule le pH pour $[\mathrm{H_3O\^{}+}] = 2{,}5 \times 10^{-4}$ mol/L (au centième).

Exercice 16 – Changement de variable

Résous $\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 3 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Courbe sous sa tangente

Soit $h(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Étudie les variations de h.

2. Déduis-en que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$. Interprète graphiquement.

Exercice 18 – Comparer deux puissances

Sans calculatrice puissante, compare 2^{30} et 10^{9} en utilisant $\ln 2 \approx 0{,}6931$ et $\ln 10 \approx 2{,}3026$.

Exercice 19 – L'idée de Briggs

On prend trois fois la racine carrée de 2 : $y = 2^{1/8} \approx 1{,}0905$. Pour y proche de 1, $\ln y \approx y - 1$.

1. Exprime $\ln 2$ en fonction de $\ln y$.

2. Déduis-en une valeur approchée de $\ln 2$ et compare à 0,6931.

Exercice 20 – Problème : une ville qui grandit

La population d'une ville est modélisée par $P(t) = 5\,000\,\mathrm{e}^{0{,}02t}$, t en années.

1. Quel est le pourcentage d'augmentation annuel ?

2. En combien d'années la population atteindra-t-elle 8 000 habitants ?

3. En combien d'années doublera-t-elle ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Simplifier

$\ln(e^x) = x$, donc $\ln(e^5) = 5$.

$e^{\ln a} = a$ pour $a > 0$, donc $e^{\ln 3} = 3$.

$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$: la somme vaut 1.

Réponse. $5 \cdot 3 \cdot 1$.

Correction de l'exercice 2 – Avec ln 2 et ln 3

$18 = 2 \times 3^2$, donc $\ln 18 = \ln 2 + 2\ln 3$.

$\ln \frac{4}{9} = \ln 4 - \ln 9 = 2\ln 2 - 2\ln 3$.

$\ln \sqrt{8} = \frac{1}{2}\ln 8 = \frac{1}{2} \times 3\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2$.

Réponse. $\ln 2 + 2\ln 3 \cdot 2\ln 2 - 2\ln 3 \cdot \frac{3}{2}\ln 2$.

Erreur fréquente. $\ln(a + b)$ n'a pas de règle : seuls produits, quotients et puissances se transforment.

Correction de l'exercice 3 – Équations simples

a) $e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln 7 \approx 1{,}946$.

b) $\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \approx 0{,}368$ (positif, donc valable).

Réponse. a) $x = \ln 7$; b) $x = e^{-1}$.

Correction de l'exercice 4 – Ensemble de définition

Le logarithme n'est défini que pour un nombre strictement positif.

$3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Réponse. Pour $x < 3$, c'est-à-dire sur $]-\infty\,;3[$.

Correction de l'exercice 5 – Exposant affine

On applique ln : $3x - 1 = \ln 5$.

$x = \dfrac{1 + \ln 5}{3} \approx 0{,}870$.

Réponse. $x = \dfrac{1 + \ln 5}{3} \approx 0{,}870$.

Correction de l'exercice 6 – Inéquation avec exposant négatif

ln est croissante : $-0{,}5x \leq \ln 0{,}2$.

On divise par $-0{,}5 < 0$, le sens change : $x \geq \dfrac{\ln 0{,}2}{-0{,}5} = -2\ln 0{,}2 = 2\ln 5 \approx 3{,}219$.

Réponse. $x \geq 2\ln 5 \approx 3{,}219$.

Erreur fréquente. Diviser par un nombre négatif inverse l'inégalité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Inéquation avec logarithme

Domaine : $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

exp est croissante : $2x + 1 > \mathrm{e} \Leftrightarrow x > \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2} \approx 0{,}859$.

Cette condition implique le domaine.

Réponse. $x > \dfrac{\mathrm{e} - 1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Somme de logarithmes

Domaine : $x > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x > 0$.

$\ln(x(x+2)) = \ln 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$.

Seul $x = 1$ est dans le domaine.

Réponse. $S = \{1\}$.

Erreur fréquente. Toujours vérifier les solutions dans le domaine de départ.

Correction de l'exercice 9 – Seuil d'une suite géométrique

$0{,}92^n < 0{,}25 \Leftrightarrow n \ln 0{,}92 < \ln 0{,}25$.

$\ln 0{,}92 < 0$: $n > \dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}92} \approx 16{,}6$.

Réponse. Au bout de 17 mois.

Correction de l'exercice 10 – Temps de doublement

$1{,}04^n \geq 2 \Leftrightarrow n \ln 1{,}04 \geq \ln 2 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}04} \approx 17{,}7$.

Il faut donc 18 ans.

Réponse. 18 ans.

Rappel de cours. Règle pratique : temps de doublement ≈ 70 ÷ taux en %.

Correction de l'exercice 11 – Étude d'une fonction

$f'(x) = 1 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{x-3}{x}$, du signe de $x - 3$ car $x > 0$.

f décroît sur $]0\,;3]$ et croît sur $[3\,;+\infty[$.

Minimum $f(3) = 3 - 3\ln 3 \approx -0{,}296$.

Réponse. Minimum $3 - 3\ln 3 \approx -0{,}296$, atteint en 3.

Correction de l'exercice 12 – Maximum d'un quotient

Quotient : $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < \mathrm{e}$: g croît sur $]0\,;\mathrm{e}]$, décroît ensuite.

Maximum $g(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}368$.

Réponse. Maximum $\frac{1}{\mathrm{e}}$ en $x = \mathrm{e}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Iode radioactif

$e^{-8\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{8} \approx 0{,}0866$ par jour.

$e^{-30\lambda} = 2^{-30/8} \approx 0{,}074$.

Réponse. $\lambda \approx 0{,}0866$; il reste environ 7,4 %.

Correction de l’exercice 14 – Datation au carbone 14

$\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5\,730} = 0{,}3 \Leftrightarrow \frac{t}{5\,730}\ln\frac{1}{2} = \ln 0{,}3$.

$t = 5\,730 \times \frac{\ln 0{,}3}{\ln 0{,}5} \approx 9\,953$ ans.

Réponse. Environ 9 950 ans.

Correction de l’exercice 15 – pH d’une solution

$\log(2{,}5 \times 10^{-4}) = \log 2{,}5 - 4 \approx 0{,}398 - 4 = -3{,}602$.

pH $\approx 3{,}60$.

Réponse. pH $\approx 3{,}60$ (solution acide).

Correction de l’exercice 16 – Changement de variable

On pose $X = e^x > 0$: $X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 3$.

$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

Réponse. $S = \{0\,;\ln 3\}$.

Correction de l’exercice 17 – Courbe sous sa tangente

$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$: h décroît sur $]0\,;1]$, croît ensuite ; minimum $h(1) = 0$.

Donc $h(x) \geq 0$, soit $\ln x \leq x - 1$.

La courbe de ln est sous sa tangente $y = x - 1$ au point d’abscisse 1.

Réponse. $h \geq 0$, donc $\ln x \leq x - 1$: courbe sous sa tangente en 1.

Correction de l’exercice 18 – Comparer deux puissances

ln est croissante : on compare $30\ln 2 \approx 20{,}79$ et $9\ln 10 \approx 20{,}72$.

$30\ln 2 > 9\ln 10$, donc $2^{30} > 10^9$.

Contrôle : $2^{30} = 1\,073\,741\,824$.

Réponse. $2^{30} > 10^9$.

Correction de l’exercice 19 – L’idée de Briggs

$y = 2^{1/8}$ donc $\ln y = \frac{1}{8}\ln 2$, soit $\ln 2 = 8\ln y$.

$\ln 2 \approx 8(y-1) \approx 8 \times 0{,}0905 = 0{,}724$.

L’erreur vient de l’approximation $\ln y \approx y - 1$; avec 20 racines, on obtient 0,693 147.

Réponse. $\ln 2 = 8\ln y \approx 0{,}724$ (contre 0,6931).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 20 – Problème : une ville qui grandit

$\dfrac{P(t+1)}{P(t)} = \mathrm{e}^{0{,}02} \approx 1{,}0202$: environ +2,02 % par an.

$5\,000\,\mathrm{e}^{0{,}02t} = 8\,000 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0{,}02t} = 1{,}6 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 1{,}6}{0{,}02} \approx 23{,}5$ ans.

$\mathrm{e}^{0{,}02t} = 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0{,}02} \approx 34{,}7$ ans.

Réponse. +2,02 % par an ; 8 000 habitants vers 23,5 ans ; doublement en 34,7 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).