Fonctions convexes — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une fonction convexe a une courbe « tournée vers le haut » : sous ses sécantes, au-dessus de ses tangentes. Sa dérivée seconde est positive, sa dérivée croissante. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires apprennent à étudier la convexité avec f'', à trouver un point d'inflexion, à en déduire des inégalités comme $e^x \geq x + 1$ ou $\ln x \leq x - 1$, et à interpréter la convexité en économie et en biologie (coût marginal croissant, ralentissement d'une croissance logistique).

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/fonctions-convexes

Exercice 1 – Calculer une dérivée seconde

Calcule $f''(x)$ pour $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$.

Exercice 2 – Fonctions de référence

Indique si chaque fonction est convexe ou concave sur l'intervalle donné.

1. $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$

2. $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$

3. $x \mapsto \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

4. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 3 – Intervalle de convexité

On sait que $f''(x) = 6x - 12$. Sur quel intervalle f est-elle convexe ?

Exercice 4 – Lire la dérivée

La dérivée f' d'une fonction est décroissante sur $[0\,;5]$. Que peut-on dire de f sur cet intervalle ?

Exercice 5 – Deux points d'inflexion

Étudie la convexité de $f(x) = x^4 - 4x^3$ et donne ses points d'inflexion.

Exercice 6 – Inflexion avec exponentielle

Soit $f(x) = x\,e^x$. Montre que $f''(x) = (x + 2)e^x$ et étudie la convexité de f.

Exercice 7 – Convexité de x ln x

Montre que $f(x) = x \ln x$ est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Inégalité de tangente

L'exponentielle est convexe. Déduis-en que $e^{-0,2} \geq 0,8$.

Exercice 9 – Inflexion d'une cubique

Détermine le point d'inflexion de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Exercice 10 – Inégalité du logarithme

Le logarithme est concave. Montre que $\ln 1,5 \leq 0,5$.

Exercice 11 – Exponentielle moins carré

Étudie la convexité de $f(x) = e^x - x^2$ et donne son point d'inflexion.

Exercice 12 – Croissance logistique

Une population vaut $P(t) = \dfrac{1\,000}{1 + 9e^{-0,5t}}$. On admet que son point d'inflexion est atteint quand $P = 500$. Détermine cet instant et interprète.

Exercice 13 – Racines d'un trinôme

Soit $h(x) = x^2 e^x$. On admet $h''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$. Détermine les abscisses des points d'inflexion.

Exercice 14 – Inégalité de sécante

f est convexe, $f(1) = 2$ et $f(5) = 10$. Que peut-on affirmer sur $f(3)$?

Exercice 15 – Logarithme d'un trinôme

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Montre que $f''(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$ et étudie sa convexité.

Exercice 16 – Coût marginal croissant

Le coût de production est $C(q) = \dfrac{q^3}{3} - 4q^2 + 20q$ ($q \in [0\,;12]$). Sur quel intervalle le coût marginal augmente-t-il ?

Exercice 17 – Position par rapport à une tangente

Soit $f(x) = x^3$ et T sa tangente en 1.

1. Montre que $T : y = 3x - 2$.

2. Montre que $f(x) - (3x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$ et conclus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Dérivée seconde nulle

Pour $f(x) = x^4$, on a $f''(0) = 0$. L'origine est-elle un point d'inflexion ?

Exercice 19 – Convexité et minimum

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x - x$. Montre que f est convexe, puis déduis de $f'(0) = 0$ que f admet un minimum en 0.

Exercice 20 – Étude complète

Soit $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Calcule g' et g''.

2. Étudie la convexité et donne le point d'inflexion I.

3. Détermine la tangente en I.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer une dérivée seconde

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$.

$f''(x) = 6x + 4$.

Réponse. $f''(x) = 6x + 4$.

Correction de l'exercice 2 – Fonctions de référence

$(x^2)'' = 2 > 0$: convexe.

$(e^x)'' = e^x > 0$: convexe.

$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$: concave.

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ décroît : concave.

Réponse. Convexe · convexe · concave · concave.

Correction de l'exercice 3 – Intervalle de convexité

f convexe $\Leftrightarrow f' \geq 0 \Leftrightarrow 6x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Réponse. Sur $[2\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 4 – Lire la dérivée

f convexe $\Leftrightarrow f'$ croissante ; f concave $\Leftrightarrow f'$ décroissante.

Réponse. f est concave sur $[0\,;5]$.

Erreur fréquente. Le sens de variation de f' renseigne sur la convexité, pas sur le sens de variation de f.

Correction de l'exercice 5 – Deux points d'inflexion

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$; $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$.

$f'' \geq 0$ sur $]-\infty\,;0]$ et $[2\,;+\infty[$: convexe ; $f'' \leq 0$ sur $[0\,;2]$: concave.

f'' change de signe en 0 et 2 : points d'inflexion $(0\,;0)$ et $(2\,;-16)$.

Réponse. Convexe hors de $[0\,;2]$, concave sur $[0\,;2]$; inflexions $(0\,;0)$ et $(2\,;-16)$.

Correction de l'exercice 6 – Inflexion avec exponentielle

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$; $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.

$e^x > 0$: signe de $x+2$. Concave sur $]-\infty\,;-2]$, convexe sur $[-2\,;+\infty[$.

Inflexion en $(-2\,;-2e^{-2}) \approx (-2\,;-0{,}271)$.

Réponse. Concave puis convexe ; inflexion en $x = -2$.

Correction de l'exercice 7 – Convexité de x ln x

$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$: f est convexe.

Correction de l'exercice 8 – Inégalité de tangente

Une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes. Tangente en 0 : $y = x + 1$.

Donc $e^x \geq x + 1$; avec $x = -0{,}2$: $e^{-0,2} \geq 0{,}8$.

Contrôle : $e^{-0,2} \approx 0{,}819$.

Réponse. $e^{-0,2} \geq 0{,}8$.

Correction de l'exercice 9 – Inflexion d'une cubique

$f''(x) = 6x - 12$, nulle en 2 avec changement de signe.

$f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$.

Réponse. Point d'inflexion $(2\,;3)$.

Correction de l'exercice 10 – Inégalité du logarithme

Une fonction concave est sous ses tangentes. Tangente en 1 : $y = x - 1$.

$\ln x \leq x - 1$; avec $x = 1{,}5$: $\ln 1{,}5 \leq 0{,}5$. Contrôle : $\ln 1{,}5 \approx 0{,}405$.

Réponse. $\ln 1{,}5 \leq 0{,}5$.

Correction de l'exercice 11 – Exponentielle moins carré

$f''(x) = e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$.

Concave sur $]-\infty\,;\ln 2]$, convexe sur $[\ln 2\,;+\infty[$.

$f(\ln 2) = 2 - (\ln 2)^2 \approx 1{,}520$.

Réponse. Inflexion en $(\ln 2\,;2 - (\ln 2)^2) \approx (0{,}693\,;1{,}520)$.

Correction de l'exercice 12 – Croissance logistique

$P(t) = 500 \Leftrightarrow 1 + 9e^{-0,5t} = 2 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow t = 2\ln 9 \approx 4{,}39$.

Avant, la courbe est convexe (croissance qui accélère) ; après, concave (croissance qui ralentit).

Réponse. $t = 2\ln 9 \approx 4{,}4$ h : la vitesse de croissance y est maximale.

Correction de l'exercice 13 – Racines d'un trinôme

$e^x > 0$: signe de $x^2 + 4x + 2$, de discriminant $16 - 8 = 8$.

Racines $-2 - \sqrt{2} \approx -3{,}41$ et $-2 + \sqrt{2} \approx -0{,}59$, avec changement de signe.

Réponse. $x = -2 - \sqrt{2}$ et $x = -2 + \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Inégalité de sécante

Une fonction convexe est sous ses sécantes : $f\left(\frac{1+5}{2}\right) \leq \frac{f(1)+f(5)}{2}$.

$f(3) \leq 6$.

Réponse. $f(3) \leq 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Logarithme d’un trinôme

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$; quotient : $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

Signe de $2-2x^2$: positif sur $[-1\,;1]$, négatif ailleurs.

Réponse. Convexe sur $[-1\,;1]$, concave ailleurs ; inflexions en ± 1.

Correction de l’exercice 16 – Coût marginal croissant

Coût marginal $C'(q) = q^2 - 8q + 20$.

$C''(q) = 2q - 8 \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 4$: C est convexe et C' croissante sur $[4\,;12]$.

Réponse. À partir de $q = 4$: chaque unité coûte alors de plus en plus cher.

Correction de l’exercice 17 – Position par rapport à une tangente

$f(1) = 1$, $f'(1) = 3$: $y = 3(x-1) + 1 = 3x - 2$.

$(x-1)^2(x+2) = (x^2 - 2x + 1)(x+2) = x^3 - 3x + 2$. C’est positif pour $x \geq -2$.

Réponse. La courbe est au-dessus de T pour $x \geq -2$, en dessous pour $x < -2$.

Correction de l’exercice 18 – Dérivée seconde nulle

$f''(x) = 12x^2 \geq 0$ pour tout x : f' ne change pas de signe.

f est convexe sur $\mathbb{R}$: pas de changement de convexité.

Réponse. Non : il faut que f' change de signe.

Correction de l’exercice 19 – Convexité et minimum

$f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$: f est convexe, donc f' est croissante.

$f'(0) = 0$: $f' \leq 0$ avant 0, $f' \geq 0$ après. Minimum $f(0) = 1$.

Réponse. Minimum 1 en 0 ; d’où $\mathrm{e}^x \geq x + 1$.

Correction de l’exercice 20 – Étude complète

$g'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$; $g''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

Concave sur $]-\infty\,;2]$, convexe sur $[2\,;+\infty[$; $I(2\,;2\mathrm{e}^{-2})$.

$g'(2) = -\mathrm{e}^{-2}$: $y = -\mathrm{e}^{-2}(x-2) + 2\mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-2}(4-x)$.

Réponse. $I(2\,;2\mathrm{e}^{-2})$; tangente $y = \mathrm{e}^{-2}(4-x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).