Fonctions convexes — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Une fonction convexe a une courbe « tournée vers le haut » : sous ses sécantes, au-dessus de ses tangentes. Sa dérivée seconde est positive, sa dérivée croissante. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires apprennent à étudier la convexité avec f'', à trouver un point d'inflexion, à en déduire des inégalités comme $e^x \geq x+1$ ou $\ln x \leq x-1$, et à interpréter la convexité en économie et en biologie (coût marginal croissant, ralentissement d'une croissance logistique).

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/fonctions-convexes

Exercice 1 – Calculer une dérivée seconde

Calcule $f''(x)$ pour $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$.

Exercice 2 – Fonctions de référence

Indique si chaque fonction est convexe ou concave sur l'intervalle donné.

1. $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$

2. $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$

3. $x \mapsto \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

4. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 3 – Intervalle de convexité

On sait que $f''(x) = 6x - 12$. Sur quel intervalle f est-elle convexe ?

Exercice 4 – Lire la dérivée

La dérivée f' d'une fonction est décroissante sur $[0\,;5]$. Que peut-on dire de f sur cet intervalle ?

Exercice 5 – Deux points d'inflexion

Étudie la convexité de $f(x) = x^4 - 4x^3$ et donne ses points d'inflexion.

Exercice 6 – Inflexion avec exponentielle

Soit $f(x) = x\,e^x$. Montre que $f''(x) = (x+2)e^x$ et étudie la convexité de f.

Exercice 7 – Convexité de x ln x

Montre que $f(x) = x\ln x$ est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Inégalité de tangente

L'exponentielle est convexe. Déduis-en que $e^{-0,2} \geq 0,8$.

Exercice 9 – Inflexion d'une cubique

Détermine le point d'inflexion de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Exercice 10 – Inégalité du logarithme

Le logarithme est concave. Montre que $\ln 1,5 \leq 0,5$.

Exercice 11 – Exponentielle moins carré

Étudie la convexité de $f(x) = e^x - x^2$ et donne son point d'inflexion.

Exercice 12 – Croissance logistique

Une population vaut $P(t) = \dfrac{1\,000}{1 + 9e^{-0,5t}}$. On admet que son point d'inflexion est atteint quand $P = 500$. Détermine cet instant et interprète.

Exercice 13 – Racines d'un trinôme

Soit $h(x) = x^2 e^x$. On admet $h''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$. Détermine les abscisses des points d'inflexion.

Exercice 14 – Inégalité de sécante

f est convexe, $f(1) = 2$ et $f(5) = 10$. Que peut-on affirmer sur $f(3)$?

Exercice 15 – Logarithme d'un trinôme

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Montre que $f''(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$ et étudie sa convexité.

Exercice 16 – Coût marginal croissant

Le coût de production est $C(q) = \dfrac{q^3}{3} - 4q^2 + 20q$ ($q \in [0\,;12]$). Sur quel intervalle le coût marginal augmente-t-il ?

Exercice 17 – Position par rapport à une tangente

Soit $f(x) = x^3$ et T sa tangente en 1.

1. Montre que $T : y = 3x - 2$.

2. Montre que $f(x) - (3x - 2) = (x - 1)^2(x + 2)$ et conclus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Dérivée seconde nulle

Pour $f(x) = x^4$, on a $f''(0) = 0$. L'origine est-elle un point d'inflexion ?

Exercice 19 – Convexité et minimum

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x - x$. Montre que f est convexe, puis déduis de $f'(0) = 0$ que f admet un minimum en 0.

Exercice 20 – Étude complète

Soit $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Calcule g' et g''.

2. Étudie la convexité et donne le point d'inflexion I.

3. Détermine la tangente en I.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).