Limites, continuité et théorème des valeurs intermédiaires — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Que devient une population, une température ou un coût quand le temps ou la production deviennent très grands ? Combien de solutions a une équation qu'on ne sait pas résoudre ? Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires travaillent les limites des fonctions de référence, les asymptotes, les formes indéterminées, le théorème des valeurs intermédiaires et son cas strictement monotone, et les méthodes d'encadrement d'une solution : balayage, dichotomie et méthode de Newton.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/limites-continuite

Exercice 1 – Limites de référence

Détermine chaque limite.

1. $\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right)$

2. $\lim_{x \to -\infty} x^3$

3. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}$

Exercice 2 – Asymptotes d'une fonction homographique

Soit $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$ sur $]-2\,;+\infty[$. Détermine les limites de f en -2 et en $+\infty$, puis interprète.

Exercice 3 – Limites avec l'exponentielle

Détermine $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x}$ et $\lim_{x \to +\infty} (5 + 3\mathrm{e}^{-x})$.

Exercice 4 – Limite d'un polynôme

Détermine $\lim_{x \to +\infty} \left(-2x^3 + x\right)$.

Exercice 5 – Quotient de même degré

Détermine $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3}$.

Exercice 6 – Quotient de degrés différents

Détermine $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Croissance logistique

Une population de bactéries (en milliers) vaut $P(t) = \dfrac{500}{1 + 4\mathrm{e}^{-0{,}3t}}$, t en heures. Calcule $P(0)$ et la limite de P en $+\infty$. Interprète.

Exercice 8 – Existence d'une solution

Soit $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[2\,;3]$.

Exercice 9 – Unicité et encadrement

Avec $f(x) = x^3 - 2x - 5$ sur $[2\,;3]$:

1. Montre que f est strictement croissante sur $[2\,;3]$.

2. Déduis-en que la solution α est unique.

3. Encadre α au centième.

Exercice 10 – Compter les solutions

Une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ a le tableau de variations suivant : croissante de $-\infty$ à 4 sur $]-\infty\,;0]$, décroissante de 4 à -2 sur $[0\,;3]$, croissante de -2 à $+\infty$ sur $[3\,;+\infty[$.

1. Combien de solutions a $f(x) = 0$?

2. Et $f(x) = 5$?

3. Et $f(x) = -2$?

Exercice 11 – Dichotomie

On cherche la solution α de $x^3 + x - 3 = 0$ dans $[1\,;2]$ par dichotomie. Effectue les trois premières étapes.

Exercice 12 – Méthode de Newton

Pour approcher $\sqrt{2}$, solution positive de $x^2 - 2 = 0$, on applique la méthode de Newton $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ avec $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$. Calcule x_1, x_2, x_3.

Exercice 13 – Coût de production

Le coût de q centaines d'objets est $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 10$ (milliers d'euros), $q \in [0\,;8]$.

1. Montre que C est strictement croissante sur $[0\,;8]$.

2. Montre qu'il existe une unique production q_0 telle que $C(q_0) = 100$, puis calcule $C(6)$.

Exercice 14 – Refroidissement

La température d'un café est $T(t) = 20 + 60\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ (°C, t en minutes).

1. Détermine la limite de T en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Justifie que le café atteint 50 °C une seule fois et encadre cet instant entre deux entiers.

Exercice 15 – Racine cubique

La fonction cube est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Justifie que l'équation $x^3 = 20$ a une unique solution, puis donne une valeur approchée au millième.

Exercice 16 – Deux solutions

Soit $g(x) = \mathrm{e}^x - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudie les variations de g.

2. Montre que $g(x) = 0$ a exactement deux solutions.

3. Encadre chacune au centième.

Exercice 17 – Composition de limites

Détermine $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

Exercice 18 – Quand la continuité manque

Soit $h(x) = x$ pour $x < 1$ et $h(x) = x + 2$ pour $x \geq 1$. On a $h(0) = 0$ et $h(2) = 4$. L'équation $h(x) = 2$ a-t-elle une solution dans $[0\,;2]$?

Exercice 19 – Une équation avec exponentielle

Soit $k(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;1]$. Montre que $k(x) = 0$ a une unique solution α et encadre-la au centième.

Exercice 20 – Problème complet : le seuil logistique

On reprend $P(t) = \dfrac{500}{1 + 4\mathrm{e}^{-0{,}3t}}$.

1. Montre que P est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. Justifie que la population atteint 400 milliers une seule fois.

3. Encadre cet instant entre deux heures entières.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Limites de référence

$\frac{1}{x} \to 0$ en $+\infty$, donc la limite vaut 3.

Le cube d'un grand nombre négatif est très négatif : $-\infty$.

$x^2 \to 0^+$ donc $\frac{1}{x^2} \to +\infty$.

Réponse. $3 \cdot -\infty \cdot +\infty$.

Correction de l'exercice 2 – Asymptotes d'une fonction homographique

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \to 4$. La droite $y = 4$ est asymptote horizontale.

En -2^+ : le numérateur tend vers -9 et $x + 2 \to 0^+$, donc $f(x) \to -\infty$. La droite $x = -2$ est asymptote verticale.

Réponse. $\lim_{-2^+} f = -\infty$ (asymptote $x = -2$) ; $\lim_{+\infty} f = 4$ (asymptote $y = 4$).

Correction de l'exercice 3 – Limites avec l'exponentielle

$-2x \to -\infty$ et $\mathrm{e}^X \to 0$ quand $X \to -\infty$: $\mathrm{e}^{-2x} \to 0$.

$\mathrm{e}^{-x} \to 0$, donc $5 + 3\mathrm{e}^{-x} \to 5$.

Réponse. 0 et 5.

Correction de l'exercice 4 – Limite d'un polynôme

Forme « $-\infty + \infty$ » : on factorise par le terme dominant.

$-2x^3 + x = x^3\left(-2 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, avec $x^3 \to +\infty$ et la parenthèse $\to -2$.

Réponse. $-\infty$.

Rappel de cours. Un polynôme a la même limite en l'infini que son terme de plus haut degré.

Correction de l'exercice 5 – Quotient de même degré

On factorise par x^2 : $\dfrac{1 + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{3}{x^2}}$.

Numérateur $\to 1$, dénominateur $\to 2$.

Réponse. $\frac{1}{2}$: asymptote horizontale $y = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Quotient de degrés différents

$$\frac{x+1}{x^2+4} = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{x\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}.$$

Le numérateur tend vers 1, le dénominateur vers $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. 0.

Correction de l'exercice 7 – Croissance logistique

$P(0) = \dfrac{500}{1+4} = 100$.

$e^{-0,3t} \to 0$, donc $1 + 4e^{-0,3t} \to 1$ et $P(t) \to 500$.

La population part de 100 milliers et plafonne à 500 milliers : asymptote $y = 500$.

Réponse. $P(0) = 100$; $\lim P = 500$: capacité maximale du milieu.

Correction de l'exercice 8 – Existence d'une solution

f est un polynôme, donc continue sur $[2\,;3]$.

$f(2) = 8 - 4 - 5 = -1 < 0$ et $f(3) = 27 - 6 - 5 = 16 > 0$.

0 est compris entre $f(2)$ et $f(3)$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $\alpha \in [2\,;3]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Réponse. Au moins une solution dans $[2\,;3]$.

Correction de l'exercice 9 – Unicité et encadrement

$f'(x) = 3x^2 - 2 \geq 3 \times 4 - 2 = 10 > 0$ sur $[2\,;3]$.

f est continue et strictement croissante, et 0 est entre $f(2)$ et $f(3)$: la solution est unique.

$f(2{,}09) \approx -0{,}051 < 0$ et $f(2{,}10) \approx 0{,}061 > 0$, donc $2{,}09 < \alpha < 2{,}10$.

Réponse. Solution unique, $2{,}09 < \alpha < 2{,}10$ ($\alpha \approx 2{,}0946$).

Correction de l'exercice 10 – Compter les solutions

$f(x) = 0$: 0 est atteint une fois sur chacun des trois intervalles (images $]-\infty\,;4]$, $[-2\,;4]$, $[-2\,;+\infty[$) : 3 solutions.

$f(x) = 5$: 5 dépasse le maximum local 4, il n'est atteint que sur $[3\,;+\infty[$: 1 solution.

$f(x) = -2$: une fois sur $]-\infty\,;0]$, et en $x = 3$ (minimum, commun aux deux derniers intervalles) : 2 solutions.

Réponse. 3 solutions · 1 solution · 2 solutions.

Erreur fréquente. Un extremum atteint exactement ne compte qu'une seule fois.

Correction de l'exercice 11 – Dichotomie

$g(x) = x^3 + x - 3$: $g(1) = -1 < 0$, $g(2) = 7 > 0$.

Milieu 1,5 : $g(1{,}5) \approx 1{,}875 > 0 \to$ on garde $[1\,;1{,}5]$.

Milieu 1,25 : $g(1{,}25) \approx 0{,}203 > 0 \to [1\,;1{,}25]$. Milieu 1,125 : $g(1{,}125) \approx -0{,}451 < 0 \to [1{,}125\,;1{,}25]$.

Réponse. $1{,}125 < \alpha < 1{,}25$ après trois étapes.

Correction de l'exercice 12 – Méthode de Newton

$f'(x) = 2x$, donc $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}$.

$x_1 = 1 - \dfrac{-1}{2} = 1{,}5$; $x_2 = 1{,}5 - \dfrac{0{,}25}{3} \approx 1{,}416\,67$; $x_3 \approx 1{,}414\,216$.

$\sqrt{2} \approx 1{,}414\,214$: la méthode converge très vite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $x_1 = 1{,}5$; $x_2 \approx 1{,}416\,67$; $x_3 \approx 1{,}414\,216$.

Correction de l'exercice 13 – Coût de production

$C'(q) = 3q^2 - 12q + 15 = 3\left((q-2)^2 + 1\right) > 0$.

C est continue, strictement croissante, $C(0) = 10$ et $C(8) = 258$: 100 est atteint une seule fois.

$C(6) = 216 - 216 + 90 + 10 = 100$, donc $q_0 = 6$.

Réponse. $q_0 = 6$, soit 600 objets.

Correction de l'exercice 14 – Refroidissement

$\mathrm{e}^{-0{,}1t} \to 0$, donc $T(t) \to 20$: le café tend vers la température de la pièce.

$T'(t) = -6\mathrm{e}^{-0{,}1t} < 0$: T est continue et strictement décroissante, de $T(0) = 80$ vers 20. 50 est atteint une seule fois.

$T(6) \approx 52{,}9$ et $T(7) \approx 49{,}8$: l'instant est entre 6 et 7 minutes.

Réponse. Limite 20 °C ; 50 °C atteint entre 6 et 7 minutes.

Correction de l'exercice 15 – Racine cubique

$x^3 \to -\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$: 20 est atteint une seule fois.

La solution est $\sqrt[3]{20}$, image de 20 par la réciproque de la fonction cube.

$2{,}714^3 \approx 19{,}991$ et $2{,}715^3 \approx 20{,}013$: $\sqrt[3]{20} \approx 2{,}714$.

Réponse. Unique solution $\sqrt[3]{20} \approx 2{,}714$.

Correction de l'exercice 16 – Deux solutions

$g'(x) = \mathrm{e}^x - 3$, négatif pour $x < \ln 3$, positif ensuite : minimum
$g(\ln 3) = 3 - 3\ln 3 \approx -0{,}30 < 0$.

$g \to +\infty$ en $-\infty$ (car $-3x \to +\infty$) et on admet $g \to +\infty$ en $+\infty$. Sur chaque intervalle de monotonie, g continue passe d'une valeur positive à une valeur négative ou l'inverse : une solution sur chacun.

$g(0{,}61) \approx 0{,}010$, $g(0{,}62) \approx -0{,}001$; $g(1{,}51) \approx -0{,}003$, $g(1{,}52) \approx 0{,}012$.

Réponse. Deux solutions : $0{,}61 < \alpha < 0{,}62$ et $1{,}51 < \beta < 1{,}52$.

Correction de l'exercice 17 – Composition de limites

Quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, et $\mathrm{e}^X \to \mathrm{e}^0 = 1$ quand $X \to 0$: limite 1.

Quand $x \to 0^+$, $-\frac{1}{x} \to -\infty$, et $\mathrm{e}^X \to 0$ quand $X \to -\infty$: limite 0.

Réponse. 1 et 0.

Rappel de cours. On compose les limites étape par étape : limite de l'intérieur, puis de la fonction extérieure.

Correction de l'exercice 18 – Quand la continuité manque

Pour $x < 1$, $h(x) < 1$; pour $x \geq 1$, $h(x) \geq 3$.

La valeur 2 n'est jamais atteinte, bien qu'elle soit entre $h(0)$ et $h(2)$.

Ce n'est pas une contradiction : h n'est pas continue en 1, le théorème ne s'applique pas.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Non : sans continuité, le TVI ne s'applique pas.

Correction de l'exercice 19 – Une équation avec exponentielle

$k'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$: k est continue et strictement croissante.

$k(0) = -1 < 0$ et $k(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632 > 0$: unique solution.

$k(0{,}56) \approx -0{,}011 < 0$ et $k(0{,}57) \approx 0{,}004 > 0$.

Réponse. $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$ ($\alpha \approx 0{,}567$).

Correction de l'exercice 20 – Problème complet : le seuil logistique

$P'(t) = \dfrac{500 \times 1{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}}{(1 + 4\mathrm{e}^{-0{,}3t})^2} > 0$ (dérivée de $\frac{1}{u}$: $-\frac{u'}{u^2}$, avec $u' = -1{,}2\mathrm{e}^{-0{,}3t}$).

P est continue, strictement croissante, de $P(0) = 100$ vers 500 : 400 est atteint une seule fois.

$P(9) \approx 394{,}1$ et $P(10) \approx 417{,}0$: entre 9 h et 10 h.

Réponse. 400 milliers atteints une seule fois, entre 9 h et 10 h ($t \approx 9{,}24$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).