Limites, continuité et théorème des valeurs intermédiaires — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Que devient une population, une température ou un coût quand le temps ou la production deviennent très grands ? Combien de solutions a une équation qu'on ne sait pas résoudre ? Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires travaillent les limites des fonctions de référence, les asymptotes, les formes indéterminées, le théorème des valeurs intermédiaires et son cas strictement monotone, et les méthodes d'encadrement d'une solution : balayage, dichotomie et méthode de Newton.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/limites-continuite

Exercice 1 – Limites de référence

Détermine chaque limite.

1. $\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right)$

2. $\lim_{x \to -\infty} x^3$

3. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}$

Exercice 2 – Asymptotes d'une fonction homographique

Soit $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$ sur $]-2\,;+\infty[$. Détermine les limites de f en -2 et en $+\infty$, puis interprète.

Exercice 3 – Limites avec l'exponentielle

Détermine $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x}$ et $\lim_{x \to +\infty} (5 + 3\mathrm{e}^{-x})$.

Exercice 4 – Limite d'un polynôme

Détermine $\lim_{x \to +\infty} \left(-2x^3 + x\right)$.

Exercice 5 – Quotient de même degré

Détermine $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3}$.

Exercice 6 – Quotient de degrés différents

Détermine $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Croissance logistique

Une population de bactéries (en milliers) vaut $P(t) = \dfrac{500}{1 + 4\mathrm{e}^{-0{,}3t}}$, t en heures. Calcule $P(0)$ et la limite de P en $+\infty$. Interprète.

Exercice 8 – Existence d'une solution

Soit $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[2\,;3]$.

Exercice 9 – Unicité et encadrement

Avec $f(x) = x^3 - 2x - 5$ sur $[2\,;3]$:

1. Montre que f est strictement croissante sur $[2\,;3]$.

2. Déduis-en que la solution α est unique.

3. Encadre α au centième.

Exercice 10 – Compter les solutions

Une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ a le tableau de variations suivant : croissante de $-\infty$ à 4 sur $]-\infty\,;0]$, décroissante de 4 à -2 sur $[0\,;3]$, croissante de -2 à $+\infty$ sur $[3\,;+\infty[$.

1. Combien de solutions a $f(x) = 0$?

2. Et $f(x) = 5$?

3. Et $f(x) = -2$?

Exercice 11 – Dichotomie

On cherche la solution α de $x^3 + x - 3 = 0$ dans $[1\,;2]$ par dichotomie. Effectue les trois premières étapes.

Exercice 12 – Méthode de Newton

Pour approcher $\sqrt{2}$, solution positive de $x^2 - 2 = 0$, on applique la méthode de Newton $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ avec $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$. Calcule x_1, x_2, x_3.

Exercice 13 – Coût de production

Le coût de q centaines d'objets est $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 10$ (milliers d'euros), $q \in [0\,;8]$.

1. Montre que C est strictement croissante sur $[0\,;8]$.

2. Montre qu'il existe une unique production q_0 telle que $C(q_0) = 100$, puis calcule $C(6)$.

Exercice 14 – Refroidissement

La température d'un café est $T(t) = 20 + 60\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ (°C, t en minutes).

1. Détermine la limite de T en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Justifie que le café atteint 50 °C une seule fois et encadre cet instant entre deux entiers.

Exercice 15 – Racine cubique

La fonction cube est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Justifie que l'équation $x^3 = 20$ a une unique solution, puis donne une valeur approchée au millième.

Exercice 16 – Deux solutions

Soit $g(x) = \mathrm{e}^x - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudie les variations de g.

2. Montre que $g(x) = 0$ a exactement deux solutions.

3. Encadre chacune au centième.

Exercice 17 – Composition de limites

Détermine $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

Exercice 18 – Quand la continuité manque

Soit $h(x) = x$ pour $x < 1$ et $h(x) = x + 2$ pour $x \geq 1$. On a $h(0) = 0$ et $h(2) = 4$. L'équation $h(x) = 2$ a-t-elle une solution dans $[0\,;2]$?

Exercice 19 – Une équation avec exponentielle

Soit $k(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;1]$. Montre que $k(x) = 0$ a une unique solution α et encadre-la au centième.

Exercice 20 – Problème complet : le seuil logistique

On reprend $P(t) = \dfrac{500}{1 + 4\mathrm{e}^{-0{,}3t}}$.

1. Montre que P est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. Justifie que la population atteint 400 milliers une seule fois.

3. Encadre cet instant entre deux heures entières.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).