Loi binomiale et échantillonnage — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Répéter une même épreuve à deux issues de façon indépendante, c'est un schéma de Bernoulli ; le nombre de succès suit une loi binomiale $B(n, p)$. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires entraînent à reconnaître la situation, à calculer $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, l'espérance np et l'écart type, puis à prendre une décision : intervalle de fluctuation, test d'une pièce, surréservation d'un avion, fourchette de sondage et simulation en Python.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/loi-binomiale-echantillonnage

Exercice 1 – Espérance d'une loi uniforme

On tire au hasard un numéro entre 1 et 10. Quelle est l'espérance du numéro obtenu ?

Exercice 2 – Loi de Bernoulli

Un joueur réussit un lancer franc avec la probabilité 0,7. On note X la variable qui vaut 1 en cas de réussite, 0 sinon. Donne la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 3 – Triangle de Pascal

Construis la ligne $n = 7$ du triangle de Pascal à partir de la ligne 6 (1, 6, 15, 20, 15, 6, 1), puis donne $\binom{7}{3}$ et $\binom{7}{4}$.

Exercice 4 – Reconnaître une loi binomiale

Dans chaque cas, dis si X suit une loi binomiale et précise ses paramètres.

1. X = nombre de « pile » en 12 lancers d'une pièce équilibrée.

2. X = nombre de lancers d'un dé nécessaires pour obtenir un 6.

3. X = nombre de garçons parmi 3 enfants tirés sans remise d'un groupe de 5 enfants dont 2 garçons.

Exercice 5 – Calculer une probabilité

$X \sim B(8\,;0{,}4)$. Calcule $P(X = 3)$ au millième, puis $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 6 – Au moins un succès

Un archer touche la cible avec la probabilité 0,3 à chaque tir. Il tire 5 fois, de façon indépendante. Calcule la probabilité qu'il touche au moins une fois, puis exactement

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

deux fois.

Exercice 7 – Loi complète pour n = 4

On lance 4 fois une pièce équilibrée. Donne la loi du nombre X de « pile » et vérifie que $E(X) = 2$.

Exercice 8 – Au moins deux six

On lance 12 fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux 6 (au millième) ?

Exercice 9 – Contrôle de production

10 % des pièces d'une grande production sont défectueuses. On en prélève 20 au hasard (assimilé à un tirage avec remise). Calcule la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse, puis d'en avoir au plus 2 (calculatrice).

Exercice 10 – QCM au hasard

Un QCM de 20 questions propose 4 réponses dont une seule juste. Un élève répond au hasard. Combien de bonnes réponses obtient-il en moyenne ? Avec la calculatrice, quelle est la probabilité qu'il ait au moins 10 bonnes réponses ?

Exercice 11 – Intervalle de fluctuation

On lance 50 fois une pièce. Si elle est équilibrée, $X \sim B(50\,;0{,}5)$. La calculatrice donne $P(18 \leq X \leq 32) \approx 0{,}967$ et $P(19 \leq X \leq 31) \approx 0{,}935$. Propose un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %.

Exercice 12 – Pièce truquée ?

Avec $I = [18\,;32]$, on obtient 34 « pile » en 50 lancers. Que conclure au seuil de 5 % ? Et avec 30 « pile » ?

Exercice 13 – Surréservation

Un avion a 100 places. Chaque passager ayant réservé se présente avec la probabilité 0,9, indépendamment des autres. La calculatrice donne, pour n billets vendus, $P(X > 100) \approx 0{,}040$ pour $n = 106$ et $\approx 0{,}081$ pour $n = 107$. Combien de billets la compagnie peut-elle vendre en gardant un risque de surréservation inférieur à 5 % ?

Exercice 14 – Seuil unilatéral

Un standard reçoit 30 appels ; chacun concerne une réclamation avec la probabilité 0,2. On veut prévoir assez de conseillers pour traiter, avec une probabilité d'au moins 95 %, toutes les réclamations. Sachant $P(X \leq 9) \approx 0{,}939$ et $P(X \leq 10) \approx 0{,}974$, combien de réclamations faut-il pouvoir traiter ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Fourchette de sondage

Un sondage auprès de 900 personnes tirées au hasard donne 46 % d'avis favorables. Donne une fourchette à environ 95 %.

Exercice 16 – Taille d'un échantillon

Combien de personnes faut-il interroger au minimum pour une fourchette de ±4 points ?

Exercice 17 – Simulation en Python

Que fait la fonction suivante ? Que renvoie-t-elle en moyenne pour <code>n = 100</code> et <code>p = 0.3</code> ?
<code>from random import random
def succes(n, p):
  s = 0
  for i in range(n):
    if random() < p:
      s = s + 1
  return s</code>

Exercice 18 – Espérance pour n = 2

Pour $X \sim B(2, p)$, écris la loi de X et démontre que $E(X) = 2p$.

Exercice 19 – Variance maximale

Montre que la variance $p(1 - p)$ d'une loi de Bernoulli est maximale pour $p = 0{,}5$. Pourquoi la fourchette de sondage utilise-t-elle $\frac{1}{\sqrt{n}}$?

Exercice 20 – Problème complet : le vaccin

Un vaccin provoque une réaction bénigne chez 4 % des patients. Un centre vaccine 150 personnes ; on note X le nombre de réactions.

1. Justifie que X suit une loi binomiale et donne son espérance.

2. Calcule $P(X = 0)$.

3. Le centre observe 14 réactions. Sachant $P(X \leq 12) \approx 0{,}992$, cette observation est-elle surprenante ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Espérance d'une loi uniforme

Loi uniforme sur $\{1, \dots, 10\}$: $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

$E(X) = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$.

Réponse. $E(X) = 5{,}5$.

Correction de l'exercice 2 – Loi de Bernoulli

$P(X = 1) = 0{,}7$, $P(X = 0) = 0{,}3$: loi de Bernoulli de paramètre 0,7.

$E(X) = 0{,}7$; $V(X) = 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$.

Réponse. Bernoulli(0,7) ; $E = 0{,}7$; $V = 0{,}21$.

Correction de l'exercice 3 – Triangle de Pascal

Chaque nombre est la somme des deux du dessus : 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

$\binom{7}{3} = 35$ et, par symétrie, $\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$.

Réponse. Ligne 7 : 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 ; $\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$.

Correction de l'exercice 4 – Reconnaître une loi binomiale

12 épreuves indépendantes, succès « pile », $p = 0{,}5$: $B(12\,;0{,}5)$.

On compte des épreuves jusqu'au premier succès : loi géométrique, pas binomiale.

Tirage sans remise dans un petit groupe : les épreuves ne sont pas indépendantes, pas binomiale.

Réponse. Oui, $B(12\,;0{,}5)$ · non (géométrique) · non (sans remise).

Correction de l'exercice 5 – Calculer une probabilité

$P(X = 3) = \binom{8}{3} \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^5 = 56 \times 0{,}064 \times 0{,}077\,76 \approx 0{,}279$.

$E(X) = 8 \times 0{,}4 = 3{,}2$; $\sigma(X) = \sqrt{8 \times 0{,}4 \times 0{,}6} = \sqrt{1{,}92} \approx 1{,}39$.

Réponse. $P(X = 3) \approx 0{,}279$; $E = 3{,}2$; $\sigma \approx 1{,}39$.

Erreur fréquente. Ne pas oublier le coefficient binomial $\binom{8}{3} = 56$.

Correction de l'exercice 6 – Au moins un succès

$X \sim B(5\,;0{,}3)$. $P(X = 0) = 0{,}7^5 \approx 0{,}168$, donc $P(X \geq 1) \approx 0{,}832$.

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^3 = 10 \times 0{,}09 \times 0{,}343 \approx 0{,}309$.

Réponse. $P(X \geq 1) \approx 0{,}832$; $P(X = 2) \approx 0{,}309$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Loi complète pour n = 4

$P(X=k)=\binom{4}{k}\times 0{,}5^4$: coefficients 1, 4, 6, 4, 1 sur 16.

$P(X=0)=0{,}0625$, $P(X=1)=0{,}25$, $P(X=2)=0{,}375$, $P(X=3)=0{,}25$, $P(X=4)=0{,}0625$.

$E(X)=0{,}25+0{,}75+0{,}75+0{,}25=2=4\times 0{,}5$.

Réponse. Probabilités 0,0625 ; 0,25 ; 0,375 ; 0,25 ; 0,0625 ; $E(X)=2$.

Correction de l’exercice 8 – Au moins deux six

$X\sim B\left(12\,;\frac{1}{6}\right)$. $P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$.

$P(X=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^{12}\approx 0{,}112$; $P(X=1)=12\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{11}\approx 0{,}269$.

$P(X\geq 2)\approx 1-0{,}112-0{,}269\approx 0{,}619$.

Réponse. $P(X\geq 2)\approx 0{,}619$.

Correction de l’exercice 9 – Contrôle de production

$X\sim B(20\,;0{,}1)$: $P(X=0)=0{,}9^{20}\approx 0{,}122$.

Calculatrice : $P(X\leq 2)\approx 0{,}677$.

Réponse. $P(X=0)\approx 0{,}122$; $P(X\leq 2)\approx 0{,}677$.

Correction de l’exercice 10 – QCM au hasard

$X\sim B(20\,;0{,}25)$: $E(X)=5$.

$P(X\geq 10)=1-P(X\leq 9)\approx 0{,}014$.

Réponse. En moyenne 5 ; $P(X\geq 10)\approx 0{,}014$.

Correction de l’exercice 11 – Intervalle de fluctuation

On cherche le plus petit intervalle centré en 25 de probabilité au moins 0,95.

[19 ; 31] ne suffit pas (0,935) ; [18 ; 32] convient (0,967).

Réponse. $I=[18\,;32]$.

Correction de l’exercice 12 – Pièce truquée ?

34 n’est pas dans I : on rejette l’hypothèse « pièce équilibrée », avec un risque d’erreur inférieur à 5 %.

30 est dans I : on ne rejette pas l’hypothèse (ce qui ne prouve pas que la pièce est équilibrée).

Réponse. 34 : rejet ; 30 : pas de rejet.

Correction de l’exercice 13 – Surréservation

Le nombre de présents suit $B(n\,;0{,}9)$; il y a surréservation si $X>100$.

Pour 106 billets, le risque est 4 % ; pour 107, il dépasse 5 %.

Réponse. Au plus 106 billets.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Seuil unilatéral

$X \sim B(30\,;0{,}2)$. On cherche le plus petit k tel que $P(X \leq k) \geq 0{,}95$.

$P(X \leq 9) < 0{,}95 \leq P(X \leq 10)$.

Réponse. 10 réclamations.

Correction de l'exercice 15 – Fourchette de sondage

$\frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{30} \approx 0{,}033$.

Fourchette $[0{,}46 - 0{,}033\,;0{,}46 + 0{,}033] \approx [0{,}427\,;0{,}493]$.

Réponse. Entre 42,7 % et 49,3 % environ.

Correction de l'exercice 16 – Taille d'un échantillon

On veut $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0{,}04 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 25 \Leftrightarrow n \geq 625$.

Réponse. Au moins 625 personnes.

Rappel de cours. Pour diviser l'erreur par 2, il faut 4 fois plus de personnes.

Correction de l'exercice 17 – Simulation en Python

<code>random() < p</code> est vrai avec la probabilité p : c'est une épreuve de Bernoulli.

La fonction compte les succès sur n épreuves indépendantes : elle simule une loi $B(n, p)$.

En moyenne : $np = 30$.

Réponse. Elle simule $B(n, p)$; en moyenne 30.

Correction de l'exercice 18 – Espérance pour n = 2

$P(X = 0) = (1 - p)^2$, $P(X = 1) = 2p(1 - p)$, $P(X = 2) = p^2$.

$E(X) = 2p(1 - p) + 2p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p$.

Réponse. $E(X) = 2p$, comme le donne la formule np.

Correction de l'exercice 19 – Variance maximale

$p(1 - p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, avec égalité pour $p = \frac{1}{2}$.

L'écart type de la fréquence est $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$; deux écarts types donnent au plus $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Réponse. Maximum $\frac{1}{4}$ en $p = 0{,}5$; d'où la fourchette prudente $f \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 20 – Problème complet : le vaccin

150 épreuves indépendantes (on assimile à des tirages avec remise), succès « réaction », $p = 0{,}04$: $B(150\,;0{,}04)$, $E(X) = 6$.

$P(X = 0) = 0{,}96^{150} \approx 0{,}002$.

$P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) \approx 0{,}008$: 14 réactions sont très peu probables avec $p = 0{,}04$. On peut soupçonner un lot différent et le signaler.

Réponse. $E(X) = 6$; $P(X = 0) \approx 0{,}002$; 14 réactions : observation très surprenante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).