Loi binomiale et échantillonnage — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Répéter une même épreuve à deux issues de façon indépendante, c'est un schéma de Bernoulli ; le nombre de succès suit une loi binomiale $B(n, p)$. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires entraînent à reconnaître la situation, à calculer $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, l'espérance np et l'écart type, puis à prendre une décision : intervalle de fluctuation, test d'une pièce, surréservation d'un avion, fourchette de sondage et simulation en Python.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/loi-binomiale-echantillonnage

Exercice 1 – Espérance d'une loi uniforme

On tire au hasard un numéro entre 1 et 10. Quelle est l'espérance du numéro obtenu ?

Exercice 2 – Loi de Bernoulli

Un joueur réussit un lancer franc avec la probabilité 0,7. On note X la variable qui vaut 1 en cas de réussite, 0 sinon. Donne la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 3 – Triangle de Pascal

Construis la ligne $n = 7$ du triangle de Pascal à partir de la ligne 6 (1, 6, 15, 20, 15, 6, 1), puis donne $\binom{7}{3}$ et $\binom{7}{4}$.

Exercice 4 – Reconnaître une loi binomiale

Dans chaque cas, dis si X suit une loi binomiale et précise ses paramètres.

1. X = nombre de « pile » en 12 lancers d'une pièce équilibrée.

2. X = nombre de lancers d'un dé nécessaires pour obtenir un 6.

3. X = nombre de garçons parmi 3 enfants tirés sans remise d'un groupe de 5 enfants dont 2 garçons.

Exercice 5 – Calculer une probabilité

$X \sim B(8\,;0{,}4)$. Calcule $P(X = 3)$ au millième, puis $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 6 – Au moins un succès

Un archer touche la cible avec la probabilité 0,3 à chaque tir. Il tire 5 fois, de façon indépendante. Calcule la probabilité qu'il touche au moins une fois, puis exactement

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

deux fois.

Exercice 7 – Loi complète pour n = 4

On lance 4 fois une pièce équilibrée. Donne la loi du nombre X de « pile » et vérifie que $E(X) = 2$.

Exercice 8 – Au moins deux six

On lance 12 fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux 6 (au millième) ?

Exercice 9 – Contrôle de production

10 % des pièces d'une grande production sont défectueuses. On en prélève 20 au hasard (assimilé à un tirage avec remise). Calcule la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse, puis d'en avoir au plus 2 (calculatrice).

Exercice 10 – QCM au hasard

Un QCM de 20 questions propose 4 réponses dont une seule juste. Un élève répond au hasard. Combien de bonnes réponses obtient-il en moyenne ? Avec la calculatrice, quelle est la probabilité qu'il ait au moins 10 bonnes réponses ?

Exercice 11 – Intervalle de fluctuation

On lance 50 fois une pièce. Si elle est équilibrée, $X \sim B(50\,;0{,}5)$. La calculatrice donne $P(18 \leq X \leq 32) \approx 0{,}967$ et $P(19 \leq X \leq 31) \approx 0{,}935$. Propose un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %.

Exercice 12 – Pièce truquée ?

Avec $I = [18\,;32]$, on obtient 34 « pile » en 50 lancers. Que conclure au seuil de 5 % ? Et avec 30 « pile » ?

Exercice 13 – Surréservation

Un avion a 100 places. Chaque passager ayant réservé se présente avec la probabilité 0,9, indépendamment des autres. La calculatrice donne, pour n billets vendus, $P(X > 100) \approx 0{,}040$ pour $n = 106$ et $\approx 0{,}081$ pour $n = 107$. Combien de billets la compagnie peut-elle vendre en gardant un risque de surréservation inférieur à 5 % ?

Exercice 14 – Seuil unilatéral

Un standard reçoit 30 appels ; chacun concerne une réclamation avec la probabilité 0,2. On veut prévoir assez de conseillers pour traiter, avec une probabilité d'au moins 95 %, toutes les réclamations. Sachant $P(X \leq 9) \approx 0{,}939$ et $P(X \leq 10) \approx 0{,}974$, combien de réclamations faut-il pouvoir traiter ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Fourchette de sondage

Un sondage auprès de 900 personnes tirées au hasard donne 46 % d'avis favorables. Donne une fourchette à environ 95 %.

Exercice 16 – Taille d'un échantillon

Combien de personnes faut-il interroger au minimum pour une fourchette de ±4 points ?

Exercice 17 – Simulation en Python

Que fait la fonction suivante ? Que renvoie-t-elle en moyenne pour <code>n = 100</code> et <code>p = 0.3</code> ?
<code>from random import random
def succes(n, p):
  s = 0
  for i in range(n):
    if random() < p:
      s = s + 1
  return s</code>

Exercice 18 – Espérance pour n = 2

Pour $X \sim B(2, p)$, écris la loi de X et démontre que $E(X) = 2p$.

Exercice 19 – Variance maximale

Montre que la variance $p(1 - p)$ d'une loi de Bernoulli est maximale pour $p = 0{,}5$. Pourquoi la fourchette de sondage utilise-t-elle $\frac{1}{\sqrt{n}}$?

Exercice 20 – Problème complet : le vaccin

Un vaccin provoque une réaction bénigne chez 4 % des patients. Un centre vaccine 150 personnes ; on note X le nombre de réactions.

1. Justifie que X suit une loi binomiale et donne son espérance.

2. Calcule $P(X = 0)$.

3. Le centre observe 14 réactions. Sachant $P(X \leq 12) \approx 0{,}992$, cette observation est-elle surprenante ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).