Loi géométrique et temps d'attente — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Combien de lancers pour obtenir un 6 ? Combien d'années avant une crue « centennale » ? Le rang du premier succès dans une suite d'épreuves indépendantes suit une loi géométrique : $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $P(X > n) = (1-p)^n$, $E(X) = \frac{1}{p}$. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires couvrent les calculs de probabilités, les seuils, l'espérance et la propriété d'absence de mémoire, avec des situations concrètes de temps d'attente.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/loi-geometrique

Exercice 1 – Premier six au troisième lancer

On lance un dé jusqu'à obtenir un 6. Quelle est la probabilité que le premier 6 arrive au 3e lancer ?

Exercice 2 – Espérance

Un commercial conclut une vente à chaque visite avec la probabilité 0,25. Combien de visites fait-il en moyenne jusqu'à sa première vente ?

Exercice 3 – Attendre plus de 5 lancers

Avec un dé, quelle est la probabilité d'attendre plus de 5 lancers avant le premier 6 ? Et de l'obtenir en au plus 5 lancers ?

Exercice 4 – Loi géométrique ou binomiale ?

Dans chaque cas, précise la loi de X.

1. X = nombre de 6 obtenus en 10 lancers.

2. X = rang du premier 6.

Exercice 5 – Calculs avec p = 0,3

X suit la loi géométrique de paramètre 0,3. Calcule $P(X = 4)$, $P(X > 4)$ et $P(X \leq 4)$.

Exercice 6 – Combien d'essais prévoir ?

Un robot réussit une tâche avec la probabilité 0,2 à chaque essai. Combien d'essais faut-il prévoir pour réussir avec une probabilité d'au moins 95 % ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Période de retour

Une crue a chaque année la probabilité 0,02 de se produire. Quelle est sa période de retour ? Quelle est la probabilité qu'elle se produise au moins une fois en 50 ans ?

Exercice 8 – Panne quotidienne

Un serveur tombe en panne chaque jour avec la probabilité 0,005. Quelle est sa durée moyenne sans panne ? Quelle est la probabilité qu'il tienne une année entière (365 jours) ?

Exercice 9 – Contrôle de la ligne

5 % des produits d'une chaîne sont défectueux. On contrôle les produits un par un jusqu'au premier défaut. Probabilité de contrôler plus de 20 produits sans défaut ?

Exercice 10 – Suite géométrique des probabilités

Montre que les nombres $P(X = 1), P(X = 2), \ldots$ d'une loi géométrique de paramètre p forment une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

Exercice 11 – Absence de mémoire

Un composant tombe en panne chaque mois avec la probabilité 0,04. Il fonctionne depuis 10 mois. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore au moins 25 mois de plus ?

Exercice 12 – Démontrer l'absence de mémoire

Démontre que pour une loi géométrique de paramètre p, $P_{X>m}(X > m + n) = P(X > n)$.

Exercice 13 – Entre deux rangs

X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$. Calcule $P(2 \leq X \leq 4)$.

Exercice 14 – Le sophisme du joueur

À la roulette, le rouge n'est pas sorti depuis 10 tours. Un joueur affirme que le rouge a « plus de chances » de sortir au prochain tour. Qu'en penser ?

Exercice 15 – Comparer deux attentes

Le jeu A fait gagner avec la probabilité 0,1 à chaque partie, le jeu B avec 0,25. Combien de parties de plus faut-il en moyenne pour gagner au jeu A ?

Exercice 16 – Seuil de garantie

Une ampoule grille chaque mois avec la probabilité 0,04. Pendant combien de mois au maximum le fabricant peut-il garantir son produit, si 10 % au plus des ampoules doivent griller pendant la garantie ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Caractériser par la mémoire

X prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots\}$, vérifie $P(X > 1) = 0{,}75$ et la propriété d'absence de mémoire. Montre que $u_n = P(X > n)$ est géométrique et déduis la loi de X.

Exercice 18 – Simuler en Python

Complète la fonction pour qu'elle renvoie le rang du premier succès (probabilité <code>p</code>), puis indique la valeur moyenne attendue pour <code>p = 0.2</code>.
<code>from random import random
def premier_succes(p):
  n = 1
  while ... :
    n = n + 1
  return n</code>

Exercice 19 – Plus de chances que pas

Avec un dé, à partir de combien de lancers a-t-on plus d'une chance sur deux d'avoir obtenu au moins un 6 ?

Exercice 20 – Problème complet : le jeu de la roue

Une roue fait gagner avec la probabilité 0,15 ; on tourne jusqu'au premier gain. Chaque tour coûte 1 € ; le gain vaut 5 €.

1. Quelle est la loi de X, nombre de tours, et son espérance ?

2. Calcule $P(X \leq 3)$.

3. Le jeu est-il avantageux en moyenne ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Premier six au troisième lancer

X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

$P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0{,}116.$

Réponse. $\frac{25}{216} \approx 0{,}116.$

Correction de l'exercice 2 – Espérance

Loi géométrique de paramètre 0,25 : $E(X) = \frac{1}{0{,}25}$.

Réponse. 4 visites en moyenne.

Correction de l'exercice 3 – Attendre plus de 5 lancers

$P(X > 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}402$: cinq échecs de suite.

$P(X \leq 5) = 1 - 0{,}402 \approx 0{,}598.$

Réponse. $P(X > 5) \approx 0{,}402$; $P(X \leq 5) \approx 0{,}598.$

Correction de l'exercice 4 – Loi géométrique ou binomiale ?

Nombre de succès en un nombre fixé d'épreuves : $B\left(10\,;\frac{1}{6}\right)$.

Rang du premier succès : loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

Réponse. Binomiale · géométrique.

Correction de l'exercice 5 – Calculs avec p = 0,3

$P(X = 4) = 0{,}7^3 \times 0{,}3 \approx 0{,}103.$

$P(X > 4) = 0{,}7^4 = 0{,}2401.$

$P(X \leq 4) = 1 - 0{,}2401 = 0{,}7599.$

Réponse. 0,103 · 0,2401 · 0,7599.

Correction de l'exercice 6 – Combien d'essais prévoir ?

$P(X \leq n) = 1 - 0{,}8^n \geq 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}05.$

$n \geq \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}8} \approx 13{,}4$ (sens changé : $\ln 0{,}8 < 0$).

Contrôle : $0{,}8^{13} \approx 0{,}055$, $0{,}8^{14} \approx 0{,}044$.

Réponse. 14 essais.

Correction de l'exercice 7 – Période de retour

Période de retour : $E(X) = \frac{1}{0{,}02} = 50$ ans.

$P(X \leq 50) = 1 - 0{,}98^{50} \approx 0{,}636.$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. 50 ans ; environ 64 % en 50 ans.

Erreur fréquente. « Une fois tous les 50 ans en moyenne » ne veut pas dire « sûrement une fois en 50 ans ».

Correction de l'exercice 8 – Panne quotidienne

$E(X) = \frac{1}{0{,}005} = 200$ jours.

$P(X > 365) = 0{,}995^{365} \approx 0{,}160$.

Réponse. 200 jours en moyenne ; probabilité $\approx 0{,}160$ de tenir un an.

Correction de l'exercice 9 – Contrôle de la ligne

$P(X > 20) = 0{,}95^{20} \approx 0{,}358$.

Réponse. Environ 0,358.

Correction de l'exercice 10 – Suite géométrique des probabilités

$P(X = k+1) = (1-p)^k p = (1-p) \times (1-p)^{k-1} p = (1-p)\,P(X = k)$.

Réponse. Suite géométrique de raison $1 - p$ (d'où le nom de la loi).

Correction de l'exercice 11 – Absence de mémoire

La loi géométrique est sans mémoire : $P_{X>10}(X > 35) = P(X > 25)$.

$P(X > 25) = 0{,}96^{25} \approx 0{,}360$.

Réponse. Environ 0,360.

Correction de l'exercice 12 – Démontrer l'absence de mémoire

$\{X > m+n\} \subset \{X > m\}$, donc $P_{X>m}(X > m+n) = \frac{P(X > m+n)}{P(X > m)}$.

$= \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n = P(X > n)$.

Réponse. La probabilité d'attendre encore n épreuves ne dépend pas de l'attente passée.

Correction de l'exercice 13 – Entre deux rangs

$P(2 \le X \le 4) = P(X > 1) - P(X > 4) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

$= \frac{2}{3} - \frac{16}{81} = \frac{54 - 16}{81} = \frac{38}{81} \approx 0{,}469$.

Réponse. $\frac{38}{81} \approx 0{,}469$.

Correction de l'exercice 14 – Le sophisme du joueur

Les tours sont indépendants : la probabilité du rouge au prochain tour est la même qu'avant.

Absence de mémoire : l'attente restante a la même loi que l'attente initiale.

Réponse. C'est faux : la roulette n'a pas de mémoire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 15 – Comparer deux attentes

$E_A = \frac{1}{0{,}1} = 10$; $E_B = \frac{1}{0{,}25} = 4$.

Réponse. 6 parties de plus en moyenne.

Correction de l'exercice 16 – Seuil de garantie

On veut $P(X \leq n) \leq 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}96^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln 0{,}9}{\ln 0{,}96} \approx 2{,}58$.

Donc 2 mois au maximum.

Réponse. 2 mois.

Correction de l'exercice 17 – Caractériser par la mémoire

Absence de mémoire avec un pas de 1 : $u_{n+1} = P(X > n) \times P(X > 1) = 0{,}75\, u_n$.

$u_0 = 1$, donc $u_n = 0{,}75^n$.

$P(X = k) = u_{k-1} - u_k = 0{,}75^{k-1} \times 0{,}25$: loi géométrique de paramètre 0,25.

Réponse. Loi géométrique de paramètre 0,25.

Correction de l'exercice 18 – Simuler en Python

On recommence tant que l'épreuve échoue : condition <code>random() >= p</code>.

La moyenne d'un grand nombre de simulations approche $E(X) = \frac{1}{0{,}2} = 5$.

Réponse. <code>while random() >= p</code> ; moyenne proche de 5.

Correction de l'exercice 19 – Plus de chances que pas

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}5 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}5 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln \frac{5}{6}} \approx 3{,}8$.

Contrôle : $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}579$, $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}482$.

Réponse. À partir de 4 lancers.

Correction de l'exercice 20 – Problème complet : le jeu de la roue

Géométrique de paramètre 0,15 ; $E(X) = \frac{1}{0{,}15} \approx 6{,}67$.

$P(X \leq 3) = 1 - 0{,}85^3 \approx 0{,}386$.

En moyenne on dépense 6,67 € pour gagner 5 € : perte moyenne d'environ 1,67 €.

Réponse. $E(X) \approx 6{,}67$; $P(X \leq 3) \approx 0{,}386$; jeu défavorable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).