Lois à densité : loi uniforme et loi exponentielle — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Un temps d'attente ou une durée de vie peut prendre n'importe quelle valeur : on calcule alors la probabilité d'un intervalle, représentée par une aire sous une courbe de densité. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires portent sur les densités, la fonction de répartition, l'espérance calculée par une intégrale, la loi uniforme sur $[a\,;b]$ et la loi exponentielle $P(X>t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$, avec son espérance $\frac{1}{\lambda}$ et sa propriété d'absence de mémoire.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/lois-a-densite

Exercice 1 – Reconnaître une densité

La fonction $f(x)=2x$ est-elle une densité de probabilité sur $[0\,;1]$?

Exercice 2 – Probabilité comme aire

X a pour densité $f(x)=2x$ sur $[0\,;1]$. Calcule $P(X\leq 0{,}5)$ et $P(X>0{,}5)$.

Exercice 3 – Loi uniforme

X suit la loi uniforme sur $[0\,;20]$. Donne sa densité, puis calcule $P(5\leq X\leq 12)$ et $E(X)$.

Exercice 4 – Valeur exacte

X suit une loi à densité. Pourquoi $P(X=3)=0$?

Exercice 5 – Loi exponentielle

La durée de vie X (en années) d'un appareil suit la loi exponentielle de paramètre 0,5. Calcule $P(X>1)$, $P(X\leq 3)$ et la durée de vie moyenne.

Exercice 6 – Probabilité d'un intervalle

X suit la loi exponentielle de paramètre 0,3. Calcule $P(2\leq X\leq 5)$ au millième.

Exercice 7 – Trouver une constante

Détermine k pour que $f(x)=kx^2$ soit une densité sur $[0\,;3]$.

Exercice 8 – Espérance d'une densité

X a pour densité $f(x)=\frac{1}{9}x^2$ sur $[0\,;3]$. Calcule $E(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Fonction de répartition

X suit la loi uniforme sur $[2\,;6]$. Exprime $F(x) = P(X \leq x)$ pour $x \in [2\,;6]$ et calcule $F(5)$.

Exercice 10 – Variance d'une loi uniforme

Calcule la variance et l'écart type de la loi uniforme sur $[0\,;12]$.

Exercice 11 – Attente à un feu

Un feu reste rouge 90 secondes. Un piéton arrive au hasard pendant le rouge ; son attente T suit la loi uniforme sur $[0\,;90]$. Probabilité d'attendre plus d'une minute ? Attente moyenne ?

Exercice 12 – Demi-vie

La durée de vie d'un noyau radioactif suit la loi exponentielle de paramètre 0,02 (par an). Calcule la demi-vie, durée T telle que $P(X > T) = \frac{1}{2}$.

Exercice 13 – Absence de mémoire

Le temps d'attente d'un appel (en min) suit la loi exponentielle de paramètre 0,25. On attend depuis 6 minutes. Probabilité d'attendre encore plus de 4 minutes ?

Exercice 14 – Retrouver le paramètre

80 % des composants d'un lot durent plus de 5 ans. On modélise la durée de vie par une loi exponentielle. Détermine λ et la durée de vie moyenne.

Exercice 15 – Proportion restante

1 000 diodes ont une durée de vie exponentielle de moyenne 1 000 heures. Combien fonctionnent encore, en moyenne, après 2 000 heures ?

Exercice 16 – Médiane et moyenne

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, compare la médiane (durée m telle que $P(X \leq m) = 0{,}5$) et l'espérance.

Exercice 17 – Simuler une loi exponentielle

U suit la loi uniforme sur $[0\,;1[$. Montre que $X = -\dfrac{\ln(1-U)}{\lambda}$ vérifie $P(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$.

Exercice 18 – Espérance de la loi exponentielle

Vérifie que $G(x) = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une primitive de $\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$, puis justifie que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ (on admet $t\,\mathrm{e}^{-\lambda t} \to 0$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – La loi uniforme a une mémoire

L'attente T suit la loi uniforme sur $[0\,;20]$ (minutes). On attend déjà depuis 10 minutes. Probabilité d'attendre encore plus de 5 minutes ? Comparer à $P(T > 5)$.

Exercice 20 – Problème complet : la batterie

La durée de vie X (en années) d'une batterie suit la loi exponentielle de paramètre 0,25.

1. Durée de vie moyenne ?

2. Probabilité de dépasser la moyenne ?

3. Durée de garantie pour que 90 % des batteries la dépassent ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une densité

$f \geq 0$ sur $[0\,;1]$.

$\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_0^1 = 1$.

Réponse. Oui : positive et d'aire totale 1.

Correction de l'exercice 2 – Probabilité comme aire

$P(X \leq 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} 2x\,\mathrm{d}x = 0{,}25$.

$P(X > 0{,}5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Réponse. 0,25 et 0,75.

Correction de l'exercice 3 – Loi uniforme

Densité constante $\frac{1}{20}$.

$P(5 \leq X \leq 12) = \frac{12-5}{20} = 0{,}35$.

$E(X) = \frac{0+20}{2} = 10$.

Réponse. $f = \frac{1}{20}$; 0,35 ; $E = 10$.

Correction de l'exercice 4 – Valeur exacte

$P(X = 3) = \int_3^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, l'aire d'un segment.

Réponse. L'aire au-dessus d'un seul point est nulle.

Rappel de cours. Pour une loi à densité, $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$.

Correction de l'exercice 5 – Loi exponentielle

$P(X > 1) = \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}607$.

$P(X \leq 3) = 1 - \mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 0{,}777$.

$E(X) = \frac{1}{0{,}5} = 2$ ans.

Réponse. 0,607 · 0,777 · 2 ans.

Correction de l'exercice 6 – Probabilité d'un intervalle

$P(2 \leq X \leq 5) = P(X > 2) - P(X > 5) = \mathrm{e}^{-0{,}6} - \mathrm{e}^{-1{,}5}$.

$\approx 0{,}549 - 0{,}223 = 0{,}326$.

Réponse. $\approx 0{,}326$.

Correction de l'exercice 7 – Trouver une constante

$\int_0^3 kx^2\,\mathrm{d}x = k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9k$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$9k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{9}$.

Réponse. $k = \frac{1}{9}$.

Correction de l’exercice 8 – Espérance d’une densité

$E(X) = \int_0^3 x \times \frac{1}{9}x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{36}$.

Réponse. $E(X) = 2{,}25$.

Correction de l’exercice 9 – Fonction de répartition

$F(x) = \frac{x-2}{6-2} = \frac{x-2}{4}$.

$F(5) = \frac{3}{4}$.

Réponse. $F(x) = \frac{x-2}{4}$; $F(5) = 0{,}75$.

Correction de l’exercice 10 – Variance d’une loi uniforme

$V = \frac{(12-0)^2}{12} = 12$.

$\sigma = \sqrt{12} \approx 3{,}46$.

Réponse. $V = 12$; $\sigma \approx 3{,}46$.

Correction de l’exercice 11 – Attente à un feu

$P(T > 60) = \frac{90-60}{90} = \frac{1}{3}$.

$E(T) = 45$ s.

Réponse. $\frac{1}{3}$; 45 secondes.

Correction de l’exercice 12 – Demi-vie

$\mathrm{e}^{-0{,}02T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \frac{\ln 2}{0{,}02}$.

Réponse. $T \approx 34{,}7$ ans.

Correction de l’exercice 13 – Absence de mémoire

Sans mémoire : $P_{X>6}(X > 10) = P(X > 4)$.

$= \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$.

Réponse. Environ 0,368.

Correction de l’exercice 14 – Retrouver le paramètre

$\mathrm{e}^{-5\lambda} = 0{,}8 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0{,}8}{5} \approx 0{,}0446$.

$E = \frac{1}{\lambda} \approx 22{,}4$ ans.

Réponse. $\lambda \approx 0{,}0446$; moyenne $\approx 22{,}4$ ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 15 – Proportion restante

$\lambda = \frac{1}{1\,000}$; $P(X > 2\,000) = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$.

$1\,000 \times 0{,}135 \approx 135$.

Réponse. Environ 135 diodes.

Correction de l'exercice 16 – Médiane et moyenne

$1 - \mathrm{e}^{-\lambda m} = 0{,}5 \Leftrightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0{,}693}{\lambda}$.

$E = \frac{1}{\lambda}$: la médiane est environ 69 % de la moyenne.

Réponse. Médiane $\frac{\ln 2}{\lambda}$ < moyenne $\frac{1}{\lambda}$.

Correction de l'exercice 17 – Simuler une loi exponentielle

$X > t \Leftrightarrow -\ln(1-U) > \lambda t \Leftrightarrow 1 - U < \mathrm{e}^{-\lambda t} \Leftrightarrow U > 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

U étant uniforme : $P\left(U > 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Réponse. X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Correction de l'exercice 18 – Espérance de la loi exponentielle

$G'(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

$\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} - \left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t} \to \frac{1}{\lambda}$.

Réponse. $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Correction de l'exercice 19 – La loi uniforme a une mémoire

$P_{T>10}(T > 15) = \frac{P(T>15)}{P(T>10)} = \frac{5/20}{10/20} = 0{,}5$.

$P(T > 5) = \frac{15}{20} = 0{,}75$: les deux diffèrent.

Réponse. 0,5 contre 0,75 : la loi uniforme n'est pas sans mémoire.

Correction de l'exercice 20 – Problème complet : la batterie

$E(X) = 4$ ans.

$P(X > 4) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$.

$\mathrm{e}^{-0{,}25t} = 0{,}9 \Leftrightarrow t = -4\ln 0{,}9 \approx 0{,}42$ an, environ 5 mois.

Réponse. 4 ans ; 0,368 ; garantie d'environ 5 mois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).