Primitives et équations différentielles — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une équation différentielle relie une grandeur à sa vitesse d'évolution. En maths complémentaires, on apprend à trouver des primitives et à résoudre les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$, qui modélisent la croissance d'une population, la charge d'un condensateur, le refroidissement d'un café ou une perfusion. Ces 20 exercices corrigés vont des primitives usuelles aux problèmes complets avec condition initiale, en passant par la méthode d'Euler.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/primitives-equations-differentiell

Exercice 1 – Primitive d'un polynôme

Détermine une primitive de $f(x) = 4x^3 - 6x + 2$.

Exercice 2 – Exponentielle et inverse

Détermine une primitive de $g(x) = \mathrm{e}^{5x}$ sur $\mathbb{R}$ et de $h(x) = \dfrac{3}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 3 – Vérifier une solution

Montre que $y(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$ est solution de l'équation différentielle $y' = 3y$.

Exercice 4 – Équation y' = ay

Résous $y' = 0{,}4y$, puis détermine la solution telle que $y(0) = 50$.

Exercice 5 – Reconnaître une forme composée

Détermine une primitive de chaque fonction.

1. $f(x) = 3x^2\mathrm{e}^{x^3}$

2. $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

3. $h(x) = 4x(x^2+5)$

Exercice 6 – Primitive avec condition

Détermine la primitive F de $f(x) = 2x + \mathrm{e}^{-x}$ telle que $F(0) = 3$.

Exercice 7 – Solution générale de y' = ay + b

Résous $y' = -0{,}2y + 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Avec une condition initiale

Détermine la solution de $y' = -0{,}2y + 6$ telle que $y(0) = 10$, puis calcule $y(5)$ au centième.

Exercice 9 – Ajuster une constante (logarithme)

Détermine une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ sur $\left]-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

Exercice 10 – Ajuster une constante (quotient)

Détermine une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Exercice 11 – Croissance de bactéries

Une culture compte 200 bactéries et vérifie $N' = 0{,}5N$ (t en heures).

1. Exprime $N(t)$.

2. Au bout de combien de temps la population a-t-elle triplé ?

Exercice 12 – Décharge d'un condensateur

La tension aux bornes d'un condensateur qui se décharge vérifie $u' = -0{,}25u$, $u(0) = 12$ V (t en ms). Quand la tension vaut-elle 3 V ?

Exercice 13 – Loi de refroidissement

Un gâteau à 70 °C refroidit dans une cuisine à 18 °C : $T' = -0{,}05(T - 18)$, t en minutes.

1. Exprime $T(t)$.

2. Quand le gâteau atteint-il 40 °C (à la minute près) ?

Exercice 14 – Chute avec frottement

Un parachutiste ralenti vérifie $v' = 9{,}8 - 0{,}2v$, $v(0) = 0$ (m/s, t en s).

1. Détermine la vitesse limite.

2. Exprime $v(t)$ et calcule $v(5)$.

Exercice 15 – Méthode d'Euler

On approche la solution de $y' = -y + 1$, $y(0) = 0$, avec un pas $h = 0{,}5$: $y_{n+1} = y_n + h(-y_n + 1)$. Calcule y_1, y_2 et compare à la valeur exacte $y(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 16 – Vérifier une solution logistique

Montre que $y(x) = \dfrac{10}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$ est solution de $y' = 0{,}1\,y(10 - y)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Perfusion

Une perfusion apporte 3 mg/h d'un médicament ; l'organisme en élimine 10 % par heure : $Q' = -0{,}1Q + 3$, $Q(0) = 0$.

1. Exprime $Q(t)$ et sa limite.

2. Quand atteint-on 90 % de cette limite ?

Exercice 18 – Deux primitives

Montre que $F(x) = (x+1)^2$ et $G(x) = x^2 + 2x + 7$ sont deux primitives d'une même fonction. De quelle constante diffèrent-elles ?

Exercice 19 – Retrouver l'équation

Les solutions d'une équation $y' = ay + b$ sont les fonctions $y(x) = 5 + Ce^{-2x}$. Retrouve a et b.

Exercice 20 – Problème complet : la pollution d'un lac

Un lac reçoit 2 tonnes de polluant par an et en élimine 10 % par an. Il en contient 5 tonnes au départ : $m' = -0{,}1m + 2$, $m(0) = 5$.

1. Exprime $m(t)$.

2. Quelle masse au bout de 10 ans ?

3. Quand la masse dépasse-t-elle 18 t ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Primitive d'un polynôme

On primitive terme à terme : $x^n \to \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

$F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$. Contrôle : $F'(x) = 4x^3 - 6x + 2$.

Réponse. $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$.

Correction de l'exercice 2 – Exponentielle et inverse

$\left(\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}\right)' = \mathrm{e}^{5x}$: $G(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}$.

$(3\ln x)' = \dfrac{3}{x}$: $H(x) = 3\ln x$.

Réponse. $G(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}$; $H(x) = 3\ln x$.

Correction de l'exercice 3 – Vérifier une solution

$y'(x) = 2 \times 3\mathrm{e}^{3x} = 6\mathrm{e}^{3x}$.

$3y(x) = 6\mathrm{e}^{3x}$. Les deux membres sont égaux pour tout x.

Réponse. Oui, $y' = 3y$ pour tout réel x.

Correction de l'exercice 4 – Équation y' = ay

Les solutions sont $y(x) = C\mathrm{e}^{0{,}4x}$, $C \in \mathbb{R}$.

$y(0) = C = 50$: $y(x) = 50\mathrm{e}^{0{,}4x}$.

Réponse. $y(x) = 50\mathrm{e}^{0{,}4x}$.

Correction de l'exercice 5 – Reconnaître une forme composée

Forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u = x^3$: $F(x) = \mathrm{e}^{x^3}$.

Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + x + 1 > 0$: $G(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

Forme $2u'u$ avec $u = x^2 + 5$, $u' = 2x$: $H(x) = (x^2 + 5)^2$.

Réponse. $\mathrm{e}^{x^3} \cdot \ln(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + 5)^2$.

Correction de l'exercice 6 – Primitive avec condition

$F(x) = x^2 - \mathrm{e}^{-x} + C$.

$F(0) = -1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 4$.

Réponse. $F(x) = x^2 - \mathrm{e}^{-x} + 4$.

Correction de l'exercice 7 – Solution générale de y' = ay + b

Solution constante : $0 = -0{,}2\ell + 6 \Leftrightarrow \ell = 30$.

Solutions : $y(x) = C\mathrm{e}^{-0{,}2x} + 30$, $C \in \mathbb{R}$.

Réponse. $y(x) = C\mathrm{e}^{-0{,}2x} + 30$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. $y' = ay + b$: $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

Correction de l'exercice 8 – Avec une condition initiale

$y(0) = C + 30 = 10 \Leftrightarrow C = -20$: $y(x) = 30 - 20e^{-0,2x}$.

$y(5) = 30 - 20e^{-1} \approx 22,64$.

Réponse. $y(x) = 30 - 20e^{-0,2x}$; $y(5) \approx 22,64$.

Erreur fréquente. La condition initiale s'applique à la solution complète, solution constante comprise.

Correction de l'exercice 9 – Ajuster une constante (logarithme)

$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{3x+2}$: on fait apparaître $\frac{u'}{u}$ avec $u = 3x + 2$.

$F(x) = \frac{1}{3}\ln(3x + 2)$.

Réponse. $F(x) = \frac{1}{3}\ln(3x + 2)$.

Correction de l'exercice 10 – Ajuster une constante (quotient)

$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$.

$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$.

Réponse. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$.

Correction de l'exercice 11 – Croissance de bactéries

$N(t) = 200e^{0,5t}$.

$e^{0,5t} = 3 \Leftrightarrow t = 2\ln 3 \approx 2,20$ h.

Réponse. $N(t) = 200e^{0,5t}$; triple en environ 2,2 h.

Correction de l'exercice 12 – Décharge d'un condensateur

$u(t) = 12e^{-0,25t}$.

$12e^{-0,25t} = 3 \Leftrightarrow e^{-0,25t} = 0,25 \Leftrightarrow t = 4\ln 4 \approx 5,55$ ms.

Réponse. Au bout de 5,55 ms environ.

Correction de l'exercice 13 – Loi de refroidissement

$T' = -0,05T + 0,9$: équilibre 18, $T(t) = 18 + Ce^{-0,05t}$, $T(0) = 70 \Leftrightarrow C = 52$.

$18 + 52e^{-0,05t} = 40 \Leftrightarrow e^{-0,05t} = \frac{22}{52} \Leftrightarrow t = 20\ln\frac{52}{22} \approx 17,2$.

Réponse. $T(t) = 18 + 52e^{-0,05t}$; environ 17 minutes.

Correction de l'exercice 14 – Chute avec frottement

Équilibre : $0 = 9,8 - 0,2v \Leftrightarrow v = 49$ m/s.

$v(t) = 49 + Ce^{-0,2t}$, $v(0) = 0 \Leftrightarrow C = -49$: $v(t) = 49(1 - e^{-0,2t})$.

$v(5) = 49(1 - e^{-1}) \approx 31,0$ m/s.

Réponse. Vitesse limite 49 m/s ; $v(5) \approx 31,0$ m/s.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 15 – Méthode d'Euler

$y_1 = 0 + 0{,}5 \times 1 = 0{,}5$.

$y_2 = 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}75$.

Valeur exacte : $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$. Un pas plus petit réduirait l'écart.

Réponse. $y_1 = 0{,}5$; $y_2 = 0{,}75$ (exact : 0,632).

Correction de l'exercice 16 – Vérifier une solution logistique

$y'(x) = 10 \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ (dérivée de $\frac{1}{u}$: $-\frac{u'}{u^2}$).

$10 - y = \dfrac{10\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, donc $0{,}1\,y(10-y) = 0{,}1 \times \dfrac{10}{1+\mathrm{e}^{-x}} \times \dfrac{10\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{10\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

Les deux membres sont égaux.

Réponse. Oui, c'est une solution de l'équation logistique.

Correction de l'exercice 17 – Perfusion

Équilibre 30 ; $Q(t) = 30(1 - \mathrm{e}^{-0{,}1t})$; limite 30 mg.

$Q(t) = 27 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}1t} = 0{,}1 \Leftrightarrow t = 10\ln 10 \approx 23{,}0$ h.

Réponse. $Q(t) = 30(1 - \mathrm{e}^{-0{,}1t})$, limite 30 mg ; 90 % au bout de 23 h environ.

Correction de l'exercice 18 – Deux primitives

$F'(x) = 2(x+1) = 2x + 2$ et $G'(x) = 2x + 2$: même dérivée.

$G(x) - F(x) = x^2 + 2x + 7 - (x^2 + 2x + 1) = 6$.

Réponse. Primitives de $2x + 2$; elles diffèrent de 6.

Correction de l'exercice 19 – Retrouver l'équation

L'exponentielle donne $a = -2$.

La solution constante est $5 = -\frac{b}{a}$, donc $b = -5a = 10$.

Contrôle : $y' = -2C\mathrm{e}^{-2x}$ et $-2y + 10 = -2C\mathrm{e}^{-2x}$.

Réponse. $y' = -2y + 10$.

Correction de l'exercice 20 – Problème complet : la pollution d'un lac

Équilibre 20 ; $m(t) = 20 + C\mathrm{e}^{-0{,}1t}$, $m(0) = 5 \Leftrightarrow C = -15$: $m(t) = 20 - 15\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

$m(10) = 20 - 15\mathrm{e}^{-1} \approx 14{,}5$ t.

$m(t) > 18 \Leftrightarrow 15\mathrm{e}^{-0{,}1t} < 2 \Leftrightarrow t > 10\ln 7{,}5 \approx 20{,}1$ ans.

Réponse. $m(t) = 20 - 15\mathrm{e}^{-0{,}1t}$; 14,5 t à 10 ans ; plus de 18 t après 20,1 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).