Probabilités conditionnelles et formule de Bayes — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Un test fiable à 95 % ne donne pas 95 % de chances d'être malade quand il est positif : tout dépend de la proportion de malades. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires entraînent aux probabilités conditionnelles, aux arbres pondérés, à la formule des probabilités totales et à la formule de Bayes $P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$, avec des applications au dépistage médical (sensibilité, spécificité, valeurs prédictives), au contrôle qualité, à la météo, à la détection de fraude et aux filtres anti-spam.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/probabilites-conditionnelles-baye

Exercice 1 – Calculer une probabilité conditionnelle

On donne $P(A) = 0{,}25$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcule $P_A(B)$.

Exercice 2 – Lire un arbre

Dans un arbre, $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}3$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$. Calcule $P(A \cap B)$ puis $P(B)$.

Exercice 3 – Branche complémentaire

Si $P_A(B) = 0{,}3$, que vaut $P_A(\overline{B})$?

Exercice 4 – Tester l'indépendance

$P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 5 – Inverser le conditionnement

Avec l'arbre de l'exercice « Lire un arbre » ($P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}38$), calcule $P_B(A)$.

Exercice 6 – De quelle urne ?

On choisit au hasard l'une de deux urnes : U_1 contient 70 % de boules rouges, U_2 40 %. On tire une boule : elle est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de U_1 ?

Exercice 7 – Contrôle qualité à trois machines

Trois machines produisent 50 %, 30 % et 20 % des pièces, avec 1 %, 2 % et 3 % de défauts.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Une pièce est défectueuse : probabilité qu'elle vienne de la 3e machine ?

Exercice 8 – Vocabulaire du dépistage

Sur 2 000 personnes, 100 sont malades. Le test est positif pour 90 malades et pour 95 non-malades. Calcule la sensibilité et la spécificité du test.

Exercice 9 – Valeur prédictive positive

Avec les données précédentes (90 vrais positifs, 95 faux positifs), quelle est la probabilité qu'une personne testée positive soit malade ?

Exercice 10 – Test d'allergie

5 % des enfants ont une allergie. Le test a une sensibilité de 90 % et une spécificité de 95 %. Calcule $P(T)$, la valeur prédictive positive et la valeur prédictive négative.

Exercice 11 – Prévision météo

Il pleut 40 % des jours. Quand il pleut, la météo l'avait annoncé dans 80 % des cas ; quand il ne pleut pas, elle annonce quand même la pluie dans 10 % des cas. La météo annonce la pluie : probabilité qu'il pleuve ?

Exercice 12 – VPP et prévalence

Un test a une sensibilité de 0,9 et une spécificité de 0,95. On note p la proportion de malades.

1. Montre que $\text{VPP} = f(p) = \dfrac{0{,}9p}{0{,}85p + 0{,}05}$.

2. Calcule $f(0{,}3)$ et montre que f est croissante.

Exercice 13 – Un second test

Après un premier test positif, la probabilité d'allergie est 0,486. On refait un test indépendant (sensibilité 0,9, spécificité 0,95), positif lui aussi. Nouvelle probabilité ?

Exercice 14 – Détection de fraude

0,1 % des paiements sont frauduleux. Un logiciel détecte 99 % des fraudes mais déclenche une alerte sur 2 % des paiements honnêtes. Une alerte est déclenchée : probabilité de fraude ?

Exercice 15 – L'erreur du procureur

Une trace ADN correspond à celle d'un suspect. L'expert affirme : « la probabilité qu'un innocent pris au hasard corresponde est 10^{-6} ». Peut-on en déduire que le suspect est coupable avec une probabilité $1 - 10^{-6}$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Filtre anti-spam

30 % des courriels sont des spams. Le mot « promo » apparaît dans 40 % des spams et 5 % des autres. Un courriel contient « promo » : probabilité que ce soit un spam ?

Exercice 17 – Deux tests pour un non-malade

Un test a 5 % de faux positifs. Une personne non malade passe deux tests indépendants. Probabilité que les deux soient positifs ?

Exercice 18 – Quand P_A(B) = P_B(A)

Montre que, si $P(A \cap B) \neq 0$, on a $P_A(B) = P_B(A)$ si et seulement si $P(A) = P(B)$.

Exercice 19 – Incompatibles ou indépendants ?

A et B sont incompatibles, avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}4$. Sont-ils indépendants ?

Exercice 20 – Problème complet de dépistage

Une maladie touche 2 % de la population. Le test a une sensibilité de 85 % et une spécificité de 97 %.

1. Construis l'arbre et calcule $P(T)$.

2. Calcule la VPP et la VPN.

3. Un médecin propose ce test à tous ses patients : qu'en penser ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer une probabilité conditionnelle

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}25}$.

Réponse. $P_A(B) = 0{,}4$.

Correction de l'exercice 2 – Lire un arbre

$P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$.

$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$.

Probabilités totales : $P(B) = 0{,}18 + 0{,}2 = 0{,}38$.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}18$; $P(B) = 0{,}38$.

Correction de l'exercice 3 – Branche complémentaire

Les branches issues d'un même nœud ont une somme égale à 1.

$P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}3$.

Réponse. $P_A(\overline{B}) = 0{,}7$.

Correction de l'exercice 4 – Tester l'indépendance

$P(A) \times P(B) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3 = P(A \cap B)$.

Réponse. Oui, A et B sont indépendants.

Correction de l'exercice 5 – Inverser le conditionnement

Formule de Bayes : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}38}$.

Réponse. $P_B(A) \approx 0{,}474$.

Erreur fréquente. $P_B(A) \neq P_A(B)$: ici 0,474 contre 0,3.

Correction de l'exercice 6 – De quelle urne ?

$P(R) = 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}55$.

$P_R(U_1) = \dfrac{0{,}35}{0{,}55} \approx 0{,}636$.

Réponse. Environ 0,636.

Correction de l'exercice 7 – Contrôle qualité à trois machines

$P(D) = 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}02 + 0{,}2 \times 0{,}03 = 0{,}005 + 0{,}006 + 0{,}006 = 0{,}017$.

$P_D(M_3) = \dfrac{0{,}006}{0{,}017} \approx 0{,}353$.

Réponse. $P(D) = 0{,}017$; $P_D(M_3) \approx 0{,}353$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 8 – Vocabulaire du dépistage

Sensibilité $= P_M(T) = \dfrac{90}{100} = 0{,}9$.

Il y a 1 900 non-malades, dont $1\,900 - 95 = 1\,805$ négatifs : spécificité $= \dfrac{1\,805}{1\,900} = 0{,}95$.

Réponse. Sensibilité 0,9 ; spécificité 0,95.

Correction de l’exercice 9 – Valeur prédictive positive

Tests positifs : $90 + 95 = 185$.

$P_T(M) = \dfrac{90}{185} \approx 0{,}486$.

Réponse. Environ 0,486 : moins d’une chance sur deux.

Correction de l’exercice 10 – Test d’allergie

$P(T) = 0{,}05 \times 0{,}9 + 0{,}95 \times 0{,}05 = 0{,}045 + 0{,}0475 = 0{,}0925$.

$\text{VPP} = \dfrac{0{,}045}{0{,}0925} \approx 0{,}486$.

$\text{VPN} = \dfrac{0{,}95 \times 0{,}95}{1 - 0{,}0925} = \dfrac{0{,}9025}{0{,}9075} \approx 0{,}994$.

Réponse. $P(T) = 0{,}0925$; VPP $\approx 0{,}486$; VPN $\approx 0{,}994$.

Correction de l’exercice 11 – Prévision météo

$P(F) = 0{,}4 \times 0{,}8 + 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}32 + 0{,}06 = 0{,}38$.

$P_F(P) = \dfrac{0{,}32}{0{,}38} \approx 0{,}842$.

Réponse. Environ 0,842.

Correction de l’exercice 12 – VPP et prévalence

$P(T) = 0{,}9p + 0{,}05(1-p) = 0{,}85p + 0{,}05$ et $P(M \cap T) = 0{,}9p$.

$f(0{,}3) = \dfrac{0{,}27}{0{,}305} \approx 0{,}885$.

$$f'(p) = \frac{0{,}9(0{,}85p + 0{,}05) - 0{,}9p \times 0{,}85}{(0{,}85p + 0{,}05)^2} = \frac{0{,}045}{(0{,}85p + 0{,}05)^2} > 0.$$

Réponse. $f(0{,}3) \approx 0{,}885$; la VPP augmente avec la prévalence.

Correction de l’exercice 13 – Un second test

L’a posteriori devient l’a priori : $P(M) = 0{,}486$.

$$\frac{0{,}486 \times 0{,}9}{0{,}486 \times 0{,}9 + 0{,}514 \times 0{,}05} \approx 0{,}945.$$

Réponse. Environ 0,945.

Correction de l’exercice 14 – Détection de fraude

$P(A) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}02 = 0{,}000\,99 + 0{,}019\,98$.

$P_A(F) = \dfrac{0{,}000\,99}{0{,}020\,97} \approx 0{,}047$.

Réponse. Environ 4,7 % : la plupart des alertes sont fausses.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – L’erreur du procureur

L’expert donne $P_I(C)$, probabilité de correspondance sachant innocent.

La culpabilité demande $P_C(\bar{I})$, qui dépend du nombre de suspects possibles (probabilité a priori).

Dans une ville de 3 millions d’habitants, environ 3 innocents correspondraient aussi : la trace seule ne suffit pas.

Réponse. Non : c’est confondre $P_I(C)$ et $P_C(I)$.

Correction de l’exercice 16 – Filtre anti-spam

$P(P) = 0{,}3 \times 0{,}4 + 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}12 + 0{,}035 = 0{,}155$.

$P_P(S) = \dfrac{0{,}12}{0{,}155} \approx 0{,}774$.

Réponse. Environ 0,774.

Correction de l’exercice 17 – Deux tests pour un non-malade

Indépendance : on multiplie.

$0{,}05 \times 0{,}05 = 0{,}0025$.

Réponse. 0,25 % : le second test élimine la plupart des faux positifs.

Correction de l’exercice 18 – Quand P_A(B) = P_B(A)

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Ces deux quotients de même numérateur non nul sont égaux si et seulement si leurs dénominateurs le sont.

Réponse. $P_A(B) = P_B(A) \Leftrightarrow P(A) = P(B)$.

Correction de l’exercice 19 – Incompatibles ou indépendants ?

Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$.

$P(A)P(B) = 0{,}12 \neq 0$: ils ne sont pas indépendants.

Savoir que A est réalisé rend B impossible : l’information change tout.

Réponse. Non, ils sont dépendants.

Correction de l’exercice 20 – Problème complet de dépistage

$P(T) = 0{,}02 \times 0{,}85 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}017 + 0{,}0294 = 0{,}0464$.

$\text{VPP} = \dfrac{0{,}017}{0{,}0464} \approx 0{,}366$; $\text{VPN} = \dfrac{0{,}98 \times 0{,}97}{0{,}9536} \approx 0{,}997$.

Un test négatif rassure ; un test positif n’est qu’un signal (37 %) et doit être confirmé.

Réponse. $P(T) = 0{,}0464$; VPP $\approx 0{,}366$; VPN $\approx 0{,}997$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).