Probabilités conditionnelles et formule de Bayes — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Un test fiable à 95 % ne donne pas 95 % de chances d'être malade quand il est positif : tout dépend de la proportion de malades. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires entraînent aux probabilités conditionnelles, aux arbres pondérés, à la formule des probabilités totales et à la formule de Bayes $P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$, avec des applications au dépistage médical (sensibilité, spécificité, valeurs prédictives), au contrôle qualité, à la météo, à la détection de fraude et aux filtres anti-spam.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/probabilites-conditionnelles-baye

Exercice 1 – Calculer une probabilité conditionnelle

On donne $P(A) = 0{,}25$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcule $P_A(B)$.

Exercice 2 – Lire un arbre

Dans un arbre, $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}3$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$. Calcule $P(A \cap B)$ puis $P(B)$.

Exercice 3 – Branche complémentaire

Si $P_A(B) = 0{,}3$, que vaut $P_A(\overline{B})$?

Exercice 4 – Tester l'indépendance

$P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 5 – Inverser le conditionnement

Avec l'arbre de l'exercice « Lire un arbre » ($P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}38$), calcule $P_B(A)$.

Exercice 6 – De quelle urne ?

On choisit au hasard l'une de deux urnes : U_1 contient 70 % de boules rouges, U_2 40 %. On tire une boule : elle est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de U_1 ?

Exercice 7 – Contrôle qualité à trois machines

Trois machines produisent 50 %, 30 % et 20 % des pièces, avec 1 %, 2 % et 3 % de défauts.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Une pièce est défectueuse : probabilité qu'elle vienne de la 3e machine ?

Exercice 8 – Vocabulaire du dépistage

Sur 2 000 personnes, 100 sont malades. Le test est positif pour 90 malades et pour 95 non-malades. Calcule la sensibilité et la spécificité du test.

Exercice 9 – Valeur prédictive positive

Avec les données précédentes (90 vrais positifs, 95 faux positifs), quelle est la probabilité qu'une personne testée positive soit malade ?

Exercice 10 – Test d'allergie

5 % des enfants ont une allergie. Le test a une sensibilité de 90 % et une spécificité de 95 %. Calcule $P(T)$, la valeur prédictive positive et la valeur prédictive négative.

Exercice 11 – Prévision météo

Il pleut 40 % des jours. Quand il pleut, la météo l'avait annoncé dans 80 % des cas ; quand il ne pleut pas, elle annonce quand même la pluie dans 10 % des cas. La météo annonce la pluie : probabilité qu'il pleuve ?

Exercice 12 – VPP et prévalence

Un test a une sensibilité de 0,9 et une spécificité de 0,95. On note p la proportion de malades.

1. Montre que $\text{VPP} = f(p) = \dfrac{0{,}9p}{0{,}85p + 0{,}05}$.

2. Calcule $f(0{,}3)$ et montre que f est croissante.

Exercice 13 – Un second test

Après un premier test positif, la probabilité d'allergie est 0,486. On refait un test indépendant (sensibilité 0,9, spécificité 0,95), positif lui aussi. Nouvelle probabilité ?

Exercice 14 – Détection de fraude

0,1 % des paiements sont frauduleux. Un logiciel détecte 99 % des fraudes mais déclenche une alerte sur 2 % des paiements honnêtes. Une alerte est déclenchée : probabilité de fraude ?

Exercice 15 – L'erreur du procureur

Une trace ADN correspond à celle d'un suspect. L'expert affirme : « la probabilité qu'un innocent pris au hasard corresponde est 10^{-6} ». Peut-on en déduire que le suspect est coupable avec une probabilité $1 - 10^{-6}$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Filtre anti-spam

30 % des courriels sont des spams. Le mot « promo » apparaît dans 40 % des spams et 5 % des autres. Un courriel contient « promo » : probabilité que ce soit un spam ?

Exercice 17 – Deux tests pour un non-malade

Un test a 5 % de faux positifs. Une personne non malade passe deux tests indépendants. Probabilité que les deux soient positifs ?

Exercice 18 – Quand P_A(B) = P_B(A)

Montre que, si $P(A \cap B) \neq 0$, on a $P_A(B) = P_B(A)$ si et seulement si $P(A) = P(B)$.

Exercice 19 – Incompatibles ou indépendants ?

A et B sont incompatibles, avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}4$. Sont-ils indépendants ?

Exercice 20 – Problème complet de dépistage

Une maladie touche 2 % de la population. Le test a une sensibilité de 85 % et une spécificité de 97 %.

1. Construis l'arbre et calcule $P(T)$.

2. Calcule la VPP et la VPN.

3. Un médecin propose ce test à tous ses patients : qu'en penser ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).