Statistique à deux variables : corrélation et causalité — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Deux grandeurs mesurées ensemble forment un nuage de points. Ces 20 exercices corrigés de maths complémentaires apprennent à calculer le point moyen, à déterminer et utiliser la droite des moindres carrés $y = ax + b$ (avec $a = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$), à juger un ajustement avec le coefficient de corrélation, à se ramener à un ajustement affine par le changement de variable $z = \ln y$, et surtout à ne pas confondre corrélation et causalité.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/statistiques-deux-variables

Exercice 1 – Point moyen

Série : $x = 1, 2, 3, 4, 5$ et $y = 3, 5, 6, 8, 9$. Calcule les coordonnées du point moyen G.

Exercice 2 – Coefficient directeur

Pour cette série, $\operatorname{cov}(x, y) = 3$ et $V(x) = 2$. Détermine la droite des moindres carrés.

Exercice 3 – Interpoler

Avec $y = 1{,}5x + 1{,}7$, estime y pour $x = 3{,}5$.

Exercice 4 – Signe de r

Pour chaque cas, donne le signe probable de r : a) taille et masse d'adultes ; b) prix d'un article et quantité vendue.

Exercice 5 – Dépenses de publicité

Une entreprise relève ses dépenses publicitaires x (en milliers d'euros) et son chiffre d'affaires y (en dizaines de milliers d'euros) : $x = 1$ à 6, $y = 12, 15, 17, 21, 22, 26$. La calculatrice donne $y = 2{,}714x + 9{,}333$ et $r \approx 0{,}993$.

1. Vérifie que la droite passe par le point moyen.

2. Estime le chiffre d'affaires pour 8 milliers d'euros de publicité. Est-ce une interpolation ?

Exercice 6 – Loi d'Ohm

Mesures d'un conducteur : $I = 1, 2, 3, 4$ (A) et $U = 2{,}1$; $3{,}9$; $6{,}2$; $7{,}8$ (V). La régression donne $U = 1{,}94I + 0{,}15$ avec $r \approx 0{,}998$. Quelle est la résistance ? Estime U pour $I = 2{,}5$ A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Lire la qualité d'un ajustement

Trois séries ont pour coefficients de corrélation 0,35, −0,97 et 0,82. Laquelle se prête le mieux à un ajustement affine ?

Exercice 8 – Retrouver b

La droite des moindres carrés a pour pente −0,8 et le point moyen est $G(5\,;12)$. Détermine son équation.

Exercice 9 – Résidus

Avec $y = 1{,}5x + 1{,}7$, calcule le résidu du point $(4\,;8)$.

Exercice 10 – Corrélation sans lien affine

Les points $(-2\,;4)$, $(-1\,;1)$, $(0\,;0)$, $(1\,;1)$, $(2\,;4)$ donnent $r = 0$. Peut-on dire que x et y n'ont aucun lien ?

Exercice 11 – Changement de variable

La concentration y d'un médicament est mesurée toutes les heures : 200, 150, 112, 85, 63, 47 (mg/L) pour $t = 0$ à 5.

1. Pourquoi poser $z = \ln y$?

2. L'ajustement donne $z = -0{,}289t + 5{,}300$. Exprime y en fonction de t.

3. Par quel facteur la concentration est-elle multipliée chaque heure ?

Exercice 12 – Prévoir avec un modèle exponentiel

Avec $y \approx 200 \times 0{,}75^{t}$, estime la concentration après 8 h et dis quand elle passe sous 20 mg/L.

Exercice 13 – Une relation en carré

On mesure $x = 1, 2, 3, 4$ et $y = 2, 8, 18, 32$. Quel changement de variable rend le nuage aligné ? Quelle relation obtient-on ?

Exercice 14 – Glaces et coups de soleil

Le nombre de glaces vendues et le nombre de coups de soleil soignés en pharmacie sont fortement corrélés ($r = 0{,}9$). Les glaces provoquent-elles des coups de soleil ?

Exercice 15 – Causalité inversée

On constate que les personnes qui consultent souvent un médecin sont plus souvent malades. Faut-il en conclure que consulter rend malade ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Extrapolation risquée

Le record du 100 m a baissé à peu près linéairement de 1912 à 2009. Une droite d'ajustement prévoit un temps nul vers l'an 3000. Qu'en penser ?

Exercice 17 – Établir une causalité

Comment démontrer qu'un engrais augmente le rendement d'un champ, au-delà d'une simple corrélation ?

Exercice 18 – Changement d'unité

On exprime y en grammes au lieu de kilogrammes (multiplication par 1 000). Que deviennent la pente a et le coefficient r ?

Exercice 19 – Pourquoi la droite passe par G

À pente a fixée, on pose $z_i = y_i - a x_i$ et $S(b) = \sum (z_i - b)^2$. Montre que S est minimale pour $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

Exercice 20 – Problème complet : une application

Le nombre d'utilisateurs y (en milliers) d'une application est relevé chaque mois x. L'ajustement de $z = \ln y$ donne $z = 0{,}18x + 1{,}2$ avec $r = 0{,}995$.

1. Exprime y en fonction de x.

2. Quel est le pourcentage d'augmentation mensuel ?

3. Estime y pour $x = 12$. Peut-on prévoir le nombre d'utilisateurs dans 5 ans ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).