Suites et modèles d'évolution — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

En maths complémentaires, une suite sert à modéliser une évolution : un capital, une dette, un médicament qui s'accumule, une population. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout le chapitre : reconnaître une suite géométrique ou arithmétique, calculer la limite de q^n et d'une somme $1 + q + \ldots + q^n$, utiliser le théorème des gendarmes, étudier une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ grâce à sa solution constante, déterminer un seuil et conjecturer le comportement d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/suites-modeles-discrets

Exercice 1 – Choisir le bon modèle

Pour chaque situation, indique si la suite est arithmétique ou géométrique et donne sa raison.

1. Un loyer augmente de 3 % par an.

2. Une tirelire reçoit 50 € par mois.

3. Une forêt perd 2 % de ses arbres par an.

Exercice 2 – Calculer un terme

Un capital de 2 000 € est placé à intérêts composés au taux de 3 % par an. On note u_n le capital après n années.

1. Exprime u_n en fonction de n.

2. Calcule u_5 au centime près.

Exercice 3 – Limites de suites géométriques

Détermine la limite de chaque suite.

1. $a_n = 0{,}7^n$

2. $b_n = 1{,}5^n$

3. $c_n = 4 - 2 \times 0{,}3^n$

Exercice 4 – Lever une indétermination

Détermine la limite de chaque suite.

1. $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$

2. $v_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Somme de termes géométriques

Calcule $S = 1 + 1{,}1 + 1{,}1^2 + \ldots + 1{,}1^9$ (au millième).

Exercice 6 – Somme infinie

On additionne $3 + 1{,}5 + 0{,}75 + \ldots$, chaque terme étant la moitié du précédent. Vers quel nombre tend la somme ?

Exercice 7 – Théorème des gendarmes

Soit $u_n = 5 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Montre que (u_n) converge et donne sa limite.

Exercice 8 – Suite arithmético-géométrique

On considère $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 6$ et $u_0 = 2$.

1. Détermine la solution constante ℓ.

2. Montre que $v_n = u_n - \ell$ est géométrique et exprime u_n.

3. Calcule u_3 et la limite de (u_n).

Exercice 9 – Épargne avec retraits

Un compte rémunéré à 2 % par an contient 10 000 € ; on retire 300 € à la fin de chaque année : $u_{n+1} = 1{,}02\,u_n - 300$, $u_0 = 10\,000$.

1. Détermine la solution constante.

2. Exprime u_n en fonction de n.

3. Que contient le compte après 10 ans (à l'euro près) ?

Exercice 10 – Médicament qui s'accumule

Un patient prend 4 mg d'un médicament chaque matin ; 75 % de la quantité présente reste d'un jour à l'autre. On note q_n la quantité juste après la n-ième prise : $q_{n+1} = 0{,}75\,q_n + 4$. Vers quelle quantité q_n tend-elle ?

Exercice 11 – Refroidissement de Newton

Un plat sort du four à 85 °C dans une pièce à 20 °C. Chaque minute, l'écart avec la pièce diminue de 15 % : $T_{n+1} - 20 = 0{,}85\,(T_n - 20)$.

1. Montre que $T_{n+1} = 0{,}85\,T_n + 3$.

2. Exprime T_n en fonction de n.

3. Calcule T_5 au dixième et la limite de (T_n).

Exercice 12 – Algorithme de seuil

Avec $T_n = 20 + 65 \times 0{,}85^n$, on veut savoir à partir de quelle minute le plat descend sous 30 °C. Complète et exécute l'algorithme.
<code>T = 85 ; n = 0
while T >= 30 :
  T = 0.85 * T + 3
  n = n + 1</code>

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Repeuplement d'un lac

Un lac contient 800 truites. Chaque année, 10 % disparaissent et l'on en réintroduit 150 : $p_{n+1} = 0{,}9\,p_n + 150$.

1. Exprime p_n en fonction de n.

2. Quelle est la limite de (p_n) ?

3. À partir de quelle année la population dépasse-t-elle 1 400 truites ?

Exercice 14 – Durée d'un emprunt

On emprunte 20 000 € au taux mensuel de 0,4 % et l'on rembourse 300 € par mois : $c_{n+1} = 1{,}004\,c_n - 300$, $c_0 = 20\,000$.

1. Exprime c_n en fonction de n.

2. Combien de mensualités faut-il pour rembourser ?

Exercice 15 – Escalier et point fixe

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Calcule u_1, u_2, u_3 au millième.

2. Résous $\sqrt{x+6} = x$ pour $x \geq 0$.

3. Conjecture le comportement de la suite.

Exercice 16 – Modèle de Verhulst

Une population de lapins suit $N_{t+1} = N_t + 0{,}5\,N_t\left(1 - \dfrac{N_t}{1\,000}\right)$, avec $N_0 = 100$.

1. Calcule N_1.

2. Quels sont les points fixes du modèle ?

3. Interprète le point fixe non nul.

Exercice 17 – Méthode de Héron

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right)$.

1. Calcule u_1 et u_2.

2. Montre que si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $\ell = \sqrt{3}$.

Exercice 18 – Combien de prises ?

Avec 4 mg par jour et 75 % restant d'un jour à l'autre, la quantité juste après la n-ième prise vaut $q_n = 4(1 + 0{,}75 + \ldots + 0{,}75^{n-1})$.

1. Montre que $q_n = 16(1 - 0{,}75^n)$.

2. À partir de combien de prises la quantité dépasse-t-elle 15 mg ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Deux offres d’épargne

Offre A : 1 000 € placés à 5 % par an (intérêts composés). Offre B : 1 000 € auxquels la banque ajoute 60 € par an. Au bout de combien d’années l’offre A devient-elle plus intéressante ?

Exercice 20 – Étude complète type contrôle

Une plateforme compte 1 000 abonnés. Chaque mois, 85 % restent et 300 nouveaux arrivent : $a_{n+1} = 0{,}85\,a_n + 300$, $a_0 = 1\,000$.

1. Montre que $b_n = a_n - 2\,000$ est géométrique.

2. Exprime a_n et donne sa limite.

3. À partir de quel mois y a-t-il plus de 1 900 abonnés ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Choisir le bon modèle

Une hausse de 3 % multiplie par $1 + 0{,}03$: suite géométrique de raison 1,03.

Ajouter 50 € à chaque étape : suite arithmétique de raison 50.

Une baisse de 2 % multiplie par $1 - 0{,}02$: suite géométrique de raison 0,98.

Réponse. Géométrique de raison 1,03 · arithmétique de raison 50 · géométrique de raison 0,98.

Erreur fréquente. Un pourcentage constant donne toujours une suite géométrique, jamais arithmétique.

Correction de l'exercice 2 – Calculer un terme

$u_{n+1} = 1{,}03\,u_n$: suite géométrique de premier terme $u_0 = 2\,000$ et de raison 1,03, donc $u_n = 2\,000 \times 1{,}03^n$.

$u_5 = 2\,000 \times 1{,}03^5 \approx 2\,318{,}55$ €.

Réponse. $u_n = 2\,000 \times 1{,}03^n$; $u_5 \approx 2\,318{,}55$ €.

Correction de l'exercice 3 – Limites de suites géométriques

$0 < 0{,}7 < 1$, donc $0{,}7^n \to 0$.

$1{,}5 > 1$, donc $1{,}5^n \to +\infty$.

$0 < 0{,}3 < 1$, donc $0{,}3^n \to 0$ et $c_n \to 4 - 0 = 4$.

Réponse. $0 \cdot +\infty \cdot 4$.

Rappel de cours. $q^n \to 0$ si $0 < q < 1$; $q^n \to +\infty$ si $q > 1$.

Correction de l'exercice 4 – Lever une indétermination

On factorise par n : $u_n = \dfrac{2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$. Comme $\frac{3}{n} \to 0$ et $\frac{1}{n} \to 0$, $u_n \to 2$.

On factorise par n^2 : $v_n = \dfrac{1 + \frac{1}{n^2}}{3} \to \dfrac{1}{3}$.

Réponse. $\lim u_n = 2$; $\lim v_n = \frac{1}{3}$.

Erreur fréquente. « $\frac{\infty}{\infty}$ » ne vaut pas 1 : c'est une forme indéterminée.

Correction de l'exercice 5 – Somme de termes géométriques

C'est la somme de 10 termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1,1.

$S = \dfrac{1 - 1{,}1^{10}}{1 - 1{,}1} = \dfrac{1{,}1^{10} - 1}{0{,}1}$.

$1{,}1^{10} \approx 2{,}593\,742$, donc $S \approx 15{,}937$.

Réponse. $S \approx 15{,}937$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. $1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$: il y a $n + 1$ termes.

Correction de l'exercice 6 – Somme infinie

La somme des $n + 1$ premiers termes est $3\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$.

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \to \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

La somme tend vers $3 \times 2 = 6$.

Réponse. La somme tend vers 6.

Correction de l'exercice 7 – Théorème des gendarmes

Pour tout n, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $5 - \dfrac{1}{n+1} \leq u_n \leq 5 + \dfrac{1}{n+1}$.

$\dfrac{1}{n+1} \to 0$, donc les deux encadrants tendent vers 5.

D'après le théorème des gendarmes, $u_n \to 5$.

Réponse. (u_n) converge vers 5.

Correction de l'exercice 8 – Suite arithmético-géométrique

$\ell = 0{,}5\ell + 6 \Leftrightarrow 0{,}5\ell = 6 \Leftrightarrow \ell = 12$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0{,}5u_n + 6 - 12 = 0{,}5(u_n - 12) = 0{,}5\, v_n$: géométrique de raison 0,5, $v_0 = 2 - 12 = -10$.

Donc $u_n = 12 - 10 \times 0{,}5^n$.

$u_3 = 12 - 10 \times 0{,}125 = 10{,}75$. Comme $0{,}5^n \to 0$, $u_n \to 12$.

Réponse. $\ell = 12$; $u_n = 12 - 10 \times 0{,}5^n$; $u_3 = 10{,}75$; limite 12.

Correction de l'exercice 9 – Épargne avec retraits

$\ell = 1{,}02\ell - 300 \Leftrightarrow 0{,}02\ell = 300 \Leftrightarrow \ell = 15\,000$.

$u_n - 15\,000$ est géométrique de raison 1,02 et vaut $-5\,000$ au départ : $u_n = 15\,000 - 5\,000 \times 1{,}02^n$.

$u_{10} = 15\,000 - 5\,000 \times 1{,}02^{10} \approx 8\,905$ €.

Réponse. $\ell = 15\,000$; $u_n = 15\,000 - 5\,000 \times 1{,}02^n$; environ 8 905 €.

Erreur fréquente. Ici $a = 1{,}02 > 1$: la suite ne tend pas vers le point fixe, elle décroît vers $-\infty$ (le compte finit vide).

Correction de l'exercice 10 – Médicament qui s'accumule

Solution constante : $\ell = 0{,}75\ell + 4 \Leftrightarrow 0{,}25\ell = 4 \Leftrightarrow \ell = 16$.

$q_n - 16$ est géométrique de raison 0,75, et $0 < 0{,}75 < 1$.

Donc $q_n \to 16$ mg.

Réponse. La quantité se stabilise vers 16 mg.

Rappel de cours. Dose D, fraction restante q : équilibre $\dfrac{D}{1 - q}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Refroidissement de Newton

$T_{n+1} = 0{,}85T_n - 0{,}85 \times 20 + 20 = 0{,}85T_n + 3$.

La solution constante est 20 et $T_n - 20 = 65 \times 0{,}85^n$, donc $T_n = 20 + 65 \times 0{,}85^n$.

$T_5 = 20 + 65 \times 0{,}85^5 \approx 48{,}8$ °C. Comme $0{,}85^n \to 0$, $T_n \to 20$ °C.

Réponse. $T_n = 20 + 65 \times 0{,}85^n$; $T_5 \approx 48{,}8$ °C ; limite 20 °C.

Correction de l'exercice 12 – Algorithme de seuil

La boucle calcule les termes successifs tant que $T \geq 30$.

$T_n < 30 \Leftrightarrow 65 \times 0{,}85^n < 10 \Leftrightarrow 0{,}85^n < \frac{10}{65}$.

$0{,}85^{11} \approx 0{,}167$ et $0{,}85^{12} \approx 0{,}142$, avec $\frac{10}{65} \approx 0{,}154$: le seuil est atteint pour $n = 12$.

Réponse. L'algorithme renvoie $n = 12$: après 12 minutes.

Correction de l'exercice 13 – Repeuplement d'un lac

$\ell = 0{,}9\ell + 150 \Leftrightarrow \ell = 1\,500$; $p_n - 1\,500$ est géométrique de raison 0,9 et vaut -700 au départ : $p_n = 1\,500 - 700 \times 0{,}9^n$.

$0{,}9^n \to 0$, donc $p_n \to 1\,500$.

$p_n > 1\,400 \Leftrightarrow 700 \times 0{,}9^n < 100 \Leftrightarrow 0{,}9^n < \frac{1}{7}$. $p_{18} \approx 1\,394{,}9$ et $p_{19} \approx 1\,405{,}4$.

Réponse. $p_n = 1\,500 - 700 \times 0{,}9^n$; limite 1 500 ; à partir de la 19e année.

Correction de l'exercice 14 – Durée d'un emprunt

$\ell = 1{,}004\ell - 300 \Leftrightarrow \ell = 75\,000$; $c_n = 75\,000 - 55\,000 \times 1{,}004^n$.

Remboursé quand $c_n \leq 0 \Leftrightarrow 1{,}004^n \geq \frac{75}{55} \approx 1{,}364$.

À la calculatrice ou par un algorithme de seuil : $c_{77} > 0$ et $c_{78} < 0$.

Réponse. $c_n = 75\,000 - 55\,000 \times 1{,}004^n$; 78 mensualités (la dernière incomplète).

Erreur fréquente. $20\,000 \div 300 \approx 67$ oublie les intérêts : il faut 11 mois de plus.

Correction de l'exercice 15 – Escalier et point fixe

$u_1 = \sqrt{6} \approx 2{,}449$; $u_2 = \sqrt{8{,}449} \approx 2{,}907$; $u_3 \approx 2{,}984$.

$\sqrt{x+6} = x \Rightarrow x + 6 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -2$; seul $x = 3$ convient.

La suite semble croissante et converger vers le point fixe 3 (escalier entre la courbe de $\sqrt{x+6}$ et la droite $y = x$).

Réponse. $u_1 \approx 2{,}449$, $u_2 \approx 2{,}907$, $u_3 \approx 2{,}984$; point fixe 3 ; la suite croît vers 3.

Correction de l'exercice 16 – Modèle de Verhulst

$N_1 = 100 + 0{,}5 \times 100 \times 0{,}9 = 145$.

$N = N + 0{,}5N\left(1 - \frac{N}{1\,000}\right) \Leftrightarrow 0{,}5N\left(1 - \frac{N}{1\,000}\right) = 0 \Leftrightarrow N = 0$ ou $N = 1\,000$.

1 000 est la capacité d'accueil du milieu : la population s'en approche sans la dépasser durablement.

Réponse. $N_1 = 145$; points fixes 0 et 1 000 ; 1 000 = capacité maximale du milieu.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 17 – Méthode de Héron

$u_1 = \frac{1}{2}(2 + 1{,}5) = 1{,}75$; $u_2 = \frac{1}{2}\left(1{,}75 + \frac{3}{1{,}75}\right) \approx 1{,}732\,14$.

Par passage à la limite : $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{3}{\ell}\right) \Leftrightarrow 2\ell = \ell + \frac{3}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 3$.

Comme $\ell > 0$, $\ell = \sqrt{3} \approx 1{,}732\,05$: déjà 4 décimales justes au rang 2.

Réponse. $u_1 = 1{,}75$, $u_2 \approx 1{,}732\,14$; $\ell = \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 18 – Combien de prises ?

Somme de n termes géométriques : $q_n = 4 \times \dfrac{1 - 0{,}75^n}{1 - 0{,}75} = 16(1 - 0{,}75^n)$.

$q_n > 15 \Leftrightarrow 0{,}75^n < \frac{1}{16} \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln \frac{1}{16}}{\ln 0{,}75} \approx 9{,}64$.

Contrôle : $q_9 \approx 14{,}80$ et $q_{10} \approx 15{,}10$.

Réponse. À partir de la 10e prise.

Correction de l'exercice 19 – Deux offres d'épargne

$A_n = 1\,000 \times 1{,}05^n$ (géométrique) et $B_n = 1\,000 + 60n$ (arithmétique).

On compare : $A_8 \approx 1\,477{,}46 < B_8 = 1\,480$ et $A_9 \approx 1\,551{,}33 > B_9 = 1\,540$.

Une croissance géométrique finit toujours par dépasser une croissance arithmétique.

Réponse. À partir de la 9e année.

Correction de l'exercice 20 – Étude complète type contrôle

$b_{n+1} = 0{,}85a_n + 300 - 2\,000 = 0{,}85(a_n - 2\,000) = 0{,}85\,b_n$; $b_0 = -1\,000$.

$a_n = 2\,000 - 1\,000 \times 0{,}85^n$; $0{,}85^n \to 0$, donc $a_n \to 2\,000$.

$a_n > 1\,900 \Leftrightarrow 0{,}85^n < 0{,}1 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}85} \approx 14{,}2$. Contrôle : $a_{14} \approx 1\,897$, $a_{15} \approx 1\,913$.

Réponse. $a_n = 2\,000 - 1\,000 \times 0{,}85^n$; limite 2 000 ; à partir du 15e mois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).