Suites et modèles d'évolution — Terminale maths complémentaires

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

En maths complémentaires, une suite sert à modéliser une évolution : un capital, une dette, un médicament qui s'accumule, une population. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout le chapitre : reconnaître une suite géométrique ou arithmétique, calculer la limite de q^n et d'une somme $1 + q + \ldots + q^n$, utiliser le théorème des gendarmes, étudier une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ grâce à sa solution constante, déterminer un seuil et conjecturer le comportement d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-complementaires/suites-modeles-discrets

Exercice 1 – Choisir le bon modèle

Pour chaque situation, indique si la suite est arithmétique ou géométrique et donne sa raison.

1. Un loyer augmente de 3 % par an.

2. Une tirelire reçoit 50 € par mois.

3. Une forêt perd 2 % de ses arbres par an.

Exercice 2 – Calculer un terme

Un capital de 2 000 € est placé à intérêts composés au taux de 3 % par an. On note u_n le capital après n années.

1. Exprime u_n en fonction de n.

2. Calcule u_5 au centime près.

Exercice 3 – Limites de suites géométriques

Détermine la limite de chaque suite.

1. $a_n = 0{,}7^n$

2. $b_n = 1{,}5^n$

3. $c_n = 4 - 2 \times 0{,}3^n$

Exercice 4 – Lever une indétermination

Détermine la limite de chaque suite.

1. $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$

2. $v_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Somme de termes géométriques

Calcule $S = 1 + 1{,}1 + 1{,}1^2 + \ldots + 1{,}1^9$ (au millième).

Exercice 6 – Somme infinie

On additionne $3 + 1{,}5 + 0{,}75 + \ldots$, chaque terme étant la moitié du précédent. Vers quel nombre tend la somme ?

Exercice 7 – Théorème des gendarmes

Soit $u_n = 5 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Montre que (u_n) converge et donne sa limite.

Exercice 8 – Suite arithmético-géométrique

On considère $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 6$ et $u_0 = 2$.

1. Détermine la solution constante ℓ.

2. Montre que $v_n = u_n - \ell$ est géométrique et exprime u_n.

3. Calcule u_3 et la limite de (u_n).

Exercice 9 – Épargne avec retraits

Un compte rémunéré à 2 % par an contient 10 000 € ; on retire 300 € à la fin de chaque année : $u_{n+1} = 1{,}02\,u_n - 300$, $u_0 = 10\,000$.

1. Détermine la solution constante.

2. Exprime u_n en fonction de n.

3. Que contient le compte après 10 ans (à l'euro près) ?

Exercice 10 – Médicament qui s'accumule

Un patient prend 4 mg d'un médicament chaque matin ; 75 % de la quantité présente reste d'un jour à l'autre. On note q_n la quantité juste après la n-ième prise : $q_{n+1} = 0{,}75\,q_n + 4$. Vers quelle quantité q_n tend-elle ?

Exercice 11 – Refroidissement de Newton

Un plat sort du four à 85 °C dans une pièce à 20 °C. Chaque minute, l'écart avec la pièce diminue de 15 % : $T_{n+1} - 20 = 0{,}85\,(T_n - 20)$.

1. Montre que $T_{n+1} = 0{,}85\,T_n + 3$.

2. Exprime T_n en fonction de n.

3. Calcule T_5 au dixième et la limite de (T_n).

Exercice 12 – Algorithme de seuil

Avec $T_n = 20 + 65 \times 0{,}85^n$, on veut savoir à partir de quelle minute le plat descend sous 30 °C. Complète et exécute l'algorithme.
<code>T = 85 ; n = 0
while T >= 30 :
  T = 0.85 * T + 3
  n = n + 1</code>

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Repeuplement d'un lac

Un lac contient 800 truites. Chaque année, 10 % disparaissent et l'on en réintroduit 150 : $p_{n+1} = 0{,}9\,p_n + 150$.

1. Exprime p_n en fonction de n.

2. Quelle est la limite de (p_n) ?

3. À partir de quelle année la population dépasse-t-elle 1 400 truites ?

Exercice 14 – Durée d'un emprunt

On emprunte 20 000 € au taux mensuel de 0,4 % et l'on rembourse 300 € par mois : $c_{n+1} = 1{,}004\,c_n - 300$, $c_0 = 20\,000$.

1. Exprime c_n en fonction de n.

2. Combien de mensualités faut-il pour rembourser ?

Exercice 15 – Escalier et point fixe

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Calcule u_1, u_2, u_3 au millième.

2. Résous $\sqrt{x+6} = x$ pour $x \geq 0$.

3. Conjecture le comportement de la suite.

Exercice 16 – Modèle de Verhulst

Une population de lapins suit $N_{t+1} = N_t + 0{,}5\,N_t\left(1 - \dfrac{N_t}{1\,000}\right)$, avec $N_0 = 100$.

1. Calcule N_1.

2. Quels sont les points fixes du modèle ?

3. Interprète le point fixe non nul.

Exercice 17 – Méthode de Héron

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right)$.

1. Calcule u_1 et u_2.

2. Montre que si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors $\ell = \sqrt{3}$.

Exercice 18 – Combien de prises ?

Avec 4 mg par jour et 75 % restant d'un jour à l'autre, la quantité juste après la n-ième prise vaut $q_n = 4(1 + 0{,}75 + \ldots + 0{,}75^{n-1})$.

1. Montre que $q_n = 16(1 - 0{,}75^n)$.

2. À partir de combien de prises la quantité dépasse-t-elle 15 mg ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Deux offres d’épargne

Offre A : 1 000 € placés à 5 % par an (intérêts composés). Offre B : 1 000 € auxquels la banque ajoute 60 € par an. Au bout de combien d’années l’offre A devient-elle plus intéressante ?

Exercice 20 – Étude complète type contrôle

Une plateforme compte 1 000 abonnés. Chaque mois, 85 % restent et 300 nouveaux arrivent : $a_{n+1} = 0{,}85\,a_n + 300$, $a_0 = 1\,000$.

1. Montre que $b_n = a_n - 2\,000$ est géométrique.

2. Exprime a_n et donne sa limite.

3. À partir de quel mois y a-t-il plus de 1 900 abonnés ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).