

Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Travailler modulo n , c'est décider de ne retenir d'un entier que son RESTE dans la division par n : les nombres géants deviennent alors une poignée de cas à examiner. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout le chapitre d'arithmétique de maths expertes : divisibilité dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne (y compris pour un dividende négatif), congruences et leur compatibilité avec l'addition et la multiplication, périodicité des puissances et chiffre des unités, critères de divisibilité par 3, 9 et 11 démontrés, résolution d'équations $ax \equiv b [n]$, systèmes de congruences, et raisonnements par disjonction selon le reste. Les derniers exercices sont des applications complètes : clé de contrôle du numéro de sécurité sociale, calcul du jour de la semaine, démonstration qu'une équation n'a AUCUNE solution entière, et chiffrement affine avec son déchiffrement. Chaque correction est rédigée étape par étape, avec les vérifications.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/divisibilite-et-congruences

Exercice 1 - Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

On dit que l'entier a DIVISE l'entier b , et on note $a \mid b$, s'il existe un entier k tel que $b = ka$. Attention : la définition porte sur des entiers relatifs, et le quotient doit être entier.

1. Déterminer tous les diviseurs POSITIFS de 36.
2. Justifier que $7 \mid 343$ et que $6 \nmid 100$.
3. Démontrer que si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid (b + c)$ et plus généralement $a \mid (ub + vc)$ pour tous entiers u et v .

Exercice 2 - Division euclidienne, y compris pour un négatif

La division euclidienne de a par $b > 0$ donne l'UNIQUE couple $(q; r)$ d'entiers tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. La condition sur le reste est essentielle : c'est elle qui assure l'unicité, et elle réserve une surprise pour les dividendes négatifs.

1. Effectuer la division euclidienne de 2026 par 7, puis par 12.
2. Effectuer la division euclidienne de -2026 par 7.
3. Quel est le reste de la division de 2026 par 2026 ? par 1 ?

Exercice 3 - Congruences : définition et premières lectures

On dit que a est CONGRU à b modulo n , et on note $a \equiv b [n]$, lorsque n divise $a - b$ — autrement dit lorsque a et b ont le même reste dans la division par n .

1. Déterminer le reste de 2026 modulo 7, modulo 9 et modulo 11.
2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies : $23 \equiv 2 [7]$? $-5 \equiv 3 [8]$? $100 \equiv 4 [6]$?
3. Traduire « n est pair » et « n est un multiple de 5 » à l'aide de congruences.

Exercice 4 - Calculer avec les congruences

Les congruences sont compatibles avec l'addition, la soustraction et la multiplication : si $a \equiv a' [n]$ et $b \equiv b' [n]$, alors $a + b \equiv a' + b' [n]$ et $ab \equiv a'b' [n]$. On peut donc remplacer chaque nombre par son reste AVANT de calculer.

1. Déterminer le reste de 47×53 modulo 9, sans effectuer le produit.
2. Déterminer le reste de $2026 + 1234$ modulo 7.
3. Déterminer le reste de 2026^2 modulo 9.

Exercice 5 - Chiffre des unités d'une grande puissance

Le chiffre des unités d'un entier est son reste modulo 10. Comme les restes des puissances se répètent, on peut déterminer le dernier chiffre d'un nombre qu'on ne saurait pas écrire.

1. Déterminer le chiffre des unités de 7^{2026} .
2. Déterminer le chiffre des unités de 3^{2026} et de 2^{2026} .
3. Expliquer pourquoi les puissances de 5 et de 6 ne posent pas ce problème.

Exercice 6 - Périodicité des restes d'une puissance

La méthode précédente vaut pour n'importe quel module, pas seulement 10. On étudie ici les restes de 5^n modulo 7.

1. Dresser le tableau des restes de 5^n modulo 7 pour n de 1 à 7.
2. En déduire la période, puis le reste de 5^{2026} modulo 7.
3. Déterminer les entiers n pour lesquels $7 \mid 5^n - 1$.

Exercice 7 - Critères de divisibilité par 3, 9 et 11

Les critères appris au collège se démontrent en une ligne avec les congruences. Tout repose sur les restes de 10^k : modulo 9 on a $10 \equiv 1$, modulo 11 on a $10 \equiv -1$.

1. Démontrer qu'un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est. Même question pour 3.
2. Démontrer le critère de divisibilité par 11 (somme alternée des chiffres).
3. Appliquer les deux critères à 4059.

Exercice 8 - Divisibilité d'une expression pour tout n

Pour montrer qu'une expression est divisible par d POUR TOUT entier n , on ne peut pas tester tous les cas — mais il suffit d'examiner les d restes possibles de n .

1. Démontrer que $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 pour tout entier n .
2. Démontrer que $n^3 - n$ est divisible par 6 pour tout entier n .
3. Démontrer que $n^2 + n$ est toujours pair.

Exercice 9 - Disjonction selon le reste : les carrés

Un carré ne peut pas prendre n'importe quel reste. Établir la table des restes possibles est le point de départ de nombreuses démonstrations d'impossibilité.

1. Déterminer les restes possibles de n^2 modulo 4.
2. Déterminer les restes possibles de n^2 modulo 3.
3. En déduire que si $3 \mid n^2$, alors $3 \mid n$.

Exercice 10 - Résoudre une équation de congruence

Une équation $ax \equiv b \pmod{n}$ porte sur des restes : il suffit donc de tester les n valeurs possibles de x modulo n . Le nombre de solutions, lui, réserve des surprises.

1. Résoudre $5x \equiv 3 \pmod{7}$.
2. Résoudre $6x \equiv 4 \pmod{8}$.
3. Résoudre $4x \equiv 3 \pmod{6}$.

Exercice 11 - Une équation avec un carré

Les équations non linéaires se traitent de la même façon : par examen exhaustif des restes. On résout $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$, puis $x^2 \equiv 2 \pmod{5}$.

1. Résoudre $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$, et interpréter le résultat.
2. Résoudre $x^2 \equiv 2 \pmod{5}$.
3. En déduire que l'équation $x^2 = 5y + 2$ n'a pas de solution entière.

Exercice 12 - Système de deux congruences

On cherche les entiers x vérifiant simultanément $x \equiv 2 \pmod{5}$ et $x \equiv 3 \pmod{7}$.

1. Déterminer une solution particulière en listant les entiers vérifiant la première condition.
2. Démontrer que l'ensemble des solutions est $x \equiv 17 \pmod{35}$.
3. En déduire le plus petit entier positif solution, et le plus petit supérieur à 1000.

Exercice 13 - Divisibilité d'une suite d'entiers

Les congruences permettent de démontrer qu'une expression dépendant de n est divisible par un entier fixé, sans récurrence.

1. Démontrer que $4^n + 2$ est divisible par 3 pour tout entier naturel n .
2. Démontrer que $3^{2n} - 1$ est divisible par 8 pour tout entier naturel n .
3. Déterminer les entiers n pour lesquels $2^n + 1$ est divisible par 3.

Exercice 14 - Quel jour de la semaine ?

Les jours de la semaine se répètent avec une période de 7 : le calendrier est donc un problème de congruences modulo 7. On sait que le 1^{er} septembre 2026 est un MARDI.

1. Quel jour de la semaine sera le 1^{er} septembre 2027 ?

2. Quel jour de la semaine sera le 1^{er} octobre 2026 ?
3. Quel jour de la semaine tombera le 300^e jour après le 1^{er} septembre 2026 ?

Exercice 15 - La clé du numéro de sécurité sociale

Le numéro de sécurité sociale français comporte 13 chiffres, suivis d'une CLÉ de contrôle à deux chiffres. Cette clé vaut $97 - r$, où r est le reste du nombre à 13 chiffres dans la division par 97. Elle sert à détecter les erreurs de saisie.

1. Calculer la clé associée au numéro $N = 2\,550\,833\,189\,456$, sachant que $N \equiv 81 [97]$.
2. Démontrer que le nombre formé par N suivi de sa clé (c'est-à-dire $100N + \text{clé}$) est divisible par 97.
3. Expliquer pourquoi ce système détecte toute erreur portant sur un seul chiffre.

Exercice 16 - Reste d'une très grande puissance

On veut le reste de 2026^{2026} dans la division par 7. Le nombre a plus de six mille chiffres : seule la réduction modulo 7 permet de conclure.

1. Réduire d'abord la BASE modulo 7.
2. Déterminer la période des puissances de cette base modulo 7.
3. En déduire le reste cherché.

Exercice 17 - Une équation sans solution entière

On veut démontrer que l'équation $x^2 + y^2 = 2023$ n'admet AUCUN couple $(x; y)$ d'entiers pour solution. Tester des valeurs ne prouverait rien : il faut un argument modulo bien choisi.

1. Déterminer les restes possibles de $x^2 + y^2$ modulo 4.
2. Déterminer le reste de 2023 modulo 4, et conclure.
3. L'équation $x^2 + y^2 = 2026$ a-t-elle des solutions ?

Exercice 18 - Les cubes modulo 9

Le même schéma, avec un module moins évident. On veut montrer que l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 4$ n'a aucune solution entière — un résultat qui a résisté longtemps aux tentatives numériques.

1. Déterminer les restes possibles d'un cube modulo 9.
2. En déduire les restes possibles d'une somme de trois cubes modulo 9.
3. Conclure quant à l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 4$.

Exercice 19 - Divisibilité d'une somme de puissances

On étudie la suite définie par $u_n = 2^n + 3^n$ pour $n \geq 1$, et l'on cherche pour quelles valeurs de n elle est divisible par 5.

1. Dresser le tableau des restes de 2^n et de 3^n modulo 5.

2. En déduire les restes de u_n modulo 5, puis les entiers n tels que $5 \mid u_n$.
3. Retrouver ce résultat par un argument direct, sans tableau.

Exercice 20 - Problème de synthèse : un chiffrement affine

On code les lettres de l'alphabet par leur rang : $A = 0, B = 1, \dots, Z = 25$. Le chiffrement affine associe à la lettre de rang x la lettre de rang $y = 5x + 3$ modulo 26. On note f cette transformation.

1. Coder le mot MATH.
2. Montrer que 21 est un « inverse » de 5 modulo 26, c'est-à-dire que $5 \times 21 \equiv 1 [26]$.
3. En déduire la formule de déchiffrement, puis décoder le mot obtenu à la question 1.
4. Expliquer pourquoi le coefficient 5 ne peut pas être remplacé par 13 ni par 2.