

# Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

## 20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

### Présentation

Dans  $\mathbb{R}$ , une équation polynomiale peut n'avoir aucune solution ; dans  $\mathbb{C}$ , un polynôme de degré  $n$  a toujours exactement  $n$  racines comptées avec leur multiplicité — c'est le théorème fondamental de l'algèbre, et il change tout : résoudre devient toujours possible, factoriser aussi. Ces 20 exercices corrigés couvrent l'ensemble du chapitre en maths expertes : équations du second degré à coefficients réels puis complexes, racine évidente et factorisation, polynômes de degré 3, 4 et 5, racines conjuguées d'un polynôme à coefficients réels, relations entre coefficients et racines, équations bicarrées et réciproques, factorisation de  $z^n - 1$ , et interprétation géométrique des racines. Deux réflexes reviennent à chaque exercice : une racine connue fait descendre le degré d'une unité, et la somme et le produit des racines fournissent une vérification gratuite. Les quatre derniers exercices sont des problèmes de synthèse type bac — dont le calcul de la valeur exacte de  $\cos \frac{2\pi}{5}$ .

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

[mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/equations-polynomiales-complexes](http://mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/equations-polynomiales-complexes)

### Exercice 1 - Équations qui se ramènent à $z^2 = a$

Dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $z^2 = -9$  n'a pas de solution. Dans  $\mathbb{C}$ , elle en a exactement deux : c'est le point de départ de tout le chapitre.

1. Résoudre  $z^2 = -9$ , puis  $z^2 + 4 = 0$ .
2. Résoudre  $(z - 1)^2 = -4$ .
3. Résoudre  $(2z + 3)^2 = -25$ .

### Exercice 2 - Second degré à coefficients réels

Quand  $a, b, c$  sont réels et  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  admet deux solutions complexes CONJUGUÉES :  $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

1. Résoudre  $z^2 - 2z + 5 = 0$ .
2. Résoudre  $z^2 + z + 1 = 0$ . On note  $j$  la solution de partie imaginaire positive.
3. Vérifier que  $j^3 = 1$  et que  $1 + j + j^2 = 0$ .
4. Résoudre  $4z^2 - 4z + 5 = 0$ .

### Exercice 3 - Somme et produit : reconstruire une équation

Deux nombres de somme  $S$  et de produit  $P$  sont exactement les racines de l'équation  $z^2 - Sz + P = 0$ . Cette lecture inverse sert dans les deux sens : pour fabriquer une équation, et pour contrôler une résolution.

1. Déterminer deux nombres complexes de somme 6 et de produit 34.
2. Déterminer deux nombres complexes de somme  $2i$  et de produit  $-1$ .

3. Déterminer deux nombres complexes de somme  $1 + i$  et de produit  $i$ .

#### Exercice 4 - Racine évidente et factorisation d'un degré 3

On considère  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$ . Une racine « évidente » se cherche parmi les diviseurs du terme constant : ici  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ .

1. Vérifier que 3 est une racine de  $P$ .
2. Déterminer les réels  $a, b, c$  tels que  $P(z) = (z - 3)(az^2 + bz + c)$ .
3. Résoudre  $P(z) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

#### Exercice 5 - Degré 3 à coefficients réels avec une racine complexe

On considère  $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$ , dont tous les coefficients sont réels. On admet que  $1 - i$  en est une racine.

1. Justifier que  $1 + i$  est également une racine de  $P$ .
2. En utilisant la SOMME des racines, déterminer la troisième racine sans effectuer de division.
3. Factoriser  $P(z)$  et vérifier le résultat.

#### Exercice 6 - Degré 4 à coefficients réels

On considère  $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$ , à coefficients réels. On admet que  $2i$  est une racine.

1. Donner une deuxième racine sans calcul.
2. En déduire un facteur du second degré à coefficients réels, puis factoriser  $P(z)$ .
3. Résoudre  $P(z) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

#### Exercice 7 - Équation bicarrée

Une équation bicarrée ne contient que des puissances paires : le changement de variable  $Z = z^2$  la ramène au second degré. On résout  $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$ .

1. Résoudre l'équation en posant  $Z = z^2$ .
2. En déduire toutes les solutions dans  $\mathbb{C}$ .
3. Factoriser  $z^4 + 3z^2 - 4$  en produit de facteurs du premier degré.

#### Exercice 8 - Second degré à coefficients complexes

La formule du discriminant reste valable avec des coefficients complexes, mais il faut calculer soi-même une racine carrée  $\delta$  de  $\Delta$ , et les racines ne sont plus conjuguées.

1. Résoudre  $z^2 - (1 + 2i)z + (-1 + i) = 0$ .
2. Résoudre  $z^2 - (3 + 4i)z + (-1 + 5i) = 0$ .

**Exercice 9 - Factoriser par groupement**

Toutes les équations ne demandent pas le discriminant : certaines se factorisent à vue, en regroupant les termes deux à deux.

1. Résoudre  $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  en factorisant par groupement.
2. Résoudre  $z^4 - 1 = 0$ .
3. Résoudre  $(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2) = 0$ .

**Exercice 10 - Théorème fondamental de l'algèbre et multiplicité**

Le théorème fondamental de l'algèbre (admis) affirme que tout polynôme de degré  $n \geq 1$  à coefficients complexes admet exactement  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$ , comptées avec leur MULTIPLICITÉ. On considère  $P(z) = z^3 - iz^2 + z - i$ .

1. Vérifier que  $i$  est racine de  $P$ , puis factoriser  $P(z)$  par groupement.
2. Acheter la factorisation en produit de facteurs du premier degré.
3. Donner les racines de  $P$  avec leur multiplicité, et vérifier le compte annoncé par le théorème.

**Exercice 11 - Factorisation de  $z^n - 1$** 

Les racines  $n$ -ièmes de l'unité, vues au chapitre précédent, sont exactement les racines du polynôme  $z^n - 1$ . Cela en donne deux factorisations, qu'on peut comparer.

1. Factoriser  $z^3 - 1$  de deux façons : par la somme géométrique, puis à l'aide des racines cubiques de l'unité.
2. Factoriser  $z^4 - 1$  en produit de facteurs du premier degré.
3. Justifier que pour tout  $n \geq 1$ ,  $z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})$ .
4. En déduire les solutions de  $1 + z + z^2 + z^3 = 0$ .

**Exercice 12 - Relations entre coefficients et racines**

On considère l'équation  $z^3 + 2z^2 - 5z + 1 = 0$ , dont on note  $z_1, z_2, z_3$  les trois racines dans  $\mathbb{C}$ . Tout l'exercice se fait SANS calculer ces racines.

1. Donner  $z_1 + z_2 + z_3$ ,  $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$  et  $z_1z_2z_3$ .
2. Calculer  $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$ .
3. Calculer  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ .

**Exercice 13 - Un polynôme de degré 5 à coefficients réels**

On considère  $P(z) = z^5 - z^4 + 2z^3 - 2z^2 + z - 1$ , à coefficients réels.

1. Justifier, sans calcul, que  $P$  admet au moins une racine réelle.
2. Factoriser  $P(z)$  par groupement, puis achever la factorisation.
3. Donner toutes les racines avec leur multiplicité.

**Exercice 14 - Équation réciproque : le changement de variable  $u = z + 1/z$** 

Une équation est dite RÉCIPROQUE lorsque ses coefficients se lisent de la même façon dans les deux sens. On résout  $2z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 2 = 0$ , dont les coefficients 2, -5, 6, -5, 2 sont symétriques.

1. Justifier que 0 n'est pas solution, puis diviser l'équation par  $z^2$ .
2. Montrer qu'en posant  $u = z + \frac{1}{z}$ , l'équation devient  $2u^2 - 5u + 2 = 0$ .
3. Résoudre cette équation en  $u$ , puis conclure dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 15 - Une équation avec paramètre**

Pour tout réel  $m$ , on considère l'équation  $(E_m) : z^2 - 2z + m = 0$ .

1. Discuter, selon les valeurs de  $m$ , la nature des solutions de  $(E_m)$ .
2. Lorsque les solutions ne sont pas réelles, déterminer  $m$  pour que leur module soit égal à 2.
3. Lorsque  $m$  décrit  $]1 ; +\infty[$ , décrire l'ensemble des points images des solutions.

**Exercice 16 - Racines et géométrie :  $z^3 = -27$** 

On résout  $z^3 = -27$  de deux façons — par la factorisation polynomiale, puis par la forme exponentielle — avant d'interpréter les solutions dans le plan complexe.

1. Résoudre en factorisant  $z^3 + 27$ .
2. Retrouver les solutions par la forme exponentielle.
3. Placer les images des solutions et déterminer la nature du triangle qu'elles forment.

**Exercice 17 - Bicarrée à discriminant complexe**

On résout  $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ . Le changement de variable  $Z = z^2$  conduit cette fois à des valeurs de  $Z$  NON RÉELLES : il faudra en extraire des racines carrées, ce que la forme exponentielle rend simple.

1. Résoudre l'équation en  $Z = z^2$ .
2. Écrire les deux valeurs de  $Z$  sous forme exponentielle.
3. En déduire les quatre solutions de l'équation initiale.

**Exercice 18 -  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  et la valeur exacte de  $\cos(2\pi/5)$** 

Cette équation cache un joli résultat : elle permet d'obtenir la valeur EXACTE de  $\cos \frac{2\pi}{5}$ , qui ne figure dans aucun tableau de valeurs remarquables. On combine pour cela les racines cinquièmes de l'unité et le changement de variable réciproque.

1. Montrer que les solutions de  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  sont les racines cinquièmes de l'unité autres que 1.
2. En divisant par  $z^2$  et en posant  $u = z + \frac{1}{z}$ , montrer que  $u^2 + u - 1 = 0$ .
3. Résoudre en  $u$ , puis en déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{2\pi}{5}$  et  $\cos \frac{4\pi}{5}$ .

**Exercice 19 - Une racine réelle cachée dans un polynôme complexe**

On considère  $P(z) = z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-1 + 5i)z + 2 - 2i$ . Ses coefficients ne sont pas réels : le théorème des racines conjuguées ne s'applique donc PAS. On cherche néanmoins s'il existe une racine réelle.

1. Montrer que si  $x$  est un réel tel que  $P(x) = 0$ , alors  $x$  vérifie simultanément  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$  et  $3x^2 - 5x + 2 = 0$ .
2. En déduire l'unique racine réelle de  $P$ .
3. Factoriser  $P(z)$ , puis résoudre  $P(z) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 20 - Problème de synthèse : racines d'un polynôme et triangle**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. On considère  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ , à coefficients réels.

1. Vérifier que  $-1$  est racine de  $P$ , puis factoriser  $P(z)$ .
2. Résoudre  $P(z) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ . On note  $A, B, C$  les points images des solutions,  $A$  étant celui d'affixe réelle.
3. Calculer  $AB, AC$  et  $BC$ , puis déterminer la nature du triangle  $ABC$ .
4. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit à  $ABC$ .
5. Vérifier que l'image de  $B$  par la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  est  $A$ , puis calculer l'aire du triangle.

**Corrigés détaillés**

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

**Correction de l'exercice 1 - Équations qui se ramènent à  $z^2 = a$** 

Pour  $z^2 = -9$ , on écrit  $-9 = 9i^2$ , donc l'équation devient  $z^2 = (3i)^2$ .

Elle s'écrit alors  $z^2 - (3i)^2 = 0$ , soit  $(z - 3i)(z + 3i) = 0$  par l'identité  $a^2 - b^2$ .

Un produit est nul si l'un des facteurs l'est :  $S = \{3i ; -3i\}$ .

Contrôle :  $(3i)^2 = 9i^2 = -9$  ✓ et  $(-3i)^2 = 9i^2 = -9$  ✓. Les deux solutions sont opposées, comme toujours pour  $z^2 = a$ .

Pour  $z^2 + 4 = 0$ , on isole :  $z^2 = -4 = (2i)^2$ , donc  $S = \{2i ; -2i\}$ .

Pour  $(z - 1)^2 = -4$ , la même idée s'applique à l'expression  $z - 1$  tout entière :  $z - 1 = 2i$  ou  $z - 1 = -2i$ .

D'où  $z = 1 + 2i$  ou  $z = 1 - 2i$ , soit  $S = \{1 + 2i ; 1 - 2i\}$ . Les deux solutions sont conjuguées.

Contrôle :  $(1 + 2i - 1)^2 = (2i)^2 = -4$  ✓.

Pour  $(2z + 3)^2 = -25$ , on a  $2z + 3 = 5i$  ou  $2z + 3 = -5i$ .

Premier cas :  $2z = -3 + 5i$ , donc  $z = \frac{-3 + 5i}{2}$ . Second cas :  $z = \frac{-3 - 5i}{2}$ .

Contrôle :  $2 \times \frac{-3 + 5i}{2} + 3 = -3 + 5i + 3 = 5i$ , dont le carré vaut  $-25$  ✓.

**Réponse.**  $z^2 = -9 \Rightarrow S = \{3i ; -3i\}$  ·  $z^2 + 4 = 0 \Rightarrow S = \{2i ; -2i\}$  ·

$(z - 1)^2 = -4 \Rightarrow S = \{1 + 2i ; 1 - 2i\}$  ·  $(2z + 3)^2 = -25 \Rightarrow S = \left\{ \frac{-3 + 5i}{2} ; \frac{-3 - 5i}{2} \right\}$ .

**Rappel de cours.**  $z^2 = -a^2$  (avec  $a > 0$ ) a exactement deux solutions,  $ia$  et  $-ia$ . On les obtient en écrivant  $-a^2 = (ia)^2$  puis en factorisant par  $x^2 - y^2$ .

**Erreur fréquente.** N'écrire qu'une solution. Une équation du second degré en  $a$  toujours DEUX dans  $\mathbb{C}$  (éventuellement confondues) : ici les deux opposées.

**Correction de l'exercice 2 - Second degré à coefficients réels**

Première équation :  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$ .

Comme  $\Delta < 0$ , on écrit  $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{16} = 4$ , et les solutions sont  $z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ .

Contrôle par la somme et le produit :  $(1 + 2i) + (1 - 2i) = 2 = -\frac{b}{a}$  ✓ et  $(1 + 2i)(1 - 2i) = 1 + 4 = 5 = \frac{c}{a}$  ✓.

Deuxième équation :  $\Delta = 1 - 4 = -3$ , donc  $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{3}$  et  $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ .

La solution de partie imaginaire positive est  $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ , et l'autre est  $\bar{j} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ .

Vérifions  $j^3 = 1$ . D'abord  $j^2 = \left( \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2i\sqrt{3} + 3i^2}{4} = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ .

On remarque au passage que  $j^2 = \bar{j}$  : les deux solutions sont liées.

Puis  $j^3 = j^2 \times j = \frac{(-1 - i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})}{4} = \frac{1 + 3}{4} = 1$ .

Pour la seconde égalité, il suffit de relire l'équation :  $j$  est solution de  $z^2 + z + 1 = 0$ , donc  $j^2 + j + 1 = 0$ , c'est-à-dire  $1 + j + j^2 = 0$ .

Ce nombre  $j$  est classique : c'est une racine cubique de l'unité, déjà rencontrée au chapitre 1 en résolvant  $z^2 = \bar{z}$ , et au chapitre 2 parmi les racines  $n$ -ièmes.

Dernière équation :  $\Delta = 16 - 4 \times 4 \times 5 = 16 - 80 = -64$ , donc  $\sqrt{-\Delta} = 8$ .

Les solutions sont  $z = \frac{4 \pm 8i}{2 \times 4} = \frac{4 \pm 8i}{8} = \frac{1}{2} \pm i$ .

Contrôle du produit :  $\left(\frac{1}{2} + i\right)\left(\frac{1}{2} - i\right) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} = \frac{c}{a}$  ✓.

**Réponse.**  $z^2 - 2z + 5 = 0 \Rightarrow S = \{1 + 2i ; 1 - 2i\}$ .

$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow S = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$ , avec  $j^3 = 1$  et  $1 + j + j^2 = 0$ .

$4z^2 - 4z + 5 = 0 \Rightarrow S = \left\{ \frac{1}{2} + i ; \frac{1}{2} - i \right\}$ .

**Rappel de cours.** Coefficients RÉELS et  $\Delta < 0$  : les racines sont conjuguées, de somme  $-\frac{b}{a}$  et de produit  $\frac{c}{a}$ . Le nombre  $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$  vérifie  $j^3 = 1$  et  $1 + j + j^2 = 0$ .

**Erreur fréquente.** Diviser par 2 au lieu de  $2a$ . Dans la dernière équation,  $a = 4$  : le dénominateur est 8.

### Correction de l'exercice 3 - Somme et produit : reconstruire une équation

Premier cas : les deux nombres sont racines de  $z^2 - 6z + 34 = 0$ .

$\Delta = 36 - 136 = -100$ , donc  $\sqrt{-\Delta} = 10$  et  $z = \frac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i$ .

Contrôle :  $(3 + 5i) + (3 - 5i) = 6$  ✓ et  $(3 + 5i)(3 - 5i) = 9 + 25 = 34$  ✓.

Deuxième cas : l'équation est  $z^2 - 2iz - 1 = 0$ . Ses coefficients ne sont plus tous réels, mais la formule du discriminant reste valable.

$\Delta = (-2i)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = -4 + 4 = 0$ .

Le discriminant est nul : il y a une racine DOUBLE,  $z = \frac{2i}{2} = i$ .

Les deux nombres cherchés sont donc  $i$  et  $i$ . Contrôle :  $i + i = 2i$  ✓ et  $i \times i = -1$  ✓.

Troisième cas : l'équation est  $z^2 - (1 + i)z + i = 0$ .

$\Delta = (1 + i)^2 - 4i = 2i - 4i = -2i$ .

Il faut une racine carrée  $\delta$  de  $-2i$ . On cherche  $\delta = x + iy$  avec  $x^2 - y^2 = 0$ ,  $2xy = -2$  et  $x^2 + y^2 = |-2i| = 2$ .

D'où  $x^2 = 1$  et  $y^2 = 1$ , avec  $xy < 0$  :  $\delta = 1 - i$  convient (contrôle :  $(1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$  ✓).

Les solutions sont  $z = \frac{(1 + i) \pm (1 - i)}{2}$ , soit  $z = \frac{2}{2} = 1$  et  $z = \frac{2i}{2} = i$ .

Contrôle :  $1 + i$  est bien la somme ✓ et  $1 \times i = i$  est bien le produit ✓.

**Réponse.** Somme 6, produit 34 :  $3 + 5i$  et  $3 - 5i$  · somme  $2i$ , produit  $-1$  :  $i$  et  $i$  (racine double) · somme  $1 + i$ , produit  $i$  :  $1$  et  $i$ .

**Rappel de cours.** Deux nombres de somme  $S$  et de produit  $P$  sont les racines de  $z^2 - Sz + P = 0$ . Réciproquement, pour  $az^2 + bz + c = 0$  : somme  $= -\frac{b}{a}$ , produit  $= \frac{c}{a}$ .

**Erreur fréquente.** Écrire l'équation  $z^2 + Sz + P = 0$ . Le coefficient du terme en  $z$  est l'OPPOSÉ de la somme.

## Correction de l'exercice 4 - Racine évidente et factorisation d'un degré 3

$P(3) = 27 - 3 \times 9 + 4 \times 3 - 12 = 27 - 27 + 12 - 12 = 0$ . Donc 3 est bien une racine.

Comme 3 est racine,  $P(z)$  est divisible par  $z - 3$  : il existe un trinôme  $az^2 + bz + c$  tel que  $P(z) = (z - 3)(az^2 + bz + c)$ .

On développe le membre de droite :

$$(z - 3)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 3az^2 - 3bz - 3c.$$

On regroupe :  $az^3 + (b - 3a)z^2 + (c - 3b)z - 3c$ .

Identification avec  $z^3 - 3z^2 + 4z - 12$ , terme par terme. Degré 3 :  $a = 1$ .

Terme constant :  $-3c = -12$ , donc  $c = 4$ .

Degré 2 :  $b - 3a = -3$ , donc  $b - 3 = -3$  et  $b = 0$ .

Contrôle avec le terme de degré 1, non encore utilisé :  $c - 3b = 4 - 0 = 4$  ✓. La factorisation est cohérente :  $P(z) = (z - 3)(z^2 + 4)$ .

Résolution : un produit est nul si l'un des facteurs l'est. Soit  $z - 3 = 0$ , soit  $z^2 + 4 = 0$ .

Le premier facteur donne  $z = 3$ . Le second donne  $z^2 = -4$ , donc  $z = 2i$  ou  $z = -2i$  (exercice 1).

L'ensemble des solutions est  $S = \{3 ; 2i ; -2i\}$  : trois solutions pour un polynôme de degré 3, comme annoncé par le théorème fondamental de l'algèbre.

Contrôle par le produit des racines :  $3 \times 2i \times (-2i) = 3 \times 4 = 12$ . Pour un polynôme unitaire de degré 3, le produit des racines vaut  $-$  (terme constant), soit 12 ✓.

**Réponse.**  $P(3) = 0$  ·  $P(z) = (z - 3)(z^2 + 4)$  ·  $S = \{3 ; 2i ; -2i\}$ .

**Rappel de cours.**  $z_0$  est racine de  $P \Leftrightarrow P(z)$  est divisible par  $z - z_0$ . Une racine connue fait donc TOUJOURS descendre le degré d'une unité.

**Erreur fréquente.** Se lancer dans l'identification sans contrôler à la fin. Le coefficient non utilisé pour trouver  $a, b, c$  sert de vérification : s'il ne colle pas, il y a une erreur en amont.

## Correction de l'exercice 5 - Degré 3 à coefficients réels avec une racine complexe

Les coefficients de  $P$  sont réels. Pour un tel polynôme,  $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$  : la conjugaison traverse sommes, produits et puissances, et laisse les coefficients inchangés.

Donc  $P(\overline{1 - i}) = \overline{P(1 - i)} = \overline{0} = 0$ , c'est-à-dire  $P(1 + i) = 0$ .

Les racines non réelles d'un polynôme à coefficients réels vont toujours par paires conjuguées.

Pour la troisième racine, on utilise la relation somme : pour  $z^3 + bz^2 + cz + d$  unitaire, la somme des trois racines vaut  $-b$ , ici  $-1$ .

Notons  $z_3$  la racine manquante :  $(1 - i) + (1 + i) + z_3 = -1$ .

Les parties imaginaires se compensent :  $2 + z_3 = -1$ , donc  $z_3 = -3$ .

Contrôle direct :  $P(-3) = -27 + 9 + 12 + 6 = 0$  ✓.

Second contrôle, par le produit : pour un polynôme unitaire de degré 3, le produit des racines vaut  $-d = -6$ . Or  $(1 - i)(1 + i)(-3) = 2 \times (-3) = -6$  ✓.

Factorisation : le couple conjugué  $1 \pm i$  donne un trinôme réel,

$$(z - (1 - i))(z - (1 + i)) = (z - 1)^2 - i^2 = z^2 - 2z + 2.$$

Avec la racine réelle  $-3$ , on obtient  $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z + 3)$ .

Vérification par développement :

$$(z^2 - 2z + 2)(z + 3) = z^3 + 3z^2 - 2z^2 - 6z + 2z + 6 = z^3 + z^2 - 4z + 6 \quad \checkmark.$$

Bilan de méthode : la relation somme a évité toute division euclidienne. C'est presque toujours le chemin le plus court quand une seule racine manque.

**Réponse.**  $1 + i$  est racine car les coefficients sont réels · la troisième racine est  $-3$  ·  $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z + 3)$ , donc  $S = \{1 - i ; 1 + i ; -3\}$ .

**Rappel de cours.** Polynôme unitaire de degré 3,  $z^3 + bz^2 + cz + d$  : somme des racines  $= -b$ , produit  $= -d$ . Une racine manquante se déduit donc d'une simple soustraction.

**Erreur fréquente.** Appliquer le théorème des racines conjuguées à un polynôme dont un coefficient est complexe. Il devient alors faux — c'est exactement ce que montre l'exercice 19.

## Correction de l'exercice 6 - Degré 4 à coefficients réels

Les coefficients sont réels, donc  $\overline{2i} = -2i$  est aussi racine.

Le couple  $\{2i ; -2i\}$  fournit le facteur  $(z - 2i)(z + 2i) = z^2 - (2i)^2 = z^2 + 4$ , à coefficients réels.

$P$  est donc divisible par  $z^2 + 4$  : il existe un trinôme  $z^2 + bz + c$  (unitaire, car  $P$  l'est) tel que  $P(z) = (z^2 + 4)(z^2 + bz + c)$ .

$$\text{On développe : } (z^2 + 4)(z^2 + bz + c) = z^4 + bz^3 + cz^2 + 4z^2 + 4bz + 4c.$$

$$\text{En regroupant : } z^4 + bz^3 + (c + 4)z^2 + 4bz + 4c.$$

Identification. Degré 3 :  $b = -2$ . Terme constant :  $4c = 8$ , donc  $c = 2$ .

Contrôles sur les coefficients restants : degré 2 donne  $c + 4 = 6 \quad \checkmark$  ; degré 1 donne  $4b = -8 \quad \checkmark$ .

$$\text{Donc } P(z) = (z^2 + 4)(z^2 - 2z + 2).$$

Résolution :  $z^2 + 4 = 0$  donne  $z = \pm 2i$ .

$$\text{Et } z^2 - 2z + 2 = 0 \text{ a pour discriminant } \Delta = 4 - 8 = -4, \text{ donc } z = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

L'ensemble des solutions est  $S = \{2i ; -2i ; 1 + i ; 1 - i\}$  : quatre racines pour un degré 4, réparties en deux couples conjugués.

Contrôle global par le produit des racines :  $(2i)(-2i)(1 + i)(1 - i) = 4 \times 2 = 8$ , et pour un polynôme unitaire de degré 4 le produit des racines vaut le terme constant, soit 8  $\checkmark$ .

**Réponse.**  $-2i$  est racine ·  $P(z) = (z^2 + 4)(z^2 - 2z + 2)$  ·  $S = \{2i ; -2i ; 1 + i ; 1 - i\}$ .

**Rappel de cours.** Un polynôme à coefficients réels se factorise toujours en produit de facteurs réels de degré 1 ou 2 : chaque couple de racines conjuguées donne un trinôme réel.

**Erreur fréquente.** Associer  $2i$  avec  $1 + i$ . Seul le regroupement d'une racine avec SA conjuguée produit un facteur à coefficients réels.

## Correction de l'exercice 7 - Équation bicarrée

On pose  $Z = z^2$ . L'équation devient  $Z^2 + 3Z - 4 = 0$ , du second degré en  $Z$ .

$$\Delta = 9 + 16 = 25, \text{ donc } \sqrt{\Delta} = 5 \text{ et } Z = \frac{-3 \pm 5}{2}.$$

Cela donne  $Z = 1$  ou  $Z = -4$ .

On revient à  $z$ . Premier cas :  $z^2 = 1$ , donc  $z = 1$  ou  $z = -1$ .

Second cas :  $z^2 = -4$ , donc  $z = 2i$  ou  $z = -2i$ .

Chaque valeur de  $Z$  fournit DEUX valeurs de  $z$  : on obtient bien 4 solutions pour une équation de degré 4.

$S = \{1 ; -1 ; 2i ; -2i\}$ .

Contrôle sur  $z = 2i$  :  $(2i)^4 + 3(2i)^2 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$  ✓ (car  $(2i)^4 = 16i^4 = 16$  et  $(2i)^2 = -4$ ).

Factorisation : connaissant les quatre racines d'un polynôme unitaire, on écrit directement  $z^4 + 3z^2 - 4 = (z - 1)(z + 1)(z - 2i)(z + 2i)$ .

On peut aussi regrouper en facteurs réels :  $(z^2 - 1)(z^2 + 4)$ , ce qui se vérifie en développant :  $z^4 + 4z^2 - z^2 - 4 = z^4 + 3z^2 - 4$  ✓.

**Réponse.**  $Z^2 + 3Z - 4 = 0$  donne  $Z = 1$  ou  $Z = -4$  ·  $S = \{1 ; -1 ; 2i ; -2i\}$  ·  
 $z^4 + 3z^2 - 4 = (z - 1)(z + 1)(z - 2i)(z + 2i) = (z^2 - 1)(z^2 + 4)$ .

**Rappel de cours.** Équation bicarrée : on pose  $Z = z^2$ , on résout en  $Z$ , puis on revient à  $z$  — chaque solution  $Z$  donne deux solutions  $z$  opposées (une seule si  $Z = 0$ ).

**Erreur fréquente.** S'arrêter aux valeurs de  $Z$ .  $Z = 1$  n'est pas une solution de l'équation initiale : il reste à résoudre  $z^2 = 1$ .

## Correction de l'exercice 8 - Second degré à coefficients complexes

Première équation :  $\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(-1 + i)$ .

$(1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$ , et  $-4(-1 + i) = 4 - 4i$ .

Donc  $\Delta = (-3 + 4i) + (4 - 4i) = 1$ . Le discriminant est un réel positif : une racine carrée évidente est  $\delta = 1$ .

Les solutions sont  $z = \frac{(1 + 2i) \pm 1}{2}$ , soit  $z = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$  et  $z = \frac{2i}{2} = i$ .

Contrôle : somme  $(1 + i) + i = 1 + 2i$  ✓ ; produit  $(1 + i)i = i + i^2 = -1 + i$  ✓.

Remarque importante :  $1 + i$  et  $i$  ne sont PAS conjuguées. C'est normal, les coefficients ne sont pas tous réels.

Deuxième équation :  $\Delta = (3 + 4i)^2 - 4(-1 + 5i)$ .

$(3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i$ , et  $-4(-1 + 5i) = 4 - 20i$ .

Donc  $\Delta = (-7 + 24i) + (4 - 20i) = -3 + 4i$ .

Il faut une racine carrée de  $-3 + 4i$ . On pose  $\delta = x + iy$  :  $x^2 - y^2 = -3$ ,  $2xy = 4$  et  $x^2 + y^2 = |-3 + 4i| = 5$ .

En additionnant les deux équations en  $x^2$  et  $y^2$  :  $2x^2 = 2$ , donc  $x^2 = 1$  ; en soustrayant,  $2y^2 = 8$ , donc  $y^2 = 4$ .

Comme  $2xy = 4 > 0$ ,  $x$  et  $y$  sont de même signe :  $\delta = 1 + 2i$  convient. Contrôle :  $(1 + 2i)^2 = -3 + 4i$  ✓.

Les solutions sont  $z = \frac{(3 + 4i) \pm (1 + 2i)}{2}$ , soit  $z = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$  et  $z = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$ .

Contrôle : somme  $(2 + 3i) + (1 + i) = 3 + 4i$  ✓ ; produit  $(2 + 3i)(1 + i) = 2 + 2i + 3i - 3 = -1 + 5i$  ✓.

**Réponse.**  $z^2 - (1 + 2i)z + (-1 + i) = 0 \Rightarrow S = \{1 + i ; i\}$  ·

$$z^2 - (3 + 4i)z + (-1 + 5i) = 0 \Rightarrow S = \{2 + 3i ; 1 + i\}.$$

**Rappel de cours.**  $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$ , où  $\delta$  est UNE racine carrée de  $\Delta$ , obtenue par le système  $x^2 - y^2 = \operatorname{Re}\Delta$ ,  $2xy = \operatorname{Im}\Delta$ ,  $x^2 + y^2 = |\Delta|$ .

**Erreur fréquente.** Annoncer des racines conjuguées. Cette propriété exige des coefficients RÉELS : ici, les deux solutions n'ont aucune raison de l'être.

## Correction de l'exercice 9 - Factoriser par groupement

Pour la première, on regroupe les deux premiers termes et les deux derniers :

$$z^3 + z^2 + z + 1 = z^2(z + 1) + 1(z + 1).$$

Le facteur  $z + 1$  est commun :  $z^3 + z^2 + z + 1 = (z + 1)(z^2 + 1)$ .

L'équation devient  $(z + 1)(z^2 + 1) = 0$ , donc  $z = -1$ , ou  $z^2 = -1$  c'est-à-dire  $z = i$  ou  $z = -i$ .

$S = \{-1 ; i ; -i\}$ . Contrôle sur  $z = i : i^3 + i^2 + i + 1 = -i - 1 + i + 1 = 0$  ✓.

Remarque : ces trois nombres sont les racines quatrièmes de l'unité privées de 1 — logique, puisque  $z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{z^4 - 1}{z - 1}$  pour  $z \neq 1$ .

Deuxième équation :  $z^4 - 1 = (z^2)^2 - 1^2 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$  par différence de carrés.

On factorise encore :  $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$  et  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ .

D'où  $z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$  et  $S = \{1 ; -1 ; i ; -i\}$  : les quatre racines quatrièmes de l'unité.

Troisième équation : elle est déjà factorisée. Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

$$z^2 + 1 = 0 \text{ donne } z = \pm i.$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \text{ a pour discriminant } \Delta = 4 - 8 = -4, \text{ donc } z = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

$$S = \{i ; -i ; 1 + i ; 1 - i\}.$$

**Réponse.**  $z^3 + z^2 + z + 1 = (z + 1)(z^2 + 1)$ ,  $S = \{-1 ; i ; -i\}$ .

$$z^4 - 1 = 0 \Rightarrow S = \{1 ; -1 ; i ; -i\} \cdot (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Rightarrow S = \{i ; -i ; 1 + i ; 1 - i\}.$$

**Rappel de cours.** Réflexes de factorisation : mise en facteur par groupement, différence de carrés  $a^2 - b^2$ , et dans  $\mathbb{C}$  la SOMME de carrés se factorise aussi :  $z^2 + a^2 = (z - ia)(z + ia)$ .

**Erreur fréquente.** Croire que  $z^2 + 1$  est irréductible. Ce n'est vrai que dans  $\mathbb{R}$  : dans  $\mathbb{C}$ , tout polynôme de degré  $\geq 1$  se factorise en facteurs du premier degré.

## Correction de l'exercice 10 - Théorème fondamental de l'algèbre et multiplicité

$$P(i) = i^3 - i \times i^2 + i - i = -i - i \times (-1) + 0 = -i + i = 0. \text{ Donc } i \text{ est racine.}$$

$$\text{Pour factoriser, on regroupe : } z^3 - iz^2 + z - i = z^2(z - i) + 1(z - i) = (z - i)(z^2 + 1).$$

$$\text{Il reste à factoriser } z^2 + 1, \text{ qui est une somme de carrés : } z^2 + 1 = z^2 - i^2 = (z - i)(z + i).$$

$$\text{En reportant : } P(z) = (z - i)(z - i)(z + i) = (z - i)^2(z + i).$$

$$\text{Contrôle par développement : } (z - i)^2 = z^2 - 2iz + i^2 = z^2 - 2iz - 1.$$

Puis

$$(z^2 - 2iz - 1)(z + i) = z^3 + iz^2 - 2iz^2 - 2i^2z - z - i = z^3 - iz^2 + 2z - z - i = z^3 - iz^2 + z - i \checkmark.$$

Lecture des racines :  $i$  apparaît avec l'exposant 2, c'est une racine DOUBLE (de multiplicité 2) ;  $-i$  apparaît avec l'exposant 1, c'est une racine simple.

Compte :  $2 + 1 = 3$ , qui est bien le degré de  $P$ . Le théorème est vérifié.

Attention à la formulation : l'équation  $P(z) = 0$  n'a que DEUX solutions distinctes,  $i$  et  $-i$ . C'est en comptant les multiplicités que l'on retrouve 3.

Conséquence générale à retenir : dans  $\mathbb{C}$ , tout polynôme de degré  $n$  s'écrit  $a(z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_k)^{m_k}$  avec  $m_1 + \dots + m_k = n$ . Il n'existe aucun polynôme irréductible de degré  $\geq 2$ .

C'est ce qui distingue radicalement  $\mathbb{C}$  de  $\mathbb{R}$ , où  $z^2 + 1$  reste irréductible.

**Réponse.**  $P(i) = 0$  ·  $P(z) = (z - i)(z^2 + 1) = (z - i)^2(z + i)$  · racines :  $i$  (double) et  $-i$  (simple), soit 3 racines comptées avec multiplicité, pour un degré 3.

**Rappel de cours.** Théorème fondamental de l'algèbre : un polynôme de degré  $n$  à coefficients complexes a exactement  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$ , comptées avec leur multiplicité.  $z_0$  est racine de multiplicité  $m$  si  $(z - z_0)^m$  divise  $P$  mais pas  $(z - z_0)^{m+1}$ .

**Erreur fréquente.** Confondre « nombre de racines » et « nombre de solutions distinctes ». Ici il y a 3 racines mais seulement 2 valeurs différentes.

## Correction de l'exercice 11 - Factorisation de $z^n - 1$

Première façon : on développe  $(z - 1)(z^2 + z + 1) = z^3 + z^2 + z - z^2 - z - 1 = z^3 - 1$ . Donc  $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ .

Seconde façon : les racines cubiques de l'unité sont  $1, j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$  et  $\bar{j} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$  (exercice 2).

Le polynôme  $z^3 - 1$  est unitaire de degré 3, donc  $z^3 - 1 = (z - 1)(z - j)(z - \bar{j})$ .

Les deux factorisations concordent : le trinôme  $z^2 + z + 1$  est justement celui dont  $j$  et  $\bar{j}$  sont les racines  $\checkmark$ .

Pour  $z^4 - 1$ , les racines quatrièmes de l'unité sont  $1, i, -1, -i$ , d'où  $z^4 - 1 = (z - 1)(z - i)(z + 1)(z + i)$ .

Contrôle par regroupement :  $(z - 1)(z + 1) = z^2 - 1$  et  $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$ , dont le produit vaut  $z^4 - 1$   $\checkmark$ .

Pour le cas général, on développe le produit  $(z - 1)(1 + z + \dots + z^{n-1})$ .

En distribuant :  $(z + z^2 + \dots + z^n) - (1 + z + \dots + z^{n-1})$ .

Presque tout se télescope : les termes  $z, z^2, \dots, z^{n-1}$  apparaissent une fois avec le signe + et une fois avec le signe -.

Il ne reste que  $z^n - 1$ . L'identité est démontrée.

Cette identité est la version polynomiale de la somme géométrique : pour  $z \neq 1$ ,  $1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$ .

Application :  $1 + z + z^2 + z^3 = 0$ . D'après l'identité avec  $n = 4$ , cela équivaut à  $z^4 - 1 = 0$  ET  $z \neq 1$ .

Les racines quatrièmes de l'unité sont  $1, i, -1, -i$  ; on retire 1.

$S = \{-1 ; i ; -i\}$ . Contrôle sur  $z = -1$  :  $1 - 1 + 1 - 1 = 0$   $\checkmark$ .

**Réponse.**  $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = (z - 1)(z - j)(z - \bar{j})$ .

$$z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i) \cdot z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + \dots + z^{n-1})$$

$$1 + z + z^2 + z^3 = 0 \Rightarrow S = \{-1 ; i ; -i\}.$$

**Rappel de cours.**  $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{2ik\pi/n}) = (z - 1)(1 + z + \dots + z^{n-1})$ . Les solutions de  $1 + z + \dots + z^{n-1} = 0$  sont donc les racines  $n$ -ièmes de l'unité PRIVÉES de 1.

**Erreur fréquente.** Oublier d'exclure  $z = 1$ . C'est une racine de  $z^n - 1$ , mais pas de  $1 + z + \dots + z^{n-1}$ , qui y vaut  $n$ .

## Correction de l'exercice 12 - Relations entre coefficients et racines

Le polynôme est unitaire :  $z^3 + bz^2 + cz + d$  avec  $b = 2$ ,  $c = -5$ ,  $d = 1$ .

On développe la forme factorisée pour établir les relations :

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3.$$

Par identification :  $z_1 + z_2 + z_3 = -b = -2$ .

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = c = -5.$$

$$z_1z_2z_3 = -d = -1.$$

Pour la somme des inverses, on réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2}{z_1z_2z_3}.$$

Le numérateur est la deuxième relation et le dénominateur la troisième :  $\frac{-5}{-1} = 5$ .

(Le calcul est légitime : aucune racine n'est nulle, sinon le terme constant  $d = 1$  serait nul.)

Pour la somme des carrés, on part de l'identité

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3).$$

$$\text{On isole : } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3).$$

$$\text{Application numérique : } (-2)^2 - 2 \times (-5) = 4 + 10 = 14.$$

Contrôle numérique approché : les racines de cette équation valent environ 1,77, 0,21 et  $-3,98$ . Leur somme vaut bien  $\approx -2$  ✓, et la somme de leurs carrés  $\approx 3,13 + 0,04 + 15,84 \approx 14$  ✓.

Intérêt de la méthode : ces expressions SYMÉTRIQUES (inchangées quand on permute les racines) s'expriment toujours à partir des coefficients, sans jamais résoudre l'équation.

$$\textbf{Réponse.} \quad z_1 + z_2 + z_3 = -2 \cdot z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = -5 \cdot z_1z_2z_3 = -1 \cdot \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 5 \cdot z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 14.$$

**Rappel de cours.** Pour  $z^3 + bz^2 + cz + d$  : somme =  $-b$ , somme des produits deux à deux =  $c$ , produit =  $-d$ . Deux conséquences utiles :  $\sum \frac{1}{z_i} = \frac{c}{-d}$  et  $\sum z_i^2 = b^2 - 2c$ .

**Erreur fréquente.** Écrire  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2$ . Il faut retrancher le double des produits deux à deux.

## Correction de l'exercice 13 - Un polynôme de degré 5 à coefficients réels

$P$  est de degré 5, donc il a exactement 5 racines dans  $\mathbb{C}$ , comptées avec multiplicité.

Ses coefficients étant réels, ses racines non réelles vont par paires conjuguées : leur nombre est donc PAIR.

Si toutes les racines étaient non réelles, leur nombre 5 serait pair — contradiction.  $P$

admet donc au moins une racine réelle.

C'est un résultat général : tout polynôme à coefficients réels de degré IMPAIR admet au moins une racine réelle.

Passons à la factorisation. On regroupe les termes par paquets faisant apparaître  $z - 1$  :  
 $P(z) = z^4(z - 1) + 2z^2(z - 1) + 1(z - 1)$ .

Contrôle du regroupement :  $z^4(z - 1) = z^5 - z^4$  ✓,  $2z^2(z - 1) = 2z^3 - 2z^2$  ✓,  $1(z - 1) = z - 1$  ✓. La somme redonne bien  $P(z)$ .

On met  $z - 1$  en facteur :  $P(z) = (z - 1)(z^4 + 2z^2 + 1)$ .

Le second facteur est une identité remarquable :  $z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2$ .

Donc  $P(z) = (z - 1)(z^2 + 1)^2$ .

On termine dans  $\mathbb{C}$  :  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ , d'où  $P(z) = (z - 1)(z - i)^2(z + i)^2$ .

Racines : 1 est racine simple,  $i$  est racine double,  $-i$  est racine double.

Compte :  $1 + 2 + 2 = 5$  ✓, ce qui est bien le degré.

La racine réelle annoncée à la question 1 est 1, et les racines non réelles vont bien par paires conjuguées, chacune avec la même multiplicité — c'est toujours le cas pour un polynôme réel.

**Réponse.** Degré impair et coefficients réels = au moins une racine réelle ·

$P(z) = (z - 1)(z^2 + 1)^2 = (z - 1)(z - i)^2(z + i)^2$  · racines : 1 (simple),  $i$  (double),  $-i$  (double).

**Rappel de cours.** Polynôme à coefficients réels : les racines non réelles vont par paires conjuguées, AVEC la même multiplicité. Un degré impair impose donc au moins une racine réelle.

**Erreur fréquente.** Oublier la multiplicité en concluant « trois racines ». Il y en a cinq comptées avec multiplicité, pour trois valeurs distinctes.

### Correction de l'exercice 14 - Équation réciproque : le changement de variable $u = z + 1/z$

Si  $z = 0$ , le membre de gauche vaut  $2 \neq 0$ . Donc 0 n'est pas solution, et l'on peut diviser par  $z^2$  sans rien perdre.

L'équation équivaut à  $2z^2 - 5z + 6 - \frac{5}{z} + \frac{2}{z^2} = 0$ .

On regroupe les termes symétriques :  $2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0$ .

Posons  $u = z + \frac{1}{z}$ . Alors  $u^2 = z^2 + 2 \times z \times \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$ .

Donc  $z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2$ , et l'équation devient  $2(u^2 - 2) - 5u + 6 = 0$ .

Soit  $2u^2 - 4 - 5u + 6 = 0$ , c'est-à-dire  $2u^2 - 5u + 2 = 0$ .

Résolution en  $u$  :  $\Delta = 25 - 16 = 9$ , donc  $u = \frac{5 \pm 3}{4}$ , soit  $u = 2$  ou  $u = \frac{1}{2}$ .

Premier cas :  $z + \frac{1}{z} = 2$ . En multipliant par  $z$  :  $z^2 - 2z + 1 = 0$ , soit  $(z - 1)^2 = 0$ .

On obtient  $z = 1$ , racine DOUBLE.

Second cas :  $z + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ , soit  $z^2 - \frac{1}{2}z + 1 = 0$ , ou encore  $2z^2 - z + 2 = 0$ .

$$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0, \text{ donc } z = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}.$$

L'ensemble des solutions est  $S = \left\{ 1 ; \frac{1+i\sqrt{15}}{4} ; \frac{1-i\sqrt{15}}{4} \right\}$ , la racine 1 étant double : cela fait bien 4 racines comptées avec multiplicité.

Contrôle par le produit des racines, qui doit valoir  $\frac{2}{2} = 1$  :

$$1 \times 1 \times \frac{(1+i\sqrt{15})(1-i\sqrt{15})}{16} = \frac{1+15}{16} = 1 \checkmark.$$

Contrôle par la somme, qui doit valoir  $\frac{5}{2}$  :  $1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \checkmark$ .

**Réponse.**  $2u^2 - 5u + 2 = 0$  donne  $u = 2$  ou  $u = \frac{1}{2}$ .  $S = \left\{ 1 \text{ (double)} ; \frac{1+i\sqrt{15}}{4} ; \frac{1-i\sqrt{15}}{4} \right\}$ .

**Rappel de cours.** Équation réciproque de degré 4 : diviser par  $z^2$ , poser  $u = z + \frac{1}{z}$  et utiliser  $z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2$ . On passe d'un degré 4 à un degré 2.

**Erreur fréquente.** Diviser par  $z^2$  sans avoir vérifié que 0 n'est pas racine. C'est cette vérification qui rend la transformation réversible.

### Correction de l'exercice 15 - Une équation avec paramètre

Le discriminant vaut  $\Delta = (-2)^2 - 4m = 4 - 4m = 4(1 - m)$ .

Si  $m < 1$  :  $\Delta > 0$ , l'équation a deux solutions RÉELLES distinctes,  $z = 1 \pm \sqrt{1 - m}$ .

Si  $m = 1$  :  $\Delta = 0$ , l'équation a une solution réelle double,  $z = 1$ .

Si  $m > 1$  :  $\Delta < 0$ . On écrit  $\Delta = -4(m - 1)$  avec  $m - 1 > 0$ , donc  $\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{m - 1}$ .

Les solutions sont alors  $z = \frac{2 \pm 2i\sqrt{m - 1}}{2} = 1 \pm i\sqrt{m - 1}$  : deux complexes conjugués non réels.

Pour la deuxième question, on se place dans le cas  $m > 1$ . Le module commun des deux solutions vaut  $|1 + i\sqrt{m - 1}| = \sqrt{1 + (m - 1)} = \sqrt{m}$ .

Méthode alternative, plus rapide : les deux racines sont conjuguées, donc leur produit vaut  $|z|^2$ . Or ce produit vaut  $\frac{c}{a} = m$ . Donc  $|z|^2 = m$  et  $|z| = \sqrt{m}$ .

La condition  $|z| = 2$  s'écrit  $\sqrt{m} = 2$ , soit  $m = 4$  — valeur bien supérieure à 1, donc compatible avec le cas étudié.

Contrôle : pour  $m = 4$ , les solutions sont  $1 \pm i\sqrt{3}$ , de module  $\sqrt{1 + 3} = 2 \checkmark$ .

Troisième question : pour  $m > 1$ , les solutions s'écrivent  $1 \pm i\sqrt{m - 1}$ . Leur partie réelle vaut toujours 1.

Quand  $m$  parcourt  $]1 ; +\infty[$ , la quantité  $\sqrt{m - 1}$  parcourt  $]0 ; +\infty[$  tout entier (la fonction est continue et strictement croissante, de limite 0 en 1 et  $+\infty$  en  $+\infty$ ).

Les points images décrivent donc la droite verticale d'équation  $x = 1$ , PRIVÉE du point  $(1 ; 0)$  : la moitié au-dessus pour la solution de partie imaginaire positive, la moitié en dessous pour sa conjuguée.

Le point  $(1 ; 0)$  est exclu de cette description, mais il correspond au cas  $m = 1$  traité à part : la réunion de tous les cas  $m \geq 1$  donne la droite entière.

**Réponse.**  $m < 1$  : deux solutions réelles  $1 \pm \sqrt{1 - m}$  ·  $m = 1$  : racine double 1 ·  $m > 1$  : deux solutions conjuguées  $1 \pm i\sqrt{m - 1}$  · module 2 pour  $m = 4$  · les images décrivent la droite d'équation  $x = 1$  privée de  $(1 ; 0)$ .

**Rappel de cours.** Deux racines CONJUGUÉES ont pour produit  $z\bar{z} = |z|^2$ . Comme le

produit vaut aussi  $\frac{c}{a}$ , on obtient le module sans calculer les racines.

**Erreur fréquente.** Utiliser  $\sqrt{\Delta}$  quand  $\Delta < 0$ . On écrit  $\Delta = -4(m-1)$ , donc  $\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{m-1}$ , et le  $i$  apparaît devant.

### Correction de l'exercice 16 - Racines et géométrie : $z^3 = -27$

$z^3 + 27 = z^3 + 3^3$  : c'est une somme de cubes. On remarque que  $-3$  est racine évidente, puisque  $(-3)^3 + 27 = 0$ .

On factorise donc par  $z + 3$  :  $z^3 + 27 = (z + 3)(z^2 + bz + c)$ .

Développement :  $(z + 3)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b + 3)z^2 + (c + 3b)z + 3c$ .

Identification avec  $z^3 + 0z^2 + 0z + 27$  :  $b + 3 = 0$  donne  $b = -3$  ;  $3c = 27$  donne  $c = 9$  ; contrôle sur le terme en  $z$  :  $c + 3b = 9 - 9 = 0$  ✓.

Donc  $z^3 + 27 = (z + 3)(z^2 - 3z + 9)$ .

Le trinôme a pour discriminant  $\Delta = 9 - 36 = -27$ , donc  $\sqrt{-\Delta} = 3\sqrt{3}$  et  $z = \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$ .

Les trois solutions sont  $-3$ ,  $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$  et  $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ .

Seconde méthode :  $-27 = 27e^{i\pi}$ . On cherche  $z = re^{i\theta}$  avec  $r^3 = 27$  et  $3\theta = \pi + 2k\pi$ .

D'où  $r = 3$  et  $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ , pour  $k = 0, 1, 2$  : les angles  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\pi$  et  $\frac{5\pi}{3}$ .

Cela donne  $3e^{i\pi/3} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ , puis  $3e^{i\pi} = -3$ , puis  $3e^{5i\pi/3} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ .

Les deux méthodes donnent les mêmes solutions ✓. La factorisation reste algébrique ; l'exponentielle donne en prime la position géométrique.

Géométrie : les trois solutions ont toutes pour module 3 — vérification pour la première :  $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{9} = 3$  ✓ — donc les trois points sont sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 3.

Leurs arguments sont espacés de  $\frac{2\pi}{3}$  : les points sont régulièrement répartis sur ce cercle.

Le triangle est donc ÉQUILATÉRAL. Contrôle par les longueurs :

$$\left| \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - (-3) \right| = \left| \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{81 + 27}{4}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Et la distance entre les deux solutions conjuguées vaut  $|3i\sqrt{3}| = 3\sqrt{3}$  ✓ : les trois côtés sont bien égaux.

**Réponse.**  $z^3 + 27 = (z + 3)(z^2 - 3z + 9)$  ·  $S = \left\langle -3 ; \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i ; \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right\rangle$ , soit  $3e^{i\pi}$ ,  $3e^{i\pi/3}$ ,  $3e^{-i\pi/3}$  · triangle équilatéral de côté  $3\sqrt{3}$  inscrit dans le cercle de centre  $O$  et de rayon 3.

**Rappel de cours.** Les  $n$  solutions de  $z^n = a$  sont sur un même cercle de rayon  $|a|^{1/n}$ , avec des arguments espacés de  $\frac{2\pi}{n}$  : elles forment toujours un polygone régulier de centre  $O$ .

**Erreur fréquente.** Écrire  $z^3 = -27 \Rightarrow z = -3$  et s'arrêter là. Une équation de degré 3 a trois solutions :  $-3$  n'est que la seule réelle.

### Correction de l'exercice 17 - Bicarrée à discriminant complexe

On pose  $Z = z^2$  : l'équation devient  $Z^2 - 2Z + 4 = 0$ .

$\Delta = 4 - 16 = -12$ , donc  $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$  et  $Z = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$ .

Forme exponentielle de  $Z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  : son module vaut  $\sqrt{1+3} = 2$ , et  $Z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ , donc son argument est  $\frac{\pi}{3}$ .

Ainsi  $Z_1 = 2e^{i\pi/3}$ , et par conjugaison  $Z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$ .

On résout maintenant  $z^2 = 2e^{i\pi/3}$ . En posant  $z = re^{i\theta}$  :  $r^2 = 2$  et  $2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .

D'où  $r = \sqrt{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$  : deux solutions opposées,  $z = \sqrt{2} e^{i\pi/6}$  et  $z = -\sqrt{2} e^{i\pi/6}$ .

Forme algébrique :  $\sqrt{2} e^{i\pi/6} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ .

De même,  $z^2 = 2e^{-i\pi/3}$  donne  $z = \pm\sqrt{2} e^{-i\pi/6} = \pm\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ .

Les quatre solutions sont donc  $\pm\frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$  et  $\pm\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ .

Contrôle :  $\left(\frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6 + 2i\sqrt{12} - 2}{4} = \frac{4 + 4i\sqrt{3}}{4} = 1 + i\sqrt{3} \checkmark$  — on retrouve bien  $Z_1$ .

Puis  $Z_1^2 - 2Z_1 + 4 = (1 + i\sqrt{3})^2 - 2(1 + i\sqrt{3}) + 4 = (-2 + 2i\sqrt{3}) - 2 - 2i\sqrt{3} + 4 = 0 \checkmark$ .

Remarque géométrique : les quatre solutions ont toutes pour module  $\sqrt{2}$  et pour arguments  $\pm\frac{\pi}{6}$  et  $\pi \pm \frac{\pi}{6}$ . Elles forment un rectangle inscrit dans le cercle de rayon  $\sqrt{2}$ , symétrique par rapport aux deux axes — et non un carré, car les racines ne sont pas des racines quatrièmes d'un même nombre.

**Réponse.**  $Z = 1 \pm i\sqrt{3}$ , soit  $2e^{\pm i\pi/3}$ .  $S = \left\{ \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \right\}$ .

**Rappel de cours.** Pour extraire une racine carrée d'un complexe, deux voies : le système algébrique (chapitre 1) ou la forme exponentielle —  $z^2 = \rho e^{i\alpha}$  donne  $z = \pm\sqrt{\rho} e^{i\alpha/2}$ . La seconde est plus rapide dès que l'argument est remarquable.

**Erreur fréquente.** Oublier la seconde valeur de  $k$  en résolvant  $z^2 = Z$ . Chaque  $Z$  fournit DEUX valeurs opposées de  $z$  : au total quatre solutions, comme l'exige le degré 4.

### Correction de l'exercice 18 - $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ et la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$

D'après l'exercice 11,  $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ .

Donc  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  équivaut à  $z^5 = 1$  ET  $z \neq 1$ .

Les solutions sont donc les quatre nombres  $e^{2ik\pi/5}$  pour  $k = 1, 2, 3, 4$ , c'est-à-dire les racines cinquièmes de l'unité privées de 1.

Ces quatre nombres sont deux à deux conjugués :  $e^{2i\pi/5}$  avec  $e^{-2i\pi/5} = e^{8i\pi/5}$ , et  $e^{4i\pi/5}$  avec  $e^{-4i\pi/5} = e^{6i\pi/5}$ .

Passons au changement de variable. 0 n'est pas solution (le membre de gauche y vaut 1), donc on peut diviser par  $z^2$  :  $z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$ .

On regroupe les termes symétriques :  $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$ .

Avec  $u = z + \frac{1}{z}$ , on a  $u^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$ , donc  $z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2$ .

L'équation devient  $u^2 - 2 + u + 1 = 0$ , c'est-à-dire  $u^2 + u - 1 = 0$ .

Résolution :  $\Delta = 1 + 4 = 5$ , donc  $u = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Interprétons  $u$ . Si  $z = e^{i\theta}$  est de module 1, alors  $\frac{1}{z} = \bar{z} = e^{-i\theta}$ , donc  $u = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ .

Les quatre solutions étant de module 1, les valeurs possibles de  $u$  sont  $2 \cos \frac{2\pi}{5}$  (pour le couple conjugué  $k = 1, 4$ ) et  $2 \cos \frac{4\pi}{5}$  (pour le couple  $k = 2, 3$ ).

Reste à savoir laquelle vaut laquelle. Comme  $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$  est un angle aigu,  $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$  : c'est la racine POSITIVE qui lui correspond.

Donc  $2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ , d'où  $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ .

Et l'autre racine, négative, correspond à  $\frac{4\pi}{5} = 144^\circ$ , angle obtus :  $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ .

Contrôle numérique :  $\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \approx \frac{2,236 - 1}{4} \approx 0,309$ , et  $\cos 72^\circ \approx 0,309$  ✓. De même  $\frac{-1 - 2,236}{4} \approx -0,809$  et  $\cos 144^\circ \approx -0,809$  ✓.

Cette valeur est celle qui gouverne la construction du pentagone régulier à la règle et au compas : le nombre  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , le nombre d'or, y apparaît naturellement.

**Réponse.** Les solutions sont les  $e^{2ik\pi/5}$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  ·  $u^2 + u - 1 = 0$  donne  $u = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .  
 $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$  et  $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ .

**Rappel de cours.** Si  $|z| = 1$  alors  $\frac{1}{z} = \bar{z}$ , donc  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$  : le changement de variable réciproque transforme une équation complexe en une équation RÉELLE sur un cosinus.

**Erreur fréquente.** Attribuer les racines au hasard. C'est le SIGNE du cosinus qui décide :  $\frac{2\pi}{5}$  est aigu (cosinus positif),  $\frac{4\pi}{5}$  est obtus (cosinus négatif).

## Correction de l'exercice 19 - Une racine réelle cachée dans un polynôme complexe

Soit  $x$  un réel. On sépare les parties réelle et imaginaire de  $P(x)$ , en regroupant les termes selon qu'ils contiennent  $i$  ou non.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3ix^2 - x + 5ix + 2 - 2i.$$

Partie réelle :  $x^3 - 2x^2 - x + 2$ . Partie imaginaire :  $-3x^2 + 5x - 2$ .

(C'est licite précisément parce que  $x$  est RÉEL : sinon  $x^3$  ou  $x^2$  auraient eux-mêmes une partie imaginaire.)

Un nombre complexe est nul si et seulement si ses deux parties le sont. Donc  $P(x) = 0$  équivaut au système  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$  et  $-3x^2 + 5x - 2 = 0$ .

La seconde équation, du second degré, est la plus simple :  $3x^2 - 5x + 2 = 0$ , de discriminant  $\Delta = 25 - 24 = 1$ .

D'où  $x = \frac{5 \pm 1}{6}$ , soit  $x = 1$  ou  $x = \frac{2}{3}$ .

On teste ces deux candidats dans la première équation. Pour  $x = 1$  :  $1 - 2 - 1 + 2 = 0$  ✓.

Pour  $x = \frac{2}{3}$  :  $\frac{8}{27} - \frac{8}{9} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{8 - 24 - 18 + 54}{27} = \frac{20}{27} \neq 0$  ✗.

Seul  $x = 1$  vérifie les DEUX équations : c'est l'unique racine réelle de  $P$ .

(Au passage, la première équation se factorise en  $(x - 2)(x - 1)(x + 1) = 0$ , de racines 2, 1

et  $-1$  : l'intersection des deux ensembles de solutions se réduit bien à  $\{1\}$ .)

Factorisation :  $P(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$ . En développant :  $z^3 + (a - 1)z^2 + (b - a)z - b$ .

Identification. Terme constant :  $-b = 2 - 2i$ , donc  $b = -2 + 2i$ . Degré 2 :  $a - 1 = -(2 + 3i)$ , donc  $a = -1 - 3i$ .

Contrôle sur le terme de degré 1 :  $b - a = (-2 + 2i) - (-1 - 3i) = -1 + 5i$  ✓, ce qui est bien le coefficient attendu.

Donc  $P(z) = (z - 1)(z^2 - (1 + 3i)z + (-2 + 2i))$ .

Reste à résoudre  $z^2 - (1 + 3i)z + (-2 + 2i) = 0$ .

$$\Delta = (1 + 3i)^2 - 4(-2 + 2i) = (1 + 6i - 9) + 8 - 8i = -2i.$$

Une racine carrée de  $-2i$  est  $\delta = 1 - i$  (déjà rencontrée à l'exercice 3 :  $(1 - i)^2 = -2i$ ).

Les racines sont  $z = \frac{(1 + 3i) \pm (1 - i)}{2}$ , soit  $z = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$  et  $z = \frac{4i}{2} = 2i$ .

$S = \{1 ; 1 + i ; 2i\}$ . Contrôle par la somme, qui doit valoir  $2 + 3i$  :  $1 + (1 + i) + 2i = 2 + 3i$  ✓.

Contrôle par le produit, qui doit valoir  $-(2 - 2i) = -2 + 2i$  :

$$1 \times (1 + i) \times 2i = 2i + 2i^2 = -2 + 2i \text{ ✓.}$$

Observation finale : les trois racines  $1$ ,  $1 + i$  et  $2i$  ne sont PAS deux à deux conjuguées — ce qui confirme que le théorème des racines conjuguées exige bien des coefficients réels.

**Réponse.** Séparation des parties réelle et imaginaire :  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$  et  $3x^2 - 5x + 2 = 0$  · unique racine réelle :  $x = 1$  ·  $P(z) = (z - 1)(z^2 - (1 + 3i)z + (-2 + 2i))$  ·  $S = \{1 ; 1 + i ; 2i\}$ .

**Rappel de cours.** Pour chercher une racine RÉELLE d'un polynôme à coefficients complexes : poser  $z = x$  réel, séparer partie réelle et partie imaginaire, et résoudre le SYSTÈME. Les solutions communes aux deux équations sont les seules racines réelles.

**Erreur fréquente.** Se contenter des solutions de l'une des deux équations.  $\frac{2}{3}$  annule la partie imaginaire mais pas la partie réelle : ce n'est pas une racine.

## Correction de l'exercice 20 - Problème de synthèse : racines d'un polynôme et triangle

$$P(-1) = -1 - 3 \times 1 + 3 \times (-1) + 7 = -1 - 3 - 3 + 7 = 0 : -1 \text{ est bien racine.}$$

On factorise par  $z + 1$  :  $P(z) = (z + 1)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b + 1)z^2 + (c + b)z + c$ .

Identification : terme constant  $c = 7$  ; degré 2 :  $b + 1 = -3$ , donc  $b = -4$  ; contrôle sur le degré 1 :  $c + b = 7 - 4 = 3$  ✓.

Donc  $P(z) = (z + 1)(z^2 - 4z + 7)$ .

Résolution du trinôme :  $\Delta = 16 - 28 = -12$ , donc  $\sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{3}$  et  $z = \frac{4 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 2 \pm i\sqrt{3}$ .

$S = \{-1 ; 2 + i\sqrt{3} ; 2 - i\sqrt{3}\}$ . On pose  $A(-1)$ ,  $B(2 + i\sqrt{3})$  et  $C(2 - i\sqrt{3})$ .

Longueurs.  $AB = |(2 + i\sqrt{3}) - (-1)| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

$AC = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$  : c'est le conjugué du précédent, donc le même module.

$BC = |(2 + i\sqrt{3}) - (2 - i\sqrt{3})| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ .

Les trois côtés valent  $2\sqrt{3}$  : le triangle  $ABC$  est ÉQUILATÉRAL.

Pour un triangle équilatéral, le centre du cercle circonscrit est confondu avec le centre

de gravité, d'affixe  $\frac{a+b+c}{3}$ .

Or la somme des racines vaut  $-\frac{b}{a} = 3$  (relation coefficients-racines), donc le centre  $\Omega$  a pour affixe  $\frac{3}{3} = 1$ .

Rayon :  $\Omega A = |-1 - 1| = 2$ . Contrôle :  $\Omega B = |2 + i\sqrt{3} - 1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$  ✓, et  $\Omega C = 2$  par conjugaison ✓.

Le cercle circonscrit a donc pour centre  $\Omega(1)$  et pour rayon 2.

Rotation : l'image de  $B$  par la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  a pour affixe  $z' = e^{2i\pi/3}(b-1) + 1$ .

Or  $b-1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\pi/3}$ .

Donc  $z' = e^{2i\pi/3} \times 2e^{i\pi/3} + 1 = 2e^{i\pi} + 1 = -2 + 1 = -1$ , qui est bien l'affixe de  $A$  ✓.

C'est une confirmation du caractère équilatéral : une rotation d'un tiers de tour autour du centre permute les trois sommets.

Aire : pour un triangle équilatéral de côté  $a$ , l'aire vaut  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Ici  $a = 2\sqrt{3}$ , donc  $a^2 = 12$  et l'aire vaut  $\frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$ .

Contrôle par une autre voie : la base  $BC = 2\sqrt{3}$  est verticale, et la hauteur issue de  $A$  est la distance horizontale entre  $x = -1$  et  $x = 2$ , soit 3. L'aire vaut  $\frac{2\sqrt{3} \times 3}{2} = 3\sqrt{3}$  ✓.

**Réponse.**  $P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$  ·  $S = \{-1 ; 2 + i\sqrt{3} ; 2 - i\sqrt{3}\}$  ·  $AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$  : triangle équilatéral · cercle circonscrit de centre  $\Omega(1)$  et de rayon 2 · la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  envoie  $B$  sur  $A$  · aire =  $3\sqrt{3}$ .

**Rappel de cours.** Le centre de gravité d'un triangle a pour affixe  $\frac{a+b+c}{3}$  — donc la somme des racines, divisée par 3. Pour un triangle équilatéral, il est aussi le centre du cercle circonscrit.

**Erreur fréquente.** Chercher le centre du cercle circonscrit par les médiatrices. Ici la relation coefficients-racines le donne immédiatement, sans aucun calcul de droite.