

Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ — Terminale maths expertes

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Dans $\mathbb{R}$, une équation polynomiale peut n'avoir aucune solution ; dans $\mathbb{C}$, un polynôme de degré n a toujours exactement n racines comptées avec leur multiplicité — c'est le théorème fondamental de l'algèbre, et il change tout : résoudre devient toujours possible, factoriser aussi. Ces 20 exercices corrigés couvrent l'ensemble du chapitre en maths expertes : équations du second degré à coefficients réels puis complexes, racine évidente et factorisation, polynômes de degré 3, 4 et 5, racines conjuguées d'un polynôme à coefficients réels, relations entre coefficients et racines, équations bicarrées et réciproques, factorisation de $z^n - 1$, et interprétation géométrique des racines. Deux réflexes reviennent à chaque exercice : une racine connue fait descendre le degré d'une unité, et la somme et le produit des racines fournissent une vérification gratuite. Les quatre derniers exercices sont des problèmes de synthèse type bac — dont le calcul de la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/equations-polynomiales-complexes

Exercice 1 - Équations qui se ramènent à $z^2 = a$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $z^2 = -9$ n'a pas de solution. Dans $\mathbb{C}$, elle en a exactement deux : c'est le point de départ de tout le chapitre.

1. Résoudre $z^2 = -9$, puis $z^2 + 4 = 0$.
2. Résoudre $(z - 1)^2 = -4$.
3. Résoudre $(2z + 3)^2 = -25$.

Exercice 2 - Second degré à coefficients réels

Quand a, b, c sont réels et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes CONJUGUÉES : $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

1. Résoudre $z^2 - 2z + 5 = 0$.
2. Résoudre $z^2 + z + 1 = 0$. On note j la solution de partie imaginaire positive.
3. Vérifier que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
4. Résoudre $4z^2 - 4z + 5 = 0$.

Exercice 3 - Somme et produit : reconstruire une équation

Deux nombres de somme S et de produit P sont exactement les racines de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$. Cette lecture inverse sert dans les deux sens : pour fabriquer une équation, et pour contrôler une résolution.

1. Déterminer deux nombres complexes de somme 6 et de produit 34.
2. Déterminer deux nombres complexes de somme $2i$ et de produit -1 .

3. Déterminer deux nombres complexes de somme $1 + i$ et de produit i .

Exercice 4 - Racine évidente et factorisation d'un degré 3

On considère $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$. Une racine « évidente » se cherche parmi les diviseurs du terme constant : ici $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

1. Vérifier que 3 est une racine de P .
2. Déterminer les réels a, b, c tels que $P(z) = (z - 3)(az^2 + bz + c)$.
3. Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5 - Degré 3 à coefficients réels avec une racine complexe

On considère $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$, dont tous les coefficients sont réels. On admet que $1 - i$ en est une racine.

1. Justifier que $1 + i$ est également une racine de P .
2. En utilisant la SOMME des racines, déterminer la troisième racine sans effectuer de division.
3. Factoriser $P(z)$ et vérifier le résultat.

Exercice 6 - Degré 4 à coefficients réels

On considère $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$, à coefficients réels. On admet que $2i$ est une racine.

1. Donner une deuxième racine sans calcul.
2. En déduire un facteur du second degré à coefficients réels, puis factoriser $P(z)$.
3. Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7 - Équation bicarrée

Une équation bicarrée ne contient que des puissances paires : le changement de variable $Z = z^2$ la ramène au second degré. On résout $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$.

1. Résoudre l'équation en posant $Z = z^2$.
2. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$.
3. Factoriser $z^4 + 3z^2 - 4$ en produit de facteurs du premier degré.

Exercice 8 - Second degré à coefficients complexes

La formule du discriminant reste valable avec des coefficients complexes, mais il faut calculer soi-même une racine carrée δ de Δ , et les racines ne sont plus conjuguées.

1. Résoudre $z^2 - (1 + 2i)z + (-1 + i) = 0$.
2. Résoudre $z^2 - (3 + 4i)z + (-1 + 5i) = 0$.

Exercice 9 - Factoriser par groupement

Toutes les équations ne demandent pas le discriminant : certaines se factorisent à vue, en regroupant les termes deux à deux.

1. Résoudre $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ en factorisant par groupement.
2. Résoudre $z^4 - 1 = 0$.
3. Résoudre $(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2) = 0$.

Exercice 10 - Théorème fondamental de l'algèbre et multiplicité

Le théorème fondamental de l'algèbre (admis) affirme que tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur MULTIPLICITÉ. On considère $P(z) = z^3 - iz^2 + z - i$.

1. Vérifier que i est racine de P , puis factoriser $P(z)$ par groupement.
2. Acheter la factorisation en produit de facteurs du premier degré.
3. Donner les racines de P avec leur multiplicité, et vérifier le compte annoncé par le théorème.

Exercice 11 - Factorisation de $z^n - 1$

Les racines n -ièmes de l'unité, vues au chapitre précédent, sont exactement les racines du polynôme $z^n - 1$. Cela en donne deux factorisations, qu'on peut comparer.

1. Factoriser $z^3 - 1$ de deux façons : par la somme géométrique, puis à l'aide des racines cubiques de l'unité.
2. Factoriser $z^4 - 1$ en produit de facteurs du premier degré.
3. Justifier que pour tout $n \geq 1$, $z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})$.
4. En déduire les solutions de $1 + z + z^2 + z^3 = 0$.

Exercice 12 - Relations entre coefficients et racines

On considère l'équation $z^3 + 2z^2 - 5z + 1 = 0$, dont on note z_1, z_2, z_3 les trois racines dans $\mathbb{C}$. Tout l'exercice se fait SANS calculer ces racines.

1. Donner $z_1 + z_2 + z_3$, $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$ et $z_1z_2z_3$.
2. Calculer $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$.
3. Calculer $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

Exercice 13 - Un polynôme de degré 5 à coefficients réels

On considère $P(z) = z^5 - z^4 + 2z^3 - 2z^2 + z - 1$, à coefficients réels.

1. Justifier, sans calcul, que P admet au moins une racine réelle.
2. Factoriser $P(z)$ par groupement, puis achever la factorisation.
3. Donner toutes les racines avec leur multiplicité.

Exercice 14 - Équation réciproque : le changement de variable $u = z + 1/z$

Une équation est dite RÉCIPROQUE lorsque ses coefficients se lisent de la même façon dans les deux sens. On résout $2z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 2 = 0$, dont les coefficients 2, -5, 6, -5, 2 sont symétriques.

1. Justifier que 0 n'est pas solution, puis diviser l'équation par z^2 .
2. Montrer qu'en posant $u = z + \frac{1}{z}$, l'équation devient $2u^2 - 5u + 2 = 0$.
3. Résoudre cette équation en u , puis conclure dans $\mathbb{C}$.

Exercice 15 - Une équation avec paramètre

Pour tout réel m , on considère l'équation $(E_m) : z^2 - 2z + m = 0$.

1. Discuter, selon les valeurs de m , la nature des solutions de (E_m) .
2. Lorsque les solutions ne sont pas réelles, déterminer m pour que leur module soit égal à 2.
3. Lorsque m décrit $]1 ; +\infty[$, décrire l'ensemble des points images des solutions.

Exercice 16 - Racines et géométrie : $z^3 = -27$

On résout $z^3 = -27$ de deux façons — par la factorisation polynomiale, puis par la forme exponentielle — avant d'interpréter les solutions dans le plan complexe.

1. Résoudre en factorisant $z^3 + 27$.
2. Retrouver les solutions par la forme exponentielle.
3. Placer les images des solutions et déterminer la nature du triangle qu'elles forment.

Exercice 17 - Bicarrée à discriminant complexe

On résout $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. Le changement de variable $Z = z^2$ conduit cette fois à des valeurs de Z NON RÉELLES : il faudra en extraire des racines carrées, ce que la forme exponentielle rend simple.

1. Résoudre l'équation en $Z = z^2$.
2. Écrire les deux valeurs de Z sous forme exponentielle.
3. En déduire les quatre solutions de l'équation initiale.

Exercice 18 - $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ et la valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$

Cette équation cache un joli résultat : elle permet d'obtenir la valeur EXACTE de $\cos \frac{2\pi}{5}$, qui ne figure dans aucun tableau de valeurs remarquables. On combine pour cela les racines cinquièmes de l'unité et le changement de variable réciproque.

1. Montrer que les solutions de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ sont les racines cinquièmes de l'unité autres que 1.
2. En divisant par z^2 et en posant $u = z + \frac{1}{z}$, montrer que $u^2 + u - 1 = 0$.
3. Résoudre en u , puis en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Exercice 19 - Une racine réelle cachée dans un polynôme complexe

On considère $P(z) = z^3 - (2 + 3i)z^2 + (-1 + 5i)z + 2 - 2i$. Ses coefficients ne sont pas réels : le théorème des racines conjuguées ne s'applique donc PAS. On cherche néanmoins s'il existe une racine réelle.

1. Montrer que si x est un réel tel que $P(x) = 0$, alors x vérifie simultanément $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ et $3x^2 - 5x + 2 = 0$.
2. En déduire l'unique racine réelle de P .
3. Factoriser $P(z)$, puis résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 20 - Problème de synthèse : racines d'un polynôme et triangle

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. On considère $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$, à coefficients réels.

1. Vérifier que -1 est racine de P , puis factoriser $P(z)$.
2. Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$. On note A, B, C les points images des solutions, A étant celui d'affixe réelle.
3. Calculer AB, AC et BC , puis déterminer la nature du triangle ABC .
4. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit à ABC .
5. Vérifier que l'image de B par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est A , puis calculer l'aire du triangle.