

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Les nombres complexes transforment la géométrie du plan en calcul algébrique : une distance devient un module, un angle devient un argument, une rotation devient une multiplication. Ces 20 exercices corrigés exploitent ce dictionnaire dans les deux sens, sur tout le programme de géométrie de maths expertes : affixes de points et de vecteurs, alignement et orthogonalité par un quotient, nature d'un quadrilatère, transformations du plan — translation, homothétie, rotation, similitude directe — et leurs éléments caractéristiques, composition de transformations, image d'une courbe, ensembles et lieux de points. Les derniers exercices démontrent de vrais théorèmes par le seul calcul sur les affixes : le théorème de Varignon, le cercle d'Apollonius, et une configuration de carrés construits sur les côtés d'un triangle. La difficulté est croissante, et chaque correction est rédigée étape par étape avec ses vérifications.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/geometrie-nombres-complexes

Exercice 1 - Affixes, vecteurs, milieu et alignement

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. On considère les points A , B et C d'affixes $a = 1 + 2i$, $b = 3 + 6i$ et $c = 4 + 8i$.

1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que A , B et C sont alignés.
3. Déterminer l'affixe du milieu I de $[AC]$, et préciser si B est ce milieu.

Exercice 2 - Translation et homothétie

Deux transformations élémentaires se lisent immédiatement sur les affixes : la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe w s'écrit $z' = z + w$, et l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k (réel non nul) s'écrit $z' - \omega = k(z - \omega)$.

1. Déterminer l'image de $A(1 + 2i)$ par la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $2 - i$.
2. Déterminer l'image de $A(1 + 2i)$ par l'homothétie de centre $\Omega(1)$ et de rapport 3.
3. Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(1)$ et de rapport 3, puis ses points invariants.

Exercice 3 - Rotation de centre quelconque

La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α a pour écriture complexe $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$: on se ramène au centre, on tourne, on revient.

1. Déterminer l'image de $A(1 + 2i)$ par la rotation de centre $\Omega(2 - i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
2. Vérifier le résultat par les distances.
3. Donner l'écriture complexe de cette rotation sous la forme $z' = az + b$.

Exercice 4 - Reconnaître une transformation $z' = az + b$

Toute transformation de la forme $z' = az + b$ avec $a \neq 0$ est une SIMILITUDE DIRECTE. Sa nature se lit sur a : $a = 1$ donne une translation, a réel donne une homothétie, $|a| = 1$ donne une rotation, et le cas général une similitude de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

1. Reconnaître $z' = z + 3 - i$ et $z' = 2z - 1$.
2. Reconnaître $z' = iz + 1 + i$.
3. Reconnaître $z' = (1 - i)z + 2i$.

Exercice 5 - Alignement de trois points

Le critère d'alignement par le quotient est le plus rapide, mais il faut savoir l'utiliser dans les deux sens : pour prouver un alignement, et pour prouver qu'il n'y en a pas.

1. Montrer que $A(1 + i)$, $B(4 + 2i)$ et $C(7 + 3i)$ sont alignés.
2. Montrer que $A(1 + i)$, $B(4 + 2i)$ et $D(2 + 5i)$ ne le sont pas.
3. Déterminer le réel t pour que le point $E(t + 4i)$ appartienne à la droite (AB) .

Exercice 6 - Orthogonalité et angle droit

Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque l'angle entre eux vaut $\pm \frac{\pi}{2}$: le quotient de leurs affixes est alors un IMAGINAIRE PUR. On considère $A(1 + i)$, $B(4 + 3i)$ et $C(-1 + 4i)$.

1. Calculer $Z = \frac{c - a}{b - a}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC .
3. Déterminer l'afixe du point D tel que $ABDC$ soit un rectangle.

Exercice 7 - Nature d'un quadrilatère

On considère $A(1 + i)$, $B(4 + 2i)$, $C(3 + 5i)$ et $D(4i)$. On veut déterminer la nature exacte du quadrilatère $ABCD$, en enchaînant les critères du plus général au plus précis.

1. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Montrer que deux côtés consécutifs ont la même longueur.
3. Montrer que deux côtés consécutifs sont perpendiculaires, et conclure.

Exercice 8 - Similitude directe : éléments caractéristiques

On considère la transformation s qui, au point $M(z)$, associe M' d'afixe $z' = 2iz + 3 - i$.

1. Déterminer le point invariant Ω de s .
2. Montrer que $z' - \omega = 2i(z - \omega)$, et en déduire la nature de s .
3. Déterminer l'image du point $A(3)$, puis vérifier les éléments caractéristiques sur ce point.

Exercice 9 - Composer deux transformations

Composer deux transformations revient à composer leurs écritures complexes. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur d'affixe 2.

1. Donner l'écriture complexe de $t \circ r$ (d'abord r , puis t).
2. Reconnaître cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
3. Donner l'écriture complexe de $r \circ t$, et comparer avec la précédente.

Exercice 10 - Image d'un cercle par une similitude

Une similitude de rapport k multiplie toutes les distances par k : elle transforme donc un cercle en un cercle. Encore faut-il savoir calculer le centre et le rayon de l'image. Le point $M(z)$ décrit le cercle C de centre O et de rayon 2, et M' a pour affixe $z' = (1 + i)z + 3$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation.
2. Déterminer le lieu du point M' .
3. Reprendre la question avec C de centre $A(1)$ et de rayon 2, et $z' = 2iz - 1$.

Exercice 11 - Caractériser un triangle équilatéral

Un triangle ABC est équilatéral DIRECT lorsque C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On en tire une caractérisation entièrement algébrique.

1. Traduire cette définition par une relation entre a , b et c .
2. Application : $A(0)$ et $B(2)$. Déterminer l'affixe de C pour que ABC soit équilatéral direct, et vérifier les trois longueurs.
3. Démontrer que si ABC est équilatéral direct, alors $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice 12 - Théorème de Varignon

Voici un théorème simple à énoncer et pénible à démontrer sans outil : dans un quadrilatère QUELCONQUE, les milieux des quatre côtés forment toujours un parallélogramme. Avec les affixes, la démonstration tient en trois lignes. Soit $PQRS$ un quadrilatère d'affixes p, q, r, s , et M_1, M_2, M_3, M_4 les milieux respectifs de $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$ et $[SP]$.

1. Exprimer les affixes des quatre milieux.
2. Démontrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme.
3. Vérifier sur l'exemple $P(1 + i)$, $Q(5 + 2i)$, $R(4 + 6i)$, $S(-1 + 4i)$.

Exercice 13 - Points alignés ou cocycliques

Quatre points distincts A, B, C, D sont alignés ou cocycliques (sur un même cercle) si et seulement si leur BIRAPPORT $\left[\frac{c-a}{c-b} \right] \div \left[\frac{d-a}{d-b} \right]$ est un nombre réel. C'est la traduction du théorème de l'angle inscrit : $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB})$ modulo π .

1. On pose $A(3 + i)$, $B(1 + 3i)$, $C(-1 + i)$ et $D(1 - i)$. Vérifier que ces quatre points sont sur un même cercle, en déterminant son centre et son rayon.

2. Calculer le birapport de ces quatre points et vérifier qu'il est réel.
3. Le point $E(2 + 3i)$ est-il sur ce cercle ?

Exercice 14 - Construire un carré sur un segment

On veut construire le carré $ABCD$ direct de côté $[AB]$, avec $A(1 + i)$ et $B(4 + 2i)$. « Direct » signifie que les sommets A, B, C, D se suivent dans le sens trigonométrique.

1. Exprimer c à l'aide d'une rotation de centre B , puis calculer son affixe.
2. En déduire l'affixe de D .
3. Vérifier que $ABCD$ est bien un carré.

Exercice 15 - Intersection de deux ensembles de points

Quand deux conditions portent simultanément sur z , on traduit chacune en un objet géométrique, puis on cherche l'intersection. On cherche les points $M(z)$ vérifiant à la fois $|z| = 2$ et $|z - 1| = |z - i|$.

1. Interpréter géométriquement chacune des deux conditions.
2. Déterminer une équation cartésienne de la seconde.
3. Résoudre le système et donner les affixes des points cherchés.

Exercice 16 - Lieu d'un point lié

Lorsqu'un point M décrit une courbe et qu'un point M' lui est lié par une relation, on cherche la courbe décrite par M' . La méthode est toujours la même : exprimer z en fonction de z' , puis reporter dans la condition initiale. Ici, M décrit le cercle de centre $A(1)$ et de rayon 2, et $z' = 2iz - 1$.

1. Déterminer le lieu de M' .
2. Retrouver le résultat par les éléments caractéristiques de la transformation.
3. Même question si M décrit la droite d'équation $x = 3$.

Exercice 17 - Cercle d'Apollonius

On connaît l'ensemble des points équidistants de A et B : c'est la médiatrice. Mais que devient cet ensemble si l'on impose un RAPPORT de distances différent de 1 ? On étudie l'ensemble E des points $M(z)$ tels que $|z - 1| = 2|z + 1|$, avec $A(1)$ et $B(-1)$.

1. Traduire la condition en termes de distances, et prévoir la position approximative de l'ensemble.
2. Déterminer une équation cartésienne de E , puis reconnaître cet ensemble.
3. Déterminer les points de E situés sur l'axe des réels, et vérifier.

Exercice 18 - Deux carrés construits sur un triangle

Soit ABC un triangle quelconque, d'affixes a, b, c . On construit deux carrés vers l'extérieur, l'un sur $[AB]$ de centre P , l'autre sur $[AC]$ de centre Q . On admet que leurs centres ont pour affixes $p = \frac{a+b}{2} + \frac{i}{2}(b-a)$ et $q = \frac{a+c}{2} - \frac{i}{2}(c-a)$. Soit enfin I

le milieu de $[BC]$. On va démontrer que $IP = IQ$ et $(IP) \perp (IQ)$, quel que soit le triangle.

1. Exprimer $p - z_I$ et $q - z_I$ en fonction de a, b, c .
2. Démontrer que $p - z_I = -i(q - z_I)$.
3. Conclure, puis vérifier sur le triangle $A(0), B(4), C(1 + 3i)$.

Exercice 19 - Problème de synthèse : une similitude et ses itérées

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. On considère la transformation s définie par $z' = (1 - i)z + 2i$. On pose A_0 le point d'affixe 0 et, pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = s(A_n)$. On note a_n l'affixe de A_n .

1. Déterminer le point invariant Ω de s , puis la nature et les éléments caractéristiques de s .
2. Calculer a_1, a_2 et a_3 .
3. Montrer que $a_n - 2 = -2(1 - i)^n$, puis exprimer ΩA_n .
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega A_n > 100$, puis les entiers n pour lesquels A_n appartient à la demi-droite $[\Omega A_0]$.

Exercice 20 - Problème de synthèse : l'application $z \mapsto z^2$

À tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = z^2$. Ce n'est PAS une similitude : les distances ne sont pas multipliées par un facteur constant, et les images de droites ne sont plus des droites. On étudie cette application sur plusieurs courbes.

1. Déterminer les points invariants.
2. Déterminer le lieu de M' lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1.
3. Déterminer le lieu de M' lorsque M décrit la droite d'équation $x = 1$.
4. Déterminer les points M pour lesquels O, M et M' sont alignés, puis ceux pour lesquels M' est le milieu de $[OM]$.

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Affixes, vecteurs, milieu et alignement

L'affixe d'un vecteur se calcule par « arrivée moins départ » : $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a = (3 + 6i) - (1 + 2i) = 2 + 4i$.

De même, $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $c - a = (4 + 8i) - (1 + 2i) = 3 + 6i$.

Trois points sont alignés lorsque deux des vecteurs qu'ils déterminent sont COLINÉAIRES, c'est-à-dire lorsque le quotient de leurs affixes est un nombre RÉEL.

Calculons ce quotient : $\frac{c-a}{b-a} = \frac{3+6i}{2+4i}$.

On peut factoriser directement : $3 + 6i = 3(1 + 2i)$ et $2 + 4i = 2(1 + 2i)$, donc le quotient vaut $\frac{3}{2}$.

Ce nombre est réel, donc $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$: les points A , B et C sont alignés.

Le milieu de $[AC]$ a pour affixe la demi-somme :

$$\frac{a+c}{2} = \frac{(1+2i) + (4+8i)}{2} = \frac{5+10i}{2} = \frac{5}{2} + 5i.$$

Or $b = 3 + 6i \neq \frac{5}{2} + 5i$: le point B n'est donc PAS le milieu de $[AC]$, bien qu'il soit sur la droite (AC) .

C'est cohérent avec le coefficient trouvé : $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ signifie que B est aux deux tiers du chemin de A vers C , pas à la moitié.

Réponse. $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $2 + 4i$, $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $3 + 6i$. $\frac{c-a}{b-a} = \frac{3}{2}$ est réel, donc les points sont alignés · le milieu de $[AC]$ a pour affixe $\frac{5}{2} + 5i$, ce n'est pas B .

Rappel de cours. Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A$ · milieu de $[AB]$: $\frac{z_A + z_B}{2}$ · A, B, C alignés $\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a}$ est RÉEL.

Erreur fréquente. Conclure à l'alignement parce que les coordonnées « se ressemblent ». Le critère est net : le quotient doit être réel, c'est-à-dire de partie imaginaire nulle.

Correction de l'exercice 2 - Translation et homothétie

Translation : $z' = z + w = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i$.

Contrôle géométrique : on avance de 2 horizontalement et de -1 verticalement, donc $(1; 2)$ devient $(3; 1)$ ✓.

Homothétie : on applique $z' = k(z - \omega) + \omega$ avec $k = 3$ et $\omega = 1$.

On calcule d'abord $z - \omega = (1 + 2i) - 1 = 2i$, c'est-à-dire l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$.

On le multiplie par 3 : $3 \times 2i = 6i$. Puis on revient au point : $z' = 6i + 1 = 1 + 6i$.

Contrôle : $\Omega A = |2i| = 2$ et $\Omega A' = |1 + 6i - 1| = 6 = 3 \times 2$ ✓. La distance au centre est bien multipliée par 3.

Écriture complexe : $z' = 3(z - 1) + 1 = 3z - 3 + 1 = 3z - 2$.

Points invariants : ce sont les z tels que $z' = z$, c'est-à-dire $z = 3z - 2$.

On résout : $-2z = -2$, donc $z = 1$. L'unique point invariant est le CENTRE $\Omega(1)$, ce qui est

la règle pour toute homothétie de rapport $k \neq 1$.

À l'inverse, une translation de vecteur non nul n'a AUCUN point invariant : $z = z + w$ exigerait $w = 0$.

Réponse. Translation : image d'affixe $3 + i$ · homothétie : image d'affixe $1 + 6i$ · écriture complexe $z' = 3z - 2$, unique point invariant $\Omega(1)$.

Rappel de cours. Translation : $z' = z + w$, aucun point invariant si $w \neq 0$ · homothétie de centre ω et de rapport $k \neq 1$: $z' - \omega = k(z - \omega)$, un seul point invariant, le centre.

Erreur fréquente. Écrire l'homothétie $z' = kz + \omega$. Il faut se ramener au centre AVANT de multiplier : $z' = k(z - \omega) + \omega$.

Correction de l'exercice 3 - Rotation de centre quelconque

L'angle est $-\frac{\pi}{2}$, donc $e^{i\alpha} = e^{-i\pi/2} = -i$. La rotation s'écrit $z' = -i(z - \omega) + \omega$.

Étape 1 : on calcule l'affixe de $\overline{\Omega A}$, soit $z - \omega = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i$.

Étape 2 : on multiplie par $-i$: $-i(-1 + 3i) = i - 3i^2 = i + 3 = 3 + i$.

Étape 3 : on revient au point en ajoutant ω : $z' = (3 + i) + (2 - i) = 5$.

L'image A' a donc pour affixe 5 : c'est un point de l'axe des réels.

Vérification par les distances : $\Omega A = |-1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

Et $\Omega A' = |5 - (2 - i)| = |3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ ✓. Une rotation conserve les distances au centre.

On peut aussi vérifier l'angle : $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = \frac{3 + i}{-1 + 3i}$. En multipliant par le conjugué du dénominateur : $\frac{(3 + i)(-1 - 3i)}{1 + 9} = \frac{-3 - 9i - i - 3i^2}{10} = \frac{-10i}{10} = -i$ ✓, de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{2}$.

Écriture générale : $z' = -i(z - (2 - i)) + (2 - i) = -iz + i(2 - i) + 2 - i$.

On développe : $i(2 - i) = 2i - i^2 = 1 + 2i$, donc $z' = -iz + 1 + 2i + 2 - i = -iz + 3 + i$.

Contrôle sur A : $-i(1 + 2i) + 3 + i = -i - 2i^2 + 3 + i = 2 + 3 = 5$ ✓.

Réponse. L'image a pour affixe 5 · $\Omega A = \Omega A' = \sqrt{10}$ ✓ · écriture complexe : $z' = -iz + 3 + i$.

Rappel de cours. Rotation d'angle α , de centre ω : $z' = e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$. Angles utiles : $e^{i\pi/2} = i$, $e^{-i\pi/2} = -i$, $e^{i\pi} = -1$ (la rotation d'angle π est la symétrie centrale).

Erreur fréquente. Prendre $e^{-i\pi/2} = i$. Le signe de l'angle compte : $-\frac{\pi}{2}$ correspond à $-i$, soit un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre.

Correction de l'exercice 4 - Reconnaître une transformation $z' = az + b$

Pour $z' = z + 3 - i$: ici $a = 1$, c'est donc la TRANSLATION de vecteur d'affixe $3 - i$. Elle n'a aucun point invariant.

Pour $z' = 2z - 1$: $a = 2$ est un réel différent de 1, c'est donc une HOMOTHÉTIE de rapport 2.

Son centre est l'unique point invariant : $\omega = 2\omega - 1$ donne $\omega = 1$. C'est l'homothétie de centre $\Omega(1)$ et de rapport 2.

Contrôle : $z' - 1 = 2z - 1 - 1 = 2(z - 1)$ ✓, on retrouve bien la forme $z' - \omega = k(z - \omega)$.

Pour $z' = iz + 1 + i$: $|a| = |i| = 1$, c'est donc une ROTATION, d'angle $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

Centre : $\omega = i\omega + 1 + i$, soit $\omega(1 - i) = 1 + i$, donc $\omega = \frac{1+i}{1-i}$.

On calcule ce quotient : $\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$. Le centre est le point d'affixe i .

Contrôle : $i \times i + 1 + i = -1 + 1 + i = i$ ✓, le point est bien invariant.

Pour $z' = (1 - i)z + 2i$: $|1 - i| = \sqrt{2} \neq 1$ et $1 - i$ n'est pas réel. C'est donc une SIMILITUDE DIRECTE au sens strict.

Rapport : $|1 - i| = \sqrt{2}$. Angle : $\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$, car $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

Centre : $\omega = (1 - i)\omega + 2i$, soit $\omega(1 - 1 + i) = 2i$, c'est-à-dire $i\omega = 2i$, donc $\omega = 2$.

Bilan : similitude directe de centre $\Omega(2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Réponse. $z' = z + 3 - i$: translation de vecteur $3 - i$ · $z' = 2z - 1$: homothétie de centre 1 et de rapport 2 · $z' = iz + 1 + i$: rotation de centre i et d'angle $\frac{\pi}{2}$ · $z' = (1 - i)z + 2i$: similitude directe de centre 2, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Rappel de cours. $z' = az + b$: si $a = 1$, translation ; si $a \neq 1$, il existe un unique point invariant $\omega = \frac{b}{1-a}$, et $z' - \omega = a(z - \omega)$ avec rapport $|a|$ et angle $\arg(a)$.

Erreur fréquente. Chercher un centre à une translation. Quand $a = 1$, l'équation $z = z + b$ n'a pas de solution : il n'y a pas de point fixe.

Correction de l'exercice 5 - Alignement de trois points

Affixes des vecteurs : $b - a = (4 + 2i) - (1 + i) = 3 + i$, et $c - a = (7 + 3i) - (1 + i) = 6 + 2i$.

Quotient : $\frac{c-a}{b-a} = \frac{6+2i}{3+i} = \frac{2(3+i)}{3+i} = 2$.

Ce quotient est réel, donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$: les trois points sont alignés, et B est le milieu de $[AC]$.

Deuxième cas : $d - a = (2 + 5i) - (1 + i) = 1 + 4i$.

Quotient : $\frac{d-a}{b-a} = \frac{1+4i}{3+i}$. On multiplie par le conjugué :

$$\frac{(1+4i)(3-i)}{9+1} = \frac{3-i+12i-4i^2}{10} = \frac{7+11i}{10}.$$

Sa partie imaginaire vaut $\frac{11}{10} \neq 0$: le quotient n'est pas réel, donc A , B et D ne sont pas alignés.

Troisième question : on cherche t réel tel que $\frac{e-a}{b-a}$ soit réel, avec

$$e - a = (t + 4i) - (1 + i) = (t - 1) + 3i.$$

$$\text{Quotient : } \frac{(t-1)+3i}{3+i} = \frac{[(t-1)+3i](3-i)}{10}.$$

$$\text{Numérateur : } 3(t-1) - i(t-1) + 9i - 3i^2 = [3(t-1) + 3] + i[9 - (t-1)] = (3t) + i(10 - t).$$

Le quotient est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle : $10 - t = 0$, donc $t = 10$.

Contrôle : pour $E(10 + 4i)$, on a $e - a = 9 + 3i = 3(3 + i) = 3(b - a)$ ✓, le quotient vaut 3, bien réel.

Réponse. $\frac{c-a}{b-a} = 2$: A , B , C alignés (et B milieu de $[AC]$) · $\frac{d-a}{b-a} = \frac{7+11i}{10}$ n'est pas réel : pas d'alignement · E est sur (AB) pour $t = 10$.

Rappel de cours. A , B , C alignés $\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}$. Chercher un

point d'une droite revient donc à annuler une partie imaginaire.

Erreur fréquente. Oublier de rendre le dénominateur réel avant de lire la partie imaginaire. Tant que le quotient n'est pas sous forme algébrique, on ne peut rien conclure.

Correction de l'exercice 6 - Orthogonalité et angle droit

$$b - a = (4 + 3i) - (1 + i) = 3 + 2i \text{ et } c - a = (-1 + 4i) - (1 + i) = -2 + 3i.$$

$$Z = \frac{-2 + 3i}{3 + 2i}. \text{ On multiplie par le conjugué du dénominateur : } Z = \frac{(-2 + 3i)(3 - 2i)}{9 + 4}.$$

$$\text{Numérateur : } -6 + 4i + 9i - 6i^2 = -6 + 13i + 6 = 13i.$$

$$\text{Donc } Z = \frac{13i}{13} = i.$$

Lecture du module : $|Z| = 1$, or $|Z| = \frac{AC}{AB}$. Donc $AC = AB$: le triangle est isocèle en A.

Lecture de l'argument : $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$, qui mesure l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. L'angle en A est droit.

Le triangle ABC est donc RECTANGLE ISOCÈLE EN A. Contrôle : $AB = |3 + 2i| = \sqrt{13}$ et $AC = |-2 + 3i| = \sqrt{13}$ ✓.

Pour le rectangle $ABDC$, on parcourt les sommets dans l'ordre $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$. Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ doivent être parallèles et de même longueur, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$$\text{Donc } b - a = d - c, \text{ d'où } d = c + b - a = (-1 + 4i) + (3 + 2i) = 2 + 6i.$$

Vérification : $\overrightarrow{CD}$ a pour affixe $d - c = 3 + 2i = b - a$ ✓, et l'angle en A étant droit, le parallélogramme $ABDC$ est bien un rectangle.

Comme de plus $AB = AC$, ce rectangle est même un CARRÉ : $AB = |3 + 2i| = \sqrt{13}$ et $AC = \sqrt{13}$.

Réponse. $Z = i$: le triangle ABC est rectangle isocèle en A · $d = 2 + 6i$, et $ABDC$ est en fait un carré.

Rappel de cours. $(\overrightarrow{AB}) \perp (\overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Si de plus le module vaut 1, le triangle est rectangle isocèle.

Erreur fréquente. Confondre l'ordre des sommets. $ABDC$ et $ABCD$ ne désignent pas le même quadrilatère : c'est l'ordre qui dit quels côtés sont opposés.

Correction de l'exercice 7 - Nature d'un quadrilatère

Critère du parallélogramme : $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $b - a = c - d$.

$$b - a = (4 + 2i) - (1 + i) = 3 + i \text{ et } c - d = (3 + 5i) - 4i = 3 + i \text{ ✓. Les deux vecteurs sont égaux.}$$

On peut aussi utiliser le critère des diagonales, qui doivent avoir le même milieu : $a + c = (1 + i) + (3 + 5i) = 4 + 6i$ et $b + d = (4 + 2i) + 4i = 4 + 6i$ ✓.

$$\text{Longueurs de deux côtés consécutifs : } AB = |3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}.$$

$$\text{Et } AD = |d - a| = |4i - (1 + i)| = |-1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}.$$

Un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux est un LOSANGE.

$$\text{Perpendicularité : on calcule } \frac{d-a}{b-a} = \frac{-1+3i}{3+i} = \frac{(-1+3i)(3-i)}{10}.$$

$$\text{Numérateur : } -3 + i + 9i - 3i^2 = -3 + 10i + 3 = 10i, \text{ donc le quotient vaut } i.$$

Ce quotient est imaginaire pur : l'angle en A est droit. Un parallélogramme ayant un angle droit est un RECTANGLE.

Conclusion : $ABCD$ est à la fois un losange et un rectangle, c'est donc un CARRÉ.

Vérification complète des quatre côtés : $BC = |(3 + 5i) - (4 + 2i)| = |-1 + 3i| = \sqrt{10}$ et $CD = |4i - (3 + 5i)| = |-3 - i| = \sqrt{10}$ ✓.

Vérification des diagonales : $AC = |2 + 4i| = \sqrt{20}$ et $BD = |-4 + 2i| = \sqrt{20}$ ✓ — dans un carré, les diagonales sont égales, et valent $\sqrt{2}$ fois le côté : $\sqrt{2} \times \sqrt{10} = \sqrt{20}$ ✓.

Réponse. $b - a = c - d = 3 + i$: parallélogramme · $AB = AD = \sqrt{10}$: losange · $\frac{d-a}{b-a} = i$: angle droit, donc rectangle · $ABCD$ est un CARRÉ de côté $\sqrt{10}$.

Rappel de cours. Parallélogramme : $b - a = c - d$ (ou $a + c = b + d$) · losange : + deux côtés consécutifs égaux · rectangle : + un angle droit (quotient imaginaire pur) · carré : les deux.

Erreur fréquente. Conclure « carré » à partir des seules longueurs. Quatre côtés égaux donnent un losange : il faut un angle droit en plus.

Correction de l'exercice 8 - Similitude directe : éléments caractéristiques

Un point invariant vérifie $\omega = 2i\omega + 3 - i$, soit $\omega - 2i\omega = 3 - i$, c'est-à-dire $\omega(1 - 2i) = 3 - i$.

$$\text{Donc } \omega = \frac{3-i}{1-2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{1+4} = \frac{3+6i-i-2i^2}{5} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$$

$$\text{Contrôle : } 2i(1+i) + 3 - i = 2i + 2i^2 + 3 - i = 2i - 2 + 3 - i = 1 + i \checkmark.$$

$$\text{Pour la forme réduite, on calcule } z' - \omega = 2iz + 3 - i - (1 + i) = 2iz + 2 - 2i.$$

$$\text{Et } 2i(z - \omega) = 2iz - 2i(1 + i) = 2iz - 2i - 2i^2 = 2iz + 2 - 2i.$$

$$\text{Les deux expressions coïncident : } z' - \omega = 2i(z - \omega).$$

$$\text{Le coefficient } 2i \text{ a pour module } |2i| = 2 \text{ et pour argument } \frac{\pi}{2}.$$

s est donc la SIMILITUDE DIRECTE de centre $\Omega(1 + i)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Image de } A(3) : z' = 2i \times 3 + 3 - i = 6i + 3 - i = 3 + 5i.$$

$$\text{Vérification du rapport : } \Omega A = |3 - (1 + i)| = |2 - i| = \sqrt{5}, \text{ et}$$

$$\Omega A' = |3 + 5i - (1 + i)| = |2 + 4i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \checkmark, \text{ soit bien le double.}$$

$$\text{Vérification de l'angle : } \frac{a' - \omega}{a - \omega} = \frac{2 + 4i}{2 - i} = \frac{(2 + 4i)(2 + i)}{5} = \frac{4 + 2i + 8i + 4i^2}{5} = \frac{10i}{5} = 2i \checkmark,$$

de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Réponse. Ω a pour affixe $1 + i$ · $z' - \omega = 2i(z - \omega)$: similitude directe de centre $\Omega(1 + i)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ · image de $A(3)$: $3 + 5i$, avec $\Omega A' = 2 \Omega A$.

Rappel de cours. Pour $z' = az + b$ avec $a \neq 1$: centre $\omega = \frac{b}{1-a}$, rapport $|a|$, angle $\arg(a)$. La forme réduite $z' - \omega = a(z - \omega)$ est ce qu'on rédige pour conclure.

Erreur fréquente. Confondre le rapport et le coefficient. Le rapport d'une similitude est un réel POSITIF : c'est $|a|$, pas a .

Correction de l'exercice 9 - Composer deux transformations

La rotation r s'écrit $z_1 = e^{i\pi/2}z = iz$, et la translation t s'écrit $z' = z + 2$.

Pour $t \circ r$, on applique r d'abord : $z \mapsto iz$, puis t : $iz \mapsto iz + 2$.

Donc $t \circ r$ a pour écriture $z' = iz + 2$.

Le coefficient est $a = i$, de module 1 : ce n'est ni une translation ($a \neq 1$) ni une homothétie (a non réel), c'est une ROTATION d'angle $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

Son centre est le point invariant : $\omega = i\omega + 2$, soit $\omega(1 - i) = 2$, donc

$$\omega = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i.$$

Contrôle : $i(1+i) + 2 = i - 1 + 2 = 1+i$ ✓.

Donc $t \circ r$ est la rotation de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$: composer une rotation avec une translation donne une rotation de MÊME ANGLE, mais de centre déplacé.

Pour $r \circ t$, on applique t d'abord : $z \mapsto z + 2$, puis $r : z + 2 \mapsto i(z + 2) = iz + 2i$.

Donc $r \circ t$ a pour écriture $z' = iz + 2i$.

C'est encore une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, de centre $\omega' = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = i(1+i) = -1+i$.

Comparaison : les deux composées sont des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$, mais de centres différents, $1+i$ et $-1+i$.

La composition de transformations n'est donc PAS commutative : $t \circ r \neq r \circ t$. L'ordre compte.

Réponse. $t \circ r : z' = iz + 2$, rotation de centre $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ · $r \circ t : z' = iz + 2i$, rotation de centre $-1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ · même angle, centres différents : la composition n'est pas commutative.

Rappel de cours. Composer, c'est substituer : $g \circ f$ s'obtient en remplaçant z par $f(z)$ dans l'écriture de g . Le coefficient de la composée est le PRODUIT des coefficients : les rapports se multiplient, les angles s'additionnent.

Erreur fréquente. Inverser l'ordre. Dans $t \circ r$, c'est r qui agit EN PREMIER : $t \circ r(z) = t(r(z))$.

Correction de l'exercice 10 - Image d'un cercle par une similitude

Le coefficient $1+i$ a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{4}$: c'est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Son centre : $\omega = (1+i)\omega + 3$, soit $\omega(1 - 1 - i) = 3$, donc $-i\omega = 3$ et $\omega = \frac{3}{-i} = 3i$.

Contrôle : $(1+i)(3i) + 3 = 3i + 3i^2 + 3 = 3i - 3 + 3 = 3i$ ✓.

Pour le lieu, on n'a pas besoin du centre : on exprime la condition sur z en fonction de z' .

De $z' = (1+i)z + 3$, on tire $z = \frac{z' - 3}{1+i}$.

La condition $|z| = 2$ devient $\left| \frac{z' - 3}{1+i} \right| = 2$, soit $\frac{|z' - 3|}{|1+i|} = 2$.

Comme $|1+i| = \sqrt{2}$, cela donne $|z' - 3| = 2\sqrt{2}$.

Le lieu de M' est donc le CERCLE de centre le point d'affixe 3 et de rayon $2\sqrt{2}$.

Lecture géométrique : l'image du centre O est $(1+i) \times 0 + 3 = 3$ ✓, et le rayon est multiplié par le rapport $\sqrt{2} : 2\sqrt{2}$ ✓. Les deux méthodes concordent.

Deuxième situation : $z' = 2iz - 1$, donc $z = \frac{z' + 1}{2i}$.

La condition $|z - 1| = 2$ devient $\left| \frac{z' + 1}{2i} - 1 \right| = 2$, soit $\left| \frac{z' + 1 - 2i}{2i} \right| = 2$.

Comme $|2i| = 2$, on obtient $|z' + 1 - 2i| = 4$, c'est-à-dire $|z' - (-1 + 2i)| = 4$.

Le lieu est le cercle de centre le point d'affixe $-1 + 2i$ et de rayon 4.

Contrôle par l'image du centre : l'image de $A(1)$ est $2i \times 1 - 1 = -1 + 2i$ ✓, et le rapport $|2i| = 2$ double le rayon : $2 \times 2 = 4$ ✓.

Réponse. $z' = (1 + i)z + 3$: similitude de centre $3i$, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ · le lieu de M' est le cercle de centre 3 et de rayon $2\sqrt{2}$ · avec $z' = 2iz - 1$: cercle de centre $-1 + 2i$ et de rayon 4.

Rappel de cours. L'image d'un cercle de centre Γ et de rayon r par une similitude de rapport k est le cercle de centre l'image de Γ et de rayon kr . Méthode de calcul : exprimer z en fonction de z' , puis reporter dans la condition.

Erreur fréquente. Oublier de diviser par $|a|$ en reportant. C'est ce facteur qui multiplie le rayon : sans lui, le cercle image garde à tort le rayon initial.

Correction de l'exercice 11 - Caractériser un triangle équilatéral

La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie B sur C : cela s'écrit $c - a = e^{i\pi/3}(b - a)$.

C'est la caractérisation demandée. Le module donne $AC = AB$ et l'argument donne un angle de $\frac{\pi}{3}$ en A : un triangle isocèle d'angle au sommet 60° est équilatéral.

Application : $e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, et $b - a = 2$.

Donc $c = a + e^{i\pi/3}(b - a) = 0 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times 2 = 1 + i\sqrt{3}$.

Vérification des longueurs : $AB = |2 - 0| = 2$.

$AC = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$ ✓.

$BC = |1 + i\sqrt{3} - 2| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$ ✓. Le triangle est bien équilatéral.

Pour la troisième question, posons $j' = e^{i\pi/3}$. On sait que j' vérifie une relation utile : $e^{i\pi/3}$ est racine de $x^2 - x + 1 = 0$.

En effet $(e^{i\pi/3})^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, et $e^{i\pi/3} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$: les deux coïncident, donc $j'^2 = j' - 1$, c'est-à-dire $j'^2 - j' + 1 = 0$.

Partons de $c - a = j'(b - a)$. On isole tout d'un côté : $c - a - j'b + j'a = 0$.

Il s'agit de montrer que $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$. Or cette expression se factorise remarquablement.

En posant $u = b - a$ et $v = c - a$, on a $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = u^2 - uv + v^2$ (développement direct en remplaçant $b = a + u$ et $c = a + v$).

Comme $v = j'u$, il vient $u^2 - u(j'u) + (j'u)^2 = u^2(1 - j' + j'^2)$.

Et la parenthèse est nulle d'après la relation $j'^2 - j' + 1 = 0$. Donc $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Contrôle sur l'exemple : $a = 0$, $b = 2$, $c = 1 + i\sqrt{3}$. À gauche :

$$0 + 4 + (1 + i\sqrt{3})^2 = 4 + (1 + 2i\sqrt{3} - 3) = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

À droite : $ab + bc + ca = 0 + 2(1 + i\sqrt{3}) + 0 = 2 + 2i\sqrt{3}$ ✓.

Réponse. ABC équilatéral direct $\Leftrightarrow c - a = e^{i\pi/3}(b - a)$ · pour $A(0)$ et $B(2)$: $c = 1 + i\sqrt{3}$, et $AB = AC = BC = 2$ · dans ce cas $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Rappel de cours. $e^{i\pi/3}$ vérifie $j^2 - j + 1 = 0$: c'est cette relation qui fait s'annuler l'expression symétrique. L'identité $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ caractérise les triangles équilatéraux, dans les deux sens de rotation.

Erreur fréquente. Utiliser $e^{i\pi/3}$ pour l'orientation inverse. Pour un triangle équilatéral INDIRECT, c'est $e^{-i\pi/3}$ qu'il faut — l'identité symétrique de la question 3 couvre, elle, les deux cas.

Correction de l'exercice 12 - Théorème de Varignon

Les affixes des milieux sont les demi-sommes : $m_1 = \frac{p+q}{2}$, $m_2 = \frac{q+r}{2}$, $m_3 = \frac{r+s}{2}$ et $m_4 = \frac{s+p}{2}$.

Pour montrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme, il suffit de vérifier $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$, c'est-à-dire $m_2 - m_1 = m_3 - m_4$.

Calcul du premier membre : $m_2 - m_1 = \frac{q+r}{2} - \frac{p+q}{2} = \frac{r-p}{2}$.

Le q disparaît : c'est là toute l'astuce.

Calcul du second membre : $m_3 - m_4 = \frac{r+s}{2} - \frac{s+p}{2} = \frac{r-p}{2}$.

Cette fois c'est s qui disparaît. Les deux résultats sont égaux :

$$m_2 - m_1 = m_3 - m_4 = \frac{r-p}{2}.$$

Donc $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$: le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme, quel que soit le quadrilatère de départ.

On obtient même un résultat plus précis : $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$. Les côtés du parallélogramme sont parallèles aux DIAGONALES du quadrilatère initial, et deux fois plus courts.

Vérification sur l'exemple. $m_1 = \frac{(1+i) + (5+2i)}{2} = \frac{6+3i}{2} = 3 + \frac{3}{2}i$.

$$m_2 = \frac{(5+2i) + (4+6i)}{2} = \frac{9+8i}{2} = \frac{9}{2} + 4i.$$

$$m_3 = \frac{(4+6i) + (-1+4i)}{2} = \frac{3+10i}{2} = \frac{3}{2} + 5i.$$

$$m_4 = \frac{(-1+4i) + (1+i)}{2} = \frac{5i}{2} = \frac{5}{2}i.$$

$$\text{Contrôle : } m_2 - m_1 = \frac{9}{2} - 3 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)i = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i.$$

$$\text{Et } m_3 - m_4 = \frac{3}{2} + \left(5 - \frac{5}{2}\right)i = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \checkmark.$$

Contrôle du résultat plus fin : $\frac{r-p}{2} = \frac{(4+6i) - (1+i)}{2} = \frac{3+5i}{2} \checkmark$, c'est bien la moitié de la diagonale $\overrightarrow{PR}$.

Réponse. $m_2 - m_1 = m_3 - m_4 = \frac{r-p}{2}$, donc $M_1M_2M_3M_4$ est toujours un parallélogramme, de côtés parallèles aux diagonales de $PQRS$ et deux fois plus courts.

Rappel de cours. Une démonstration par les affixes se mène sur des lettres, pas sur des nombres : le résultat vaut alors pour TOUTE configuration. Ici, les milieux transforment un quadrilatère quelconque en parallélogramme.

Erreur fréquente. Vérifier seulement sur un exemple numérique. Un exemple illustre, il ne démontre pas : c'est le calcul littéral de la question 2 qui prouve le théorème.

Correction de l'exercice 13 - Points alignés ou cocycliques

On cherche un point $\Gamma(y)$ équidistant des quatre points. Les affixes proposées suggèrent d'essayer $y = 1 + i$.

$$|a - y| = |3 + i - 1 - i| = |2| = 2.$$

$$|b - y| = |1 + 3i - 1 - i| = |2i| = 2 \checkmark.$$

$$|c - y| = |-1 + i - 1 - i| = |-2| = 2 \checkmark.$$

$$|d - y| = |1 - i - 1 - i| = |-2i| = 2 \checkmark.$$

Les quatre points sont donc sur le cercle de centre $\Gamma(1 + i)$ et de rayon 2. Ils en sont même les quatre « points cardinaux ».

Calculons le birapport. $c - a = (-1 + i) - (3 + i) = -4$ et $c - b = (-1 + i) - (1 + 3i) = -2 - 2i$.

$$\text{Premier rapport : } \frac{c - a}{c - b} = \frac{-4}{-2 - 2i} = \frac{2}{1 + i} = \frac{2(1 - i)}{2} = 1 - i.$$

$$\text{Ensuite } d - a = (1 - i) - (3 + i) = -2 - 2i \text{ et } d - b = (1 - i) - (1 + 3i) = -4i.$$

$$\text{Second rapport : } \frac{d - a}{d - b} = \frac{-2 - 2i}{-4i} = \frac{1 + i}{2i} = \frac{(1 + i)(-i)}{2} = \frac{-i + 1}{2} = \frac{1 - i}{2}.$$

Birapport : $\frac{1 - i}{\frac{1 - i}{2}} = 2$. C'est un réel $\checkmark$, conformément à la cocyclicité établie à la question 1.

Pour $E(2 + 3i)$, le plus rapide est de tester la distance au centre :

$$|e - y| = |2 + 3i - 1 - i| = |1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

Or $\sqrt{5} \approx 2,24 \neq 2$: le point E n'est PAS sur le cercle.

Contrôle par le birapport de A, B, C, E : $e - a = -1 + 2i$ et $e - b = 1$, donc $\frac{e - a}{e - b} = -1 + 2i$.

Le birapport vaut alors $\frac{1 - i}{-1 + 2i} = \frac{(1 - i)(-1 - 2i)}{1 + 4} = \frac{-1 - 2i + i + 2i^2}{5} = \frac{-3 - i}{5}$, dont la partie imaginaire n'est pas nulle $\checkmark$: les quatre points ne sont ni alignés ni cocycliques.

Réponse. Les quatre points sont sur le cercle de centre $1 + i$ et de rayon 2 · leur birapport vaut 2, qui est réel · $E(2 + 3i)$ est à distance $\sqrt{5}$ du centre : il n'est pas sur le cercle, et le birapport correspondant vaut $\frac{-3 - i}{5}$, non réel.

Rappel de cours. Birapport réel $\Leftrightarrow$ les quatre points sont alignés ou cocycliques. C'est la version « complexe » du théorème de l'angle inscrit : deux points voient le segment $[AB]$ sous le même angle modulo π .

Erreur fréquente. Conclure « cocycliques » sans écarter le cas aligné. Le critère ne distingue pas les deux : une droite est, pour ce critère, un cercle de rayon infini.

Correction de l'exercice 14 - Construire un carré sur un segment

Dans le carré direct $ABCD$, le sommet C s'obtient à partir de A par un quart de tour autour de B . Pour que le parcours $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ soit direct, la rotation est d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On écrit donc $c = -i(a - b) + b$.

$$\text{Calcul : } a - b = (1 + i) - (4 + 2i) = -3 - i.$$

$$\text{Puis } -i(-3 - i) = 3i + i^2 = -1 + 3i.$$

$$\text{Enfin } c = (-1 + 3i) + (4 + 2i) = 3 + 5i.$$

Pour D , on utilise la propriété du parallélogramme : dans le carré $ABCD$, $\overline{AB} = \overline{DC}$, donc

$$b - a = c - d.$$

$$\text{D'où } d = c - b + a = (3 + 5i) - (4 + 2i) + (1 + i) = 4i.$$

Vérification. Les quatre côtés : $AB = |3 + i| = \sqrt{10}$; $BC = |c - b| = |-1 + 3i| = \sqrt{10}$ ✓.

$$CD = |d - c| = |-3 - i| = \sqrt{10}$$
 ✓ ; $DA = |a - d| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$ ✓.

$$\text{L'angle en } A : \frac{d - a}{b - a} = \frac{-1 + 3i}{3 + i} = \frac{(-1 + 3i)(3 - i)}{10} = \frac{-3 + i + 9i + 3}{10} = i, \text{ imaginaire pur } \checkmark.$$

Quatre côtés égaux et un angle droit : $ABCD$ est bien un carré, de côté $\sqrt{10}$.

Contrôle des diagonales : $AC = |c - a| = |2 + 4i| = \sqrt{20}$ et $BD = |d - b| = |-4 + 2i| = \sqrt{20}$ ✓ — égales, et valant $\sqrt{2}$ fois le côté.

Remarque : en prenant la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$, on obtiendrait l'autre carré de côté $[AB]$, symétrique du premier par rapport à la droite (AB) . Le mot « direct » est ce qui lève l'ambiguïté.

Réponse. $c = -i(a - b) + b = 3 + 5i$ · $d = c - b + a = 4i$ · les quatre côtés valent $\sqrt{10}$ et l'angle en A est droit : $ABCD$ est un carré.

Rappel de cours. Un quart de tour se traduit par une multiplication par i (sens direct) ou $-i$ (sens indirect). Pour compléter un parallélogramme, on utilise ensuite $d = c - b + a$.

Erreur fréquente. Prendre le mauvais sens de rotation. Il donne l'autre carré, correct géométriquement mais indirect : l'énoncé impose l'orientation.

Correction de l'exercice 15 - Intersection de deux ensembles de points

La condition $|z| = 2$ s'écrit $OM = 2$: M est sur le CERCLE de centre O et de rayon 2.

La condition $|z - 1| = |z - i|$ s'écrit $AM = BM$ avec $A(1)$ et $B(i)$: M est sur la MÉDIATRICE de $[AB]$.

Un cercle et une droite se coupent en 0, 1 ou 2 points : on s'attend donc à au plus deux solutions.

Équation de la médiatrice. On pose $z = x + iy$ et on élève au carré (les deux membres sont positifs) : $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2$.

$$\text{On développe : } x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1.$$

Les termes x^2 , y^2 et 1 se simplifient : $-2x = -2y$, soit $y = x$.

La médiatrice de $[AB]$ est donc la première bissectrice, d'équation $y = x$ — ce qui est cohérent, $A(1; 0)$ et $B(0; 1)$ étant symétriques par rapport à cette droite.

$$\text{Système : } x^2 + y^2 = 4 \text{ et } y = x.$$

$$\text{En substituant : } x^2 + x^2 = 4, \text{ soit } 2x^2 = 4 \text{ et } x^2 = 2.$$

$$\text{D'où } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}, \text{ et comme } y = x, \text{ les deux points ont pour affixes } \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

$$\text{Vérification du module : } |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = \sqrt{2 + 2} = 2 \checkmark.$$

$$\text{Vérification de l'équidistance : } |\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 1| = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 + 2} \text{ et}$$

$$|\sqrt{2} + i\sqrt{2} - i| = \sqrt{2 + (\sqrt{2} - 1)^2} : \text{les deux expressions sont identiques } \checkmark.$$

Lecture en forme exponentielle : ces deux points sont $2e^{i\pi/4}$ et $2e^{-3i\pi/4}$, diamétralement opposés sur le cercle — logique, puisque la médiatrice passe par le centre O (car $OA = OB = 1$).

Réponse. $|z| = 2$: cercle de centre O et de rayon 2 · $|z - 1| = |z - i|$: médiatrice de $[AB]$,

d'équation $y = x$ · intersection : les points d'affixes $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, soit $2e^{i\pi/4}$ et $2e^{-3i\pi/4}$.

Rappel de cours. On traduit chaque condition séparément (cercle, droite, demi-droite), puis on résout le système en coordonnées. Le nombre de solutions attendu se devine sur la figure avant tout calcul.

Erreur fréquente. Élever au carré sans vérifier que les deux membres sont positifs. Ici ce sont des modules, donc c'est licite et l'équivalence est conservée.

Correction de l'exercice 16 - Lieu d'un point lié

On exprime z : de $z' = 2iz - 1$ on tire $2iz = z' + 1$, donc $z = \frac{z' + 1}{2i}$.

La condition $|z - 1| = 2$ devient $\left| \frac{z' + 1}{2i} - 1 \right| = 2$.

On met au même dénominateur : $\left| \frac{z' + 1 - 2i}{2i} \right| = 2$, soit $\frac{|z' + 1 - 2i|}{2} = 2$.

Donc $|z' - (-1 + 2i)| = 4$: le lieu de M' est le cercle de centre le point d'affixe $-1 + 2i$ et de rayon 4.

Seconde méthode. $z' = 2iz - 1$ est une similitude directe de rapport $|2i| = 2$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

L'image du centre $A(1)$ est $2i \times 1 - 1 = -1 + 2i$, et le rayon est multiplié par le rapport : $2 \times 2 = 4$.

On retrouve exactement le même cercle ✓. La seconde méthode est plus rapide, mais elle suppose de reconnaître la transformation.

Troisième question : M décrit la droite d'équation $x = 3$, c'est-à-dire $\operatorname{Re}(z) = 3$.

Posons $z' = X + iY$. Alors $z = \frac{z' + 1}{2i} = \frac{(X + 1) + iY}{2i}$.

On multiplie haut et bas par $-i$: $z = \frac{-i[(X + 1) + iY]}{2} = \frac{Y - i(X + 1)}{2}$.

Donc $\operatorname{Re}(z) = \frac{Y}{2}$, et la condition $\operatorname{Re}(z) = 3$ devient $\frac{Y}{2} = 3$, soit $Y = 6$.

Le lieu de M' est la droite d'équation $y = 6$, horizontale.

C'est cohérent : une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme une droite verticale en droite horizontale. Contrôle sur un point : $M(3)$ a pour image $2i \times 3 - 1 = -1 + 6i$, qui vérifie bien $Y = 6$ ✓.

Réponse. Le lieu est le cercle de centre $-1 + 2i$ et de rayon 4 · confirmé par la similitude de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, qui envoie $A(1)$ sur $-1 + 2i$ · si M décrit $x = 3$, alors M' décrit la droite $y = 6$.

Rappel de cours. Méthode du lieu : exprimer z en fonction de z' , reporter dans la condition, puis interpréter. Une similitude transforme un cercle en cercle et une droite en droite.

Erreur fréquente. Reporter z' dans la condition sans avoir inversé la relation. C'est bien z — le point qui décrit la courbe connue — qu'il faut remplacer.

Correction de l'exercice 17 - Cercle d'Apollonius

La condition s'écrit $AM = 2BM$: le point M est deux fois plus loin de A que de B .

Prévision : les points cherchés sont donc « du côté de B », c'est-à-dire dans le demi-plan des abscisses négatives, plus près de $B(-1)$ que de $A(1)$.

Posons $z = x + iy$. La condition $|z - 1| = 2|z + 1|$ s'écrit, après élévation au carré (licite, les

deux membres étant positifs) : $(x - 1)^2 + y^2 = 4[(x + 1)^2 + y^2]$.

On développe : $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2) = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$.

On regroupe tout à droite : $0 = 3x^2 + 10x + 3 + 3y^2$.

On divise par 3 : $x^2 + y^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$.

Les termes x^2 et y^2 ne se sont PAS simplifiés — contrairement au cas du rapport 1 : c'est ce qui fait apparaître un cercle au lieu d'une droite.

Mise sous forme canonique : $x^2 + \frac{10}{3}x = \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}$.

L'équation devient $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + y^2 + 1 = 0$, soit $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}$.

E est donc le CERCLE de centre le point d'affixe $-\frac{5}{3}$ et de rayon $\frac{4}{3}$: c'est le cercle d'Apollonius associé à A , B et au rapport 2.

Le centre est bien du côté des abscisses négatives, conformément à la prévision ✓.

Points sur l'axe des réels : on fait $y = 0$, d'où $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, donc $x + \frac{5}{3} = \pm \frac{4}{3}$.

Cela donne $x = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{5}{3} - \frac{4}{3} = -3$.

Vérification pour $x = -\frac{1}{3}$: $AM = \left| -\frac{1}{3} - 1 \right| = \frac{4}{3}$ et $BM = \left| -\frac{1}{3} + 1 \right| = \frac{2}{3}$. On a bien $\frac{4}{3} = 2 \times \frac{2}{3}$ ✓.

Vérification pour $x = -3$: $AM = |-3 - 1| = 4$ et $BM = |-3 + 1| = 2$, et $4 = 2 \times 2$ ✓.

Ces deux points sont les pieds des bissectrices intérieure et extérieure issues du sommet du rapport : ils sont diamétralement opposés sur le cercle, ce qui fournit une construction géométrique de E .

Réponse. La condition s'écrit $AM = 2BM \cdot E$ a pour équation $\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$: c'est le cercle de centre $-\frac{5}{3}$ et de rayon $\frac{4}{3}$: ses points de l'axe des réels sont $-\frac{1}{3}$ et -3 .

Rappel de cours. $\frac{MA}{MB} = k$: si $k = 1$, on obtient la médiatrice ; si $k \neq 1$, on obtient un CERCLE, dit cercle d'Apollonius. La différence tient à la non-simplification des termes en x^2 et y^2 .

Erreur fréquente. Écrire $|z - 1| = 2|z + 1|$ puis « simplifier » en $z - 1 = 2(z + 1)$. Une égalité de modules n'est pas une égalité de nombres : elle donne une infinité de points, pas un seul.

Correction de l'exercice 18 - Deux carrés construits sur un triangle

Le milieu I de $[BC]$ a pour affixe $z_I = \frac{b+c}{2}$.

Premier calcul : $p - z_I = \frac{a+b}{2} + \frac{i}{2}(b-a) - \frac{b+c}{2}$.

Les deux demi-sommes se combinent : $\frac{a+b-b-c}{2} = \frac{a-c}{2}$.

Donc $p - z_I = \frac{a-c}{2} + \frac{i}{2}(b-a)$.

Second calcul : $q - z_I = \frac{a+c}{2} - \frac{i}{2}(c-a) - \frac{b+c}{2} = \frac{a-b}{2} - \frac{i}{2}(c-a)$.

Comparons maintenant. Calculons $-i(q - z_I) = -i\left[\frac{a-b}{2} - \frac{i}{2}(c-a)\right]$.

On distribue : $-i \times \frac{a-b}{2} = \frac{i(b-a)}{2}$, et $-i \times \left(-\frac{i}{2}(c-a)\right) = \frac{i^2}{2}(c-a) = -\frac{c-a}{2} = \frac{a-c}{2}$.

En sommant : $-i(q - z_I) = \frac{a-c}{2} + \frac{i}{2}(b-a)$.

C'est exactement l'expression de $p - z_I$ trouvée plus haut. L'égalité $p - z_I = -i(q - z_I)$ est démontrée.

Conclusion. En prenant les modules : $|p - z_I| = |-i| \times |q - z_I| = |q - z_I|$, c'est-à-dire $IP = IQ$.

En prenant les arguments : $\frac{p - z_I}{q - z_I} = -i$, imaginaire pur, donc l'angle $(\overrightarrow{IQ}; \overrightarrow{IP})$ vaut $-\frac{\pi}{2}$: les droites (IP) et (IQ) sont perpendiculaires.

Le résultat vaut pour TOUT triangle : le calcul n'a utilisé aucune propriété particulière de a, b, c .

Vérification numérique avec $a = 0, b = 4, c = 1 + 3i$. Milieu : $z_I = \frac{4 + 1 + 3i}{2} = \frac{5 + 3i}{2}$.

$$p = \frac{0+4}{2} + \frac{i}{2}(4-0) = 2 + 2i.$$

$$q = \frac{0+1+3i}{2} - \frac{i}{2}(1+3i) = \frac{1+3i}{2} - \frac{i+3i^2}{2} = \frac{1+3i-i+3}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2 + i.$$

$$p - z_I = 2 + 2i - \frac{5+3i}{2} = \frac{4+4i-5-3i}{2} = \frac{-1+i}{2}, \text{ de module } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$q - z_I = 2 + i - \frac{5+3i}{2} = \frac{4+2i-5-3i}{2} = \frac{-1-i}{2}, \text{ de module } \frac{\sqrt{2}}{2} \checkmark - \text{ les deux distances sont bien égales.}$$

Et $-i \times \frac{-1-i}{2} = \frac{i+i^2}{2} = \frac{-1+i}{2} \checkmark$: la relation est vérifiée sur cet exemple.

Réponse. $p - z_I = \frac{a-c}{2} + \frac{i}{2}(b-a)$ et $q - z_I = \frac{a-b}{2} - \frac{i}{2}(c-a)$ · $p - z_I = -i(q - z_I)$ · donc $IP = IQ$ et $(IP) \perp (IQ)$, pour tout triangle ABC .

Rappel de cours. Une égalité de la forme $u = -iv$ (ou $u = iv$) dit deux choses d'un coup : les longueurs sont égales (module 1) et les directions sont perpendiculaires (argument $\pm\frac{\pi}{2}$). C'est l'outil des configurations « égal et perpendiculaire ».

Erreur fréquente. Vérifier uniquement sur un triangle particulier. Ce serait un contrôle, pas une démonstration : seul le calcul littéral établit le théorème.

Correction de l'exercice 19 - Problème de synthèse : une similitude et ses itérées

Point invariant : $\omega = (1-i)\omega + 2i$, soit $\omega - (1-i)\omega = 2i$, c'est-à-dire $\omega(1-1+i) = 2i$, donc $i\omega = 2i$ et $\omega = 2$.

Contrôle : $(1-i) \times 2 + 2i = 2 - 2i + 2i = 2 \checkmark$.

Le coefficient $1-i$ a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $-\frac{\pi}{4}$.

s est donc la similitude directe de centre $\Omega(2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Calcul des premiers termes. $a_0 = 0$, donc $a_1 = (1-i) \times 0 + 2i = 2i$.

$$a_2 = (1-i)(2i) + 2i = 2i - 2i^2 + 2i = 2i + 2 + 2i = 2 + 4i.$$

$$a_3 = (1-i)(2+4i) + 2i = 2 + 4i - 2i - 4i^2 + 2i = 2 + 4i + 4 = 6 + 4i.$$

Pour la formule générale, on part de la forme réduite : $a_{n+1} - 2 = (1-i)(a_n - 2)$.

La suite $(a_n - 2)$ est donc GÉOMÉTRIQUE de raison $1-i$ et de premier terme

$$a_0 - 2 = -2.$$

$$\text{D'où } a_n - 2 = -2(1 - i)^n.$$

$$\text{Contrôle pour } n = 2 : -2(1 - i)^2 = -2(1 - 2i - 1) = -2 \times (-2i) = 4i, \text{ et } a_2 - 2 = 4i \checkmark.$$

$$\text{Distance : } \Omega A_n = |a_n - 2| = 2|1 - i|^n = 2(\sqrt{2})^n.$$

Les points s'éloignent du centre en tournant d'un huitième de tour dans le sens indirect à chaque étape : c'est une spirale.

$$\text{Cherchons } n \text{ tel que } 2(\sqrt{2})^n > 100, \text{ soit } (\sqrt{2})^n > 50, \text{ c'est-à-dire } 2^{n/2} > 50.$$

$$\text{Par croissance du logarithme : } \frac{n}{2} \ln 2 > \ln 50, \text{ donc } n > \frac{2 \ln 50}{\ln 2} \approx \frac{2 \times 3,912}{0,693} \approx 11,29.$$

$$\text{Le plus petit entier est } n = 12. \text{ Vérification : } 2(\sqrt{2})^{12} = 2 \times 2^6 = 128 > 100 \checkmark, \text{ et}$$

$$2(\sqrt{2})^{11} = 2 \times 2^{5,5} \approx 90,5 < 100 \checkmark.$$

Dernière question : A_n est sur la demi-droite $[\Omega A_0)$ lorsque $\arg(a_n - 2) \equiv \arg(a_0 - 2) \pmod{2\pi}$.

$$\text{Or } a_0 - 2 = -2, \text{ d'argument } \pi, \text{ et } \arg(a_n - 2) = \arg(-2) + n \arg(1 - i) = \pi - \frac{n\pi}{4}.$$

$$\text{La condition devient } \pi - \frac{n\pi}{4} \equiv \pi \pmod{2\pi}, \text{ soit } -\frac{n\pi}{4} \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

$$\text{En divisant par } \pi : \frac{n}{4} = 2k, \text{ donc } n = 8k : \text{ les entiers } n \text{ MULTIPLES DE } 8.$$

C'est cohérent avec la géométrie : chaque étape tourne d'un huitième de tour, il en faut donc 8 pour retrouver la direction initiale.

Réponse. Ω a pour affixe 2 ; s est la similitude directe de centre $\Omega(2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$: $a_1 = 2i$, $a_2 = 2 + 4i$, $a_3 = 6 + 4i$; $a_n - 2 = -2(1 - i)^n$ et $\Omega A_n = 2(\sqrt{2})^n$; $n = 12$: $A_n \in [\Omega A_0)$ pour n multiple de 8.

Rappel de cours. Devant une suite définie par $a_{n+1} = f(a_n)$ avec f similitude : on cherche le point fixe ω , et $(a_n - \omega)$ devient géométrique. Distances et angles se lisent alors directement.

Erreur fréquente. Oublier l'argument du premier terme. Ici $a_0 - 2 = -2$ a pour argument π , pas 0 : c'est cette valeur qui sert de référence pour la demi-droite.

Correction de l'exercice 20 - Problème de synthèse : l'application $z \mapsto z^2$

$$\text{Points invariants : } z^2 = z, \text{ soit } z^2 - z = 0, \text{ c'est-à-dire } z(z - 1) = 0.$$

Les points invariants sont donc $O(0)$ et le point d'affixe 1.

$$\text{Deuxième question : si } |z| = 1, \text{ alors } |z'| = |z^2| = |z|^2 = 1.$$

Le point M' reste donc sur le cercle unité. Réciproquement, tout point w du cercle unité est atteint : en écrivant $w = e^{i\alpha}$, le point $z = e^{i\alpha/2}$ convient.

Le lieu de M' est donc le cercle unité TOUT ENTIER. Précision utile : en écrivant $z = e^{i\theta}$, on a $z' = e^{2i\theta}$ — quand M fait un tour, M' en fait deux.

Troisième question : la droite d'équation $x = 1$ est l'ensemble des $z = 1 + it$, avec t réel quelconque.

$$\text{Alors } z' = (1 + it)^2 = 1 + 2it + (it)^2 = 1 - t^2 + 2it.$$

$$\text{En notant } z' = X + iY, \text{ on obtient le système paramétré } X = 1 - t^2 \text{ et } Y = 2t.$$

$$\text{On élimine le paramètre : de la seconde équation, } t = \frac{Y}{2}.$$

En reportant : $X = 1 - \frac{Y^2}{4}$.

Le lieu de M' est donc la PARABOLE d'équation $X = 1 - \frac{Y^2}{4}$, d'axe horizontal, de sommet le point $(1; 0)$ et tournée vers les X décroissants.

Contrôle sur deux points : $t = 0$ donne $z = 1$ et $z' = 1$, soit $(1; 0)$ — c'est le sommet ✓.
 $t = 2$ donne $z = 1 + 2i$ et $z' = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$, et l'équation donne $1 - \frac{16}{4} = -3$ ✓.

On voit ici que $z \mapsto z^2$ n'est pas une similitude : l'image d'une droite est une courbe.

Quatrième question. O, M, M' sont alignés si et seulement si $\frac{z' - 0}{z - 0}$ est réel (pour $z \neq 0$), c'est-à-dire si $\frac{z^2}{z} = z$ est réel.

Les points cherchés sont donc ceux de l'AXE DES RÉELS, privé de O (pour lequel le quotient n'est pas défini, mais où l'alignement est trivial).

Enfin, M' est le milieu de $[OM]$ lorsque $z' = \frac{0+z}{2}$, c'est-à-dire $z^2 = \frac{z}{2}$.

On résout : $z^2 - \frac{z}{2} = 0$, soit $z\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$, donc $z = 0$ ou $z = \frac{1}{2}$.

Contrôle pour $z = \frac{1}{2}$: $z' = \frac{1}{4}$, et le milieu de $[OM]$ est bien $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ✓.

Le cas $z = 0$ est un point invariant : $M = M' = O$, et le milieu de $[OO]$ est O — la condition est vérifiée, même si la configuration est dégénérée.

Réponse. Points invariants : 0 et 1 · si M décrit le cercle unité, M' le décrit aussi (deux fois plus vite) · si M décrit $x = 1$, M' décrit la parabole $X = 1 - \frac{Y^2}{4}$ · O, M, M' alignés $\Leftrightarrow z$ réel · M' milieu de $[OM]$ $\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = \frac{1}{2}$.

Rappel de cours. $z \mapsto z^2$ élève le module au carré et DOUBLE l'argument. Ce n'est pas une transformation affine : elle préserve les cercles centrés en O , mais transforme les droites en paraboles.

Erreur fréquente. Traiter $z \mapsto z^2$ comme une similitude et chercher un « rapport ». Le rapport local dépend du point : il n'existe pas de coefficient unique.