

Géométrie des nombres complexes — Terminale maths expertes

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Les nombres complexes transforment la géométrie du plan en calcul algébrique : une distance devient un module, un angle devient un argument, une rotation devient une multiplication. Ces 20 exercices corrigés exploitent ce dictionnaire dans les deux sens, sur tout le programme de géométrie de maths expertes : affixes de points et de vecteurs, alignement et orthogonalité par un quotient, nature d'un quadrilatère, transformations du plan — translation, homothétie, rotation, similitude directe — et leurs éléments caractéristiques, composition de transformations, image d'une courbe, ensembles et lieux de points. Les derniers exercices démontrent de vrais théorèmes par le seul calcul sur les affixes : le théorème de Varignon, le cercle d'Apollonius, et une configuration de carrés construits sur les côtés d'un triangle. La difficulté est croissante, et chaque correction est rédigée étape par étape avec ses vérifications.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/geometrie-nombres-complexes

Exercice 1 - Affixes, vecteurs, milieu et alignement

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. On considère les points A , B et C d'affixes $a = 1 + 2i$, $b = 3 + 6i$ et $c = 4 + 8i$.

1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que A , B et C sont alignés.
3. Déterminer l'affixe du milieu I de $[AC]$, et préciser si B est ce milieu.

Exercice 2 - Translation et homothétie

Deux transformations élémentaires se lisent immédiatement sur les affixes : la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe w s'écrit $z' = z + w$, et l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k (réel non nul) s'écrit $z' - \omega = k(z - \omega)$.

1. Déterminer l'image de $A(1 + 2i)$ par la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $2 - i$.
2. Déterminer l'image de $A(1 + 2i)$ par l'homothétie de centre $\Omega(1)$ et de rapport 3.
3. Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(1)$ et de rapport 3, puis ses points invariants.

Exercice 3 - Rotation de centre quelconque

La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α a pour écriture complexe $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$: on se ramène au centre, on tourne, on revient.

1. Déterminer l'image de $A(1 + 2i)$ par la rotation de centre $\Omega(2 - i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
2. Vérifier le résultat par les distances.
3. Donner l'écriture complexe de cette rotation sous la forme $z' = az + b$.

Exercice 4 - Reconnaître une transformation $z' = az + b$

Toute transformation de la forme $z' = az + b$ avec $a \neq 0$ est une SIMILITUDE DIRECTE. Sa nature se lit sur a : $a = 1$ donne une translation, a réel donne une homothétie, $|a| = 1$ donne une rotation, et le cas général une similitude de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

1. Reconnaître $z' = z + 3 - i$ et $z' = 2z - 1$.
2. Reconnaître $z' = iz + 1 + i$.
3. Reconnaître $z' = (1 - i)z + 2i$.

Exercice 5 - Alignement de trois points

Le critère d'alignement par le quotient est le plus rapide, mais il faut savoir l'utiliser dans les deux sens : pour prouver un alignement, et pour prouver qu'il n'y en a pas.

1. Montrer que $A(1 + i)$, $B(4 + 2i)$ et $C(7 + 3i)$ sont alignés.
2. Montrer que $A(1 + i)$, $B(4 + 2i)$ et $D(2 + 5i)$ ne le sont pas.
3. Déterminer le réel t pour que le point $E(t + 4i)$ appartienne à la droite (AB) .

Exercice 6 - Orthogonalité et angle droit

Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque l'angle entre eux vaut $\pm \frac{\pi}{2}$: le quotient de leurs affixes est alors un IMAGINAIRE PUR. On considère $A(1 + i)$, $B(4 + 3i)$ et $C(-1 + 4i)$.

1. Calculer $Z = \frac{c - a}{b - a}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC .
3. Déterminer l'afixe du point D tel que $ABDC$ soit un rectangle.

Exercice 7 - Nature d'un quadrilatère

On considère $A(1 + i)$, $B(4 + 2i)$, $C(3 + 5i)$ et $D(4i)$. On veut déterminer la nature exacte du quadrilatère $ABCD$, en enchaînant les critères du plus général au plus précis.

1. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Montrer que deux côtés consécutifs ont la même longueur.
3. Montrer que deux côtés consécutifs sont perpendiculaires, et conclure.

Exercice 8 - Similitude directe : éléments caractéristiques

On considère la transformation s qui, au point $M(z)$, associe M' d'afixe $z' = 2iz + 3 - i$.

1. Déterminer le point invariant Ω de s .
2. Montrer que $z' - \omega = 2i(z - \omega)$, et en déduire la nature de s .
3. Déterminer l'image du point $A(3)$, puis vérifier les éléments caractéristiques sur ce point.

Exercice 9 - Composer deux transformations

Composer deux transformations revient à composer leurs écritures complexes. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et t la translation de vecteur d'affixe 2.

1. Donner l'écriture complexe de $t \circ r$ (d'abord r , puis t).
2. Reconnaître cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
3. Donner l'écriture complexe de $r \circ t$, et comparer avec la précédente.

Exercice 10 - Image d'un cercle par une similitude

Une similitude de rapport k multiplie toutes les distances par k : elle transforme donc un cercle en un cercle. Encore faut-il savoir calculer le centre et le rayon de l'image. Le point $M(z)$ décrit le cercle C de centre O et de rayon 2, et M' a pour affixe $z' = (1 + i)z + 3$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation.
2. Déterminer le lieu du point M' .
3. Reprendre la question avec C de centre $A(1)$ et de rayon 2, et $z' = 2iz - 1$.

Exercice 11 - Caractériser un triangle équilatéral

Un triangle ABC est équilatéral DIRECT lorsque C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On en tire une caractérisation entièrement algébrique.

1. Traduire cette définition par une relation entre a , b et c .
2. Application : $A(0)$ et $B(2)$. Déterminer l'affixe de C pour que ABC soit équilatéral direct, et vérifier les trois longueurs.
3. Démontrer que si ABC est équilatéral direct, alors $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice 12 - Théorème de Varignon

Voici un théorème simple à énoncer et pénible à démontrer sans outil : dans un quadrilatère QUELCONQUE, les milieux des quatre côtés forment toujours un parallélogramme. Avec les affixes, la démonstration tient en trois lignes. Soit $PQRS$ un quadrilatère d'affixes p, q, r, s , et M_1, M_2, M_3, M_4 les milieux respectifs de $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$ et $[SP]$.

1. Exprimer les affixes des quatre milieux.
2. Démontrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme.
3. Vérifier sur l'exemple $P(1 + i)$, $Q(5 + 2i)$, $R(4 + 6i)$, $S(-1 + 4i)$.

Exercice 13 - Points alignés ou cocycliques

Quatre points distincts A, B, C, D sont alignés ou cocycliques (sur un même cercle) si et seulement si leur BIRAPPORT $\left[\frac{c-a}{c-b} \right] \div \left[\frac{d-a}{d-b} \right]$ est un nombre réel. C'est la traduction du théorème de l'angle inscrit : $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB})$ modulo π .

1. On pose $A(3 + i)$, $B(1 + 3i)$, $C(-1 + i)$ et $D(1 - i)$. Vérifier que ces quatre points sont sur un même cercle, en déterminant son centre et son rayon.

2. Calculer le birapport de ces quatre points et vérifier qu'il est réel.
3. Le point $E(2 + 3i)$ est-il sur ce cercle ?

Exercice 14 - Construire un carré sur un segment

On veut construire le carré $ABCD$ direct de côté $[AB]$, avec $A(1 + i)$ et $B(4 + 2i)$. « Direct » signifie que les sommets A, B, C, D se suivent dans le sens trigonométrique.

1. Exprimer c à l'aide d'une rotation de centre B , puis calculer son affixe.
2. En déduire l'affixe de D .
3. Vérifier que $ABCD$ est bien un carré.

Exercice 15 - Intersection de deux ensembles de points

Quand deux conditions portent simultanément sur z , on traduit chacune en un objet géométrique, puis on cherche l'intersection. On cherche les points $M(z)$ vérifiant à la fois $|z| = 2$ et $|z - 1| = |z - i|$.

1. Interpréter géométriquement chacune des deux conditions.
2. Déterminer une équation cartésienne de la seconde.
3. Résoudre le système et donner les affixes des points cherchés.

Exercice 16 - Lieu d'un point lié

Lorsqu'un point M décrit une courbe et qu'un point M' lui est lié par une relation, on cherche la courbe décrite par M' . La méthode est toujours la même : exprimer z en fonction de z' , puis reporter dans la condition initiale. Ici, M décrit le cercle de centre $A(1)$ et de rayon 2, et $z' = 2iz - 1$.

1. Déterminer le lieu de M' .
2. Retrouver le résultat par les éléments caractéristiques de la transformation.
3. Même question si M décrit la droite d'équation $x = 3$.

Exercice 17 - Cercle d'Apollonius

On connaît l'ensemble des points équidistants de A et B : c'est la médiatrice. Mais que devient cet ensemble si l'on impose un RAPPORT de distances différent de 1 ? On étudie l'ensemble E des points $M(z)$ tels que $|z - 1| = 2|z + 1|$, avec $A(1)$ et $B(-1)$.

1. Traduire la condition en termes de distances, et prévoir la position approximative de l'ensemble.
2. Déterminer une équation cartésienne de E , puis reconnaître cet ensemble.
3. Déterminer les points de E situés sur l'axe des réels, et vérifier.

Exercice 18 - Deux carrés construits sur un triangle

Soit ABC un triangle quelconque, d'affixes a, b, c . On construit deux carrés vers l'extérieur, l'un sur $[AB]$ de centre P , l'autre sur $[AC]$ de centre Q . On admet que leurs centres ont pour affixes $p = \frac{a+b}{2} + \frac{i}{2}(b-a)$ et $q = \frac{a+c}{2} - \frac{i}{2}(c-a)$. Soit enfin I

le milieu de $[BC]$. On va démontrer que $IP = IQ$ et $(IP) \perp (IQ)$, quel que soit le triangle.

1. Exprimer $p - z_I$ et $q - z_I$ en fonction de a, b, c .
2. Démontrer que $p - z_I = -i(q - z_I)$.
3. Conclure, puis vérifier sur le triangle $A(0), B(4), C(1 + 3i)$.

Exercice 19 - Problème de synthèse : une similitude et ses itérées

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. On considère la transformation s définie par $z' = (1 - i)z + 2i$. On pose A_0 le point d'affixe 0 et, pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = s(A_n)$. On note a_n l'affixe de A_n .

1. Déterminer le point invariant Ω de s , puis la nature et les éléments caractéristiques de s .
2. Calculer a_1, a_2 et a_3 .
3. Montrer que $a_n - 2 = -2(1 - i)^n$, puis exprimer ΩA_n .
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega A_n > 100$, puis les entiers n pour lesquels A_n appartient à la demi-droite $[\Omega A_0]$.

Exercice 20 - Problème de synthèse : l'application $z \mapsto z^2$

À tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = z^2$. Ce n'est PAS une similitude : les distances ne sont pas multipliées par un facteur constant, et les images de droites ne sont plus des droites. On étudie cette application sur plusieurs courbes.

1. Déterminer les points invariants.
2. Déterminer le lieu de M' lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1.
3. Déterminer le lieu de M' lorsque M décrit la droite d'équation $x = 1$.
4. Déterminer les points M pour lesquels O, M et M' sont alignés, puis ceux pour lesquels M' est le milieu de $[OM]$.