

Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une matrice est un tableau de nombres qu'on additionne, qu'on multiplie et parfois qu'on inverse — mais dont le produit obéit à des règles inhabituelles : il n'est pas commutatif, et deux matrices non nulles peuvent avoir un produit nul. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout le chapitre en maths expertes : somme et produit par un réel, produit matriciel et ses pièges, matrice identité, puissances d'une matrice, déterminant et condition d'inversibilité, inverse d'une matrice 2×2 puis 3×3 , résolution de systèmes linéaires par la matrice inverse, polynôme annulateur, matrices qui commutent, et calcul de A^n par récurrence, par le binôme de Newton avec une matrice nilpotente, puis par diagonalisation. Les applications finales — suites couplées, suite de Fibonacci, modèle d'évolution — montrent à quoi sert vraiment cette machinerie. Chaque correction est rédigée pas à pas, produit par produit, avec vérification.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/matrices-operations-inverse

Exercice 1 - Somme, produit par un réel, égalité

Une matrice de format $n \times p$ a n lignes et p colonnes. La somme et le produit par un réel s'effectuent COEFFICIENT PAR COEFFICIENT, et n'ont de sens qu'entre matrices de même format. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A + B$ et $3A$.

2. Calculer $A - 2B$.

3. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 - Le produit matriciel

Le produit AB n'a de sens que si le nombre de COLONNES de A égale le nombre de LIGNES de B . Le coefficient de la ligne i et de la colonne j du produit s'obtient en combinant la ligne i de A avec la colonne j de B . On reprend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB .

2. Calculer BA et comparer avec AB .

3. Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 - Les pièges du produit matriciel

Le calcul matriciel ressemble au calcul sur les réels, mais deux propriétés familières tombent : la commutativité, et l'implication « produit nul donc un facteur nul ».

1. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Que constate-t-on ?
2. En déduire qu'on ne peut pas « simplifier » une égalité matricielle par un facteur.
3. Développer $(A + B)^2$ pour deux matrices carrées quelconques.

Exercice 4 - Matrice identité et premières puissances

La matrice identité $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ joue le rôle du nombre 1 : elle est neutre pour le produit, et elle commute avec toutes les matrices carrées de même format.

1. Vérifier que $AI_2 = I_2A = A$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer A^2 et A^3 .
3. Calculer D^n pour $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 - Puissances d'une matrice triangulaire

Certaines matrices ont des puissances remarquablement simples. On étudie $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 . Que dire de N^k pour $k \geq 2$?
2. Calculer T^2 , T^3 , puis conjecturer T^n .
3. Démontrer la conjecture par récurrence.

Exercice 6 - Déterminant et inversibilité

Une matrice carrée A est INVERSIBLE s'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Pour une matrice 2×2 , tout se lit sur un seul nombre : le déterminant $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

1. Calculer les déterminants de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Lesquelles sont inversibles ?
3. Pour quelles valeurs de m la matrice $M = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & m-1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 7 - Inverse d'une matrice 2×2

Lorsque $\det A = ad - bc \neq 0$, l'inverse s'obtient par une formule :

$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ — on échange les termes de la diagonale principale, on change le signe des deux autres, et on divise par le déterminant.

1. Déterminer l'inverse de $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et vérifier.
2. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Démontrer la formule dans le cas général.

Exercice 8 - Résoudre un système par la matrice inverse

Un système linéaire s'écrit matriciellement $AX = B$. Si A est inversible, la solution est unique et vaut $X = A^{-1}B$. On résout $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

1. Écrire le système sous forme matricielle.
2. Résoudre à l'aide de la matrice inverse.
3. Que se passerait-il si la matrice du système n'était pas inversible ?

Exercice 9 - Équations matricielles

Résoudre une équation matricielle demande de manipuler les produits en respectant l'ordre, et de n'utiliser l'inverse que là où il existe. On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d'inconnue X matrice 2×2 .
2. Résoudre $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Comparer avec la question précédente.
3. Résoudre $AX + 2X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 - Conjecturer et démontrer une puissance

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et l'on cherche une expression de A^n valable pour tout entier $n \geq 1$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Conjecturer une expression de A^n .
3. Démontrer la conjecture par récurrence.

Exercice 11 - Polynôme annulateur et inverse

Une relation du type $A^2 = \alpha A + \beta I$ s'appelle un polynôme annulateur : elle permet à la fois de calculer les puissances et d'obtenir l'inverse sans passer par le déterminant.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 7A - 10I_2$.

2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
3. Vérifier le résultat par la formule du déterminant.

Exercice 12 - Matrices qui commutent

Le produit n'étant pas commutatif, il est naturel de chercher quelles matrices commutent avec une matrice donnée. On cherche toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $TM = MT$, avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer TM et MT en fonction de a, b, c, d .
2. Résoudre l'équation $TM = MT$.
3. Vérifier sur un exemple, et donner une matrice qui NE commute PAS avec T .

Exercice 13 - Inverse d'une matrice 3×3

Au-delà du format 2×2 , il n'y a plus de formule simple à retenir : on vérifie un inverse proposé, ou on le cherche en résolvant un système. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que B est l'inverse de A .
2. En déduire la solution du système $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y + 4z = 2 \\ 5x + 6y = 3 \end{cases}$
3. Vérifier la solution dans le système.

Exercice 14 - Suite couplée et matrices

Deux suites qui se déterminent l'une l'autre s'écrivent naturellement sous forme matricielle. On considère $u_0 = 1, v_0 = 0$ et, pour tout n , $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$

1. Écrire le système sous la forme $X_{n+1} = AX_n$, puis exprimer X_n en fonction de A, n et X_0 .
2. Étudier les suites $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$.
3. En déduire les expressions de u_n et v_n , puis vérifier pour $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice 15 - Binôme de Newton avec une matrice nilpotente

Quand une matrice s'écrit $A = I + N$ avec N nilpotente, le binôme de Newton s'applique — car I commute avec tout — et la somme s'arrête très vite. On pose

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = I_3 + N.$$

1. Calculer N^2 et N^3 .
2. Justifier que le binôme de Newton s'applique à $A^n = (I_3 + N)^n$.
3. En déduire A^n pour $n \geq 2$, et vérifier pour $n = 2$.

Exercice 16 - Diagonalisation et puissances n-ièmes

La méthode générale pour calculer A^n consiste à écrire $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. On reprend $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1} .
2. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$, puis calculer A^n .

Exercice 17 - Fibonacci en matrices

La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$.
2. Démontrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.
3. En déduire l'identité $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 18 - Problème type bac : un modèle d'évolution

Deux villes A et B se partagent une population totale constante de 100 000 habitants. Chaque année, 10 % des habitants de A partent vers B , et 20 % des habitants de B partent vers A . Au départ, A compte 60 000 habitants et B en compte 40 000. On note a_n et b_n les effectifs après n années.

1. Écrire le système donnant a_{n+1} et b_{n+1} , puis la matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$.
2. Calculer X_1 et X_2 .
3. Déterminer l'état stable, c'est-à-dire le vecteur X tel que $MX = X$ avec $a + b = 100\,000$.
4. Vérifier que la population totale est bien constante.

Exercice 19 - Problème de synthèse : de la matrice à la formule explicite

On considère les suites définies par $u_0 = 3$, $v_0 = 1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 3v_n \end{cases}$. Le problème enchaîne les trois techniques du chapitre : écriture matricielle, diagonalisation, puis retour aux suites.

1. Écrire $X_{n+1} = AX_n$ et calculer X_1 , X_2 .
2. Montrer que $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$ sont géométriques, et donner leurs

expressions.

3. En déduire u_n et v_n , puis A^n .

4. Déterminer la limite de $\frac{u_n}{v_n}$.

Exercice 20 - La matrice d'un quart de tour, un « i » matriciel

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de la rotation d'un quart de tour.

1. Calculer J^2 , J^3 et J^4 . Interpréter géométriquement.

2. En déduire que J est inversible et donner J^{-1} .

3. Calculer J^{2026} .

4. On pose $M = I_2 + J$. Calculer M^2 , puis M^8 . Quel lien avec le nombre complexe $1 + i$?

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Somme, produit par un réel, égalité

Les deux matrices sont de format 2×2 : la somme est définie, et se fait terme à terme.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+(-1) \\ 3+2 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pour $3A$, on multiplie CHAQUE coefficient par 3 : $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$

Pour $A - 2B$, on calcule d'abord $2B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$

Puis $A - 2B = \begin{pmatrix} 1-0 & 2-(-2) \\ 3-4 & 4-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}.$

Attention au signe sur le coefficient -2 : $2 - (-2) = 4$, et non 0.

Troisième question : deux matrices sont égales lorsqu'elles ont le même format ET les mêmes coefficients, un par un.

L'égalité impose donc $x + 1 = 5$ et $y - 4 = 1$, les autres coefficients étant déjà identiques.

On résout : $x = 4$ et $y = 5$.

Vérification : $\begin{pmatrix} 4+1 & 2 \\ 3 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \checkmark.$

Réponse. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \cdot A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot x = 4 \text{ et } y = 5.$

Rappel de cours. Somme et produit par un réel : coefficient par coefficient, entre matrices de MÊME FORMAT. Égalité de matrices : même format et tous les coefficients égaux — soit autant d'équations que de cases.

Erreur fréquente. Additionner des matrices de formats différents. Une matrice 2×3 et une matrice 3×2 ne s'additionnent pas, même si elles ont le même nombre de coefficients.

Correction de l'exercice 2 - Le produit matriciel

Coefficient en haut à gauche de AB : ligne 1 de A avec colonne 1 de B , soit $1 \times 0 + 2 \times 2 = 4.$

Coefficient en haut à droite : ligne 1 de A avec colonne 2 de B , soit $1 \times (-1) + 2 \times 5 = -1 + 10 = 9.$

Coefficient en bas à gauche : ligne 2 de A avec colonne 1 de B , soit $3 \times 0 + 4 \times 2 = 8.$

Coefficient en bas à droite : $3 \times (-1) + 4 \times 5 = -3 + 20 = 17.$

Donc $AB = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}.$

Calculons maintenant BA , en changeant l'ordre. Coefficient en haut à gauche : ligne 1 de B avec colonne 1 de A , soit $0 \times 1 + (-1) \times 3 = -3.$

Haut à droite : $0 \times 2 + (-1) \times 4 = -4.$

Bas à gauche : $2 \times 1 + 5 \times 3 = 17.$ Bas à droite : $2 \times 2 + 5 \times 4 = 24.$

$$\text{Donc } BA = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 17 & 24 \end{pmatrix}.$$

Les deux résultats sont DIFFÉRENTS : le produit matriciel n'est pas commutatif. C'est la première règle à intégrer, et la source de la plupart des erreurs du chapitre.

Troisième question : A est de format 2×2 et le vecteur colonne de format 2×1 : le produit est défini, et de format 2×1 .

Première ligne : $1 \times 1 + 2 \times (-1) = -1$. Seconde ligne : $3 \times 1 + 4 \times (-1) = -1$.

$$\text{Donc } A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{Réponse.} AB = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} \cdot BA = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 17 & 24 \end{pmatrix} \neq AB \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Rappel de cours. AB défini si colonnes de A = lignes de B , et le format du produit est (lignes de A) $\times$ (colonnes de B). En général $AB \neq BA$.

Erreur fréquente. Multiplier coefficient par coefficient, comme pour la somme. Le produit matriciel combine une LIGNE avec une COLONNE : c'est une somme de produits.

Correction de l'exercice 3 - Les pièges du produit matriciel

Coefficient en haut à gauche : $1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$.

Haut à droite : $1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$. Bas à gauche : $1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$. Bas à droite : 0 de même.

Le produit vaut donc la matrice NULLE, alors qu'aucun des deux facteurs n'est nul.

Conclusion : dans l'ensemble des matrices, $MN = 0$ n'implique PAS $M = 0$ ou $N = 0$. On dit que ces matrices sont des « diviseurs de zéro ».

Conséquence directe pour la résolution : une équation matricielle $MN = 0$ ne se résout pas en annulant un facteur.

Deuxième question. Supposons $MA = MB$ avec $M \neq 0$. En passant tout à gauche : $M(A - B) = 0$.

On vient de voir qu'un produit nul n'entraîne pas l'annulation d'un facteur : on ne peut donc pas conclure $A - B = 0$, c'est-à-dire $A = B$.

Contre-exemple explicite : avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et B = la matrice nulle, on a $MA = MB = 0$ alors que $A \neq B$.

La simplification n'est autorisée que si M est INVERSIBLE : on multiplie alors par M^{-1} à gauche, ce qui est légitime.

Troisième question : $(A + B)^2 = (A + B)(A + B)$. On développe en respectant l'ORDRE des facteurs.

$$(A + B)(A + B) = A \times A + A \times B + B \times A + B \times B = A^2 + AB + BA + B^2.$$

On ne peut PAS regrouper $AB + BA$ en $2AB$, puisque $AB \neq BA$ en général.

La formule est donc $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, et elle ne se réduit à $A^2 + 2AB + B^2$ que dans le cas particulier où A et B COMMUTENT.

Ce cas particulier n'est pas rare et sera exploité à l'exercice 16 : la matrice identité commute avec tout le monde.

Réponse. Le produit vaut la matrice nulle sans qu'aucun facteur ne le soit · on ne peut donc pas simplifier $MA = MB$ en $A = B$, sauf si M est inversible ·

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Rappel de cours. Trois règles perdues : $AB \neq BA$ · $AB = 0$ n'entraîne pas $A = 0$ ou $B = 0$ · les identités remarquables ne valent que si A et B commutent.

Erreur fréquente. Écrire $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. C'est faux dès que $AB \neq BA$, c'est-à-dire dans le cas général.

Correction de l'exercice 4 - Matrice identité et premières puissances

AI_2 : première ligne, $1 \times 1 + 2 \times 0 = 1$ puis $1 \times 0 + 2 \times 1 = 2$.

Seconde ligne : $3 \times 1 + 4 \times 0 = 3$ puis $3 \times 0 + 4 \times 1 = 4$. On retrouve A ✓.

I_2A : première ligne, $1 \times 1 + 0 \times 3 = 1$ puis $1 \times 2 + 0 \times 4 = 2$; seconde ligne, $0 \times 1 + 1 \times 3 = 3$ puis $0 \times 2 + 1 \times 4 = 4$. On retrouve encore A ✓.

I_2 est donc neutre des deux côtés — c'est l'une des rares matrices qui commute avec toutes les autres.

$A^2 = A \times A$. Haut gauche : $1 \times 1 + 2 \times 3 = 7$. Haut droite : $1 \times 2 + 2 \times 4 = 10$.

Bas gauche : $3 \times 1 + 4 \times 3 = 15$. Bas droite : $3 \times 2 + 4 \times 4 = 22$.

$$\text{Donc } A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

$A^3 = A^2 \times A$. Haut gauche : $7 \times 1 + 10 \times 3 = 37$. Haut droite : $7 \times 2 + 10 \times 4 = 54$.

Bas gauche : $15 \times 1 + 22 \times 3 = 81$. Bas droite : $15 \times 2 + 22 \times 4 = 118$.

Donc $A^3 = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$. On voit que les coefficients explosent : calculer A^{20} ainsi serait déraisonnable.

Pour la matrice DIAGONALE D , le calcul est bien plus simple. $D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

On conjecture $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, ce qui se démontre immédiatement par récurrence : le produit de deux matrices diagonales se fait coefficient par coefficient sur la diagonale.

Cette simplicité des matrices diagonales est exactement ce qu'exploitera la diagonalisation de l'exercice 17.

$$\textbf{Réponse.} AI_2 = I_2A = A \text{ ✓} \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix} \cdot D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Rappel de cours. I est neutre et commute avec tout. Pour une matrice DIAGONALE, les puissances se calculent coefficient par coefficient sur la diagonale — c'est le seul cas vraiment facile.

Erreur fréquente. Élever une matrice quelconque à la puissance n coefficient par coefficient. A^2 vaut $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$, et non $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5 - Puissances d'une matrice triangulaire

$N^2 = N \times N$. Haut gauche : $0 \times 0 + 1 \times 0 = 0$. Haut droite : $0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$.

Bas gauche et bas droite : 0 également, la seconde ligne de N étant nulle.

$$\text{Donc } N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ la matrice nulle.}$$

Par conséquent $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0$ pour tout $k \geq 2$. Une telle matrice, non nulle mais de puissance nulle, est dite NILPOTENTE.

C'est encore une différence avec les réels : aucun réel non nul n'a de puissance nulle.

Passons à T . Haut gauche de T^2 : $1 \times 1 + 1 \times 0 = 1$. Haut droite : $1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$.

Seconde ligne : $0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$ puis $0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$. Donc $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$T^3 = T^2 \times T$: haut droite $1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$, les autres coefficients inchangés. Donc

$$T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conjecture $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: seul le coefficient en haut à droite évolue, et il compte les étapes.

Démonstration par récurrence. INITIALISATION : pour $n = 1$, la formule donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T \checkmark.$$

HÉRÉDITÉ : supposons $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un certain $n \geq 1$.

$$\text{Alors } T^{n+1} = T^n \times T = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haut gauche : $1 \times 1 + n \times 0 = 1$. Haut droite : $1 \times 1 + n \times 1 = n + 1$. Seconde ligne : 0 puis 1.

On obtient $T^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: la formule est vraie au rang $n + 1$.

CONCLUSION : par récurrence, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Lien entre les deux matrices : $T = I_2 + N$, et le lien sera exploité à l'exercice 16 pour retrouver ce résultat par le binôme de Newton.

Réponse. $N^2 = 0$, donc $N^k = 0$ pour $k \geq 2$: N est nilpotente · $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ démontré par récurrence.}$$

Rappel de cours. Méthode standard pour A^n : calculer les premières puissances, CONJECTURER la forme, puis démontrer par récurrence. Une matrice nilpotente vérifie $N^k = 0$ à partir d'un certain rang.

Erreur fréquente. Conclure sans récurrence après trois calculs. Trois cas ne prouvent rien : la rédaction attendue comporte initialisation, hérédité et conclusion.

Correction de l'exercice 6 - Déterminant et inversibilité

$$\det A = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2.$$

$$\det B = 2 \times 2 - 4 \times 1 = 4 - 4 = 0.$$

$$\det C = 3 \times 2 - 5 \times 1 = 6 - 5 = 1.$$

Le critère est : A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

A est donc inversible ($\det = -2 \neq 0$), C aussi ($\det = 1$), mais B ne l'est PAS.

On peut le voir directement sur B : sa première ligne est le double de la seconde, les deux lignes sont « proportionnelles ». C'est toujours le signe d'un déterminant nul.

Conséquence concrète pour B : le système associé n'a pas de solution unique — soit

aucune, soit une infinité.

Troisième question : $\det M = m(m-1) - 3 \times 2 = m^2 - m - 6$.

M est inversible si et seulement si $m^2 - m - 6 \neq 0$.

On résout l'équation $m^2 - m - 6 = 0$: $\Delta = 1 + 24 = 25$, donc $m = \frac{1 \pm 5}{2}$, soit $m = 3$ ou $m = -2$.

M est donc inversible pour tout réel m SAUF $m = 3$ et $m = -2$.

Vérification pour $m = 3$: $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, dont les lignes sont proportionnelles ✓ — non inversible.

Vérification pour $m = -2$: $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, dont la seconde ligne est l'opposée de la première ✓.

Réponse. $\det A = -2$, $\det B = 0$, $\det C = 1$ · A et C sont inversibles, B ne l'est pas · M est inversible pour $m \neq 3$ et $m \neq -2$.

Rappel de cours. $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$, et A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Un déterminant nul signale des lignes (ou colonnes) proportionnelles.

Erreur fréquente. Calculer $ad + bc$. Le déterminant est une DIFFÉRENCE : le produit de la diagonale principale moins celui de l'antidiagonale.

Correction de l'exercice 7 - Inverse d'une matrice 2×2

Pour C , le déterminant vaut $3 \times 2 - 5 \times 1 = 1$ (exercice 6) : le calcul sera particulièrement simple.

On applique la formule : $C^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vérification par CC^{-1} : haut gauche $3 \times 2 + 5 \times (-1) = 1$; haut droite $3 \times (-5) + 5 \times 3 = 0$.

Bas gauche : $1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$; bas droite : $1 \times (-5) + 2 \times 3 = 1$. On obtient bien I_2 ✓.

Vérification dans l'autre sens, $C^{-1}C$: haut gauche $2 \times 3 + (-5) \times 1 = 1$, haut droite $2 \times 5 + (-5) \times 2 = 0$ ✓. Les deux produits donnent I_2 .

Pour A , le déterminant vaut -2 , donc $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Vérification : haut gauche de AA^{-1} vaut $1 \times (-2) + 2 \times \frac{3}{2} = -2 + 3 = 1$ ✓ ; haut droite : $1 \times 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ✓.

Démonstration de la formule. Posons $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et calculons AB .

Haut gauche : $a \times d + b \times (-c) = ad - bc$. Haut droite : $a \times (-b) + b \times a = 0$.

Bas gauche : $c \times d + d \times (-c) = 0$. Bas droite : $c \times (-b) + d \times a = ad - bc$.

Donc $AB = (ad - bc)I_2 = (\det A)I_2$.

Si $\det A \neq 0$, on peut diviser : $A \times \frac{1}{\det A} B = I_2$, ce qui prouve que $\frac{1}{\det A} B$ est bien l'inverse de A .

Le calcul de BA donne le même résultat, ce qui confirme l'inverse des deux côtés.

Réponse. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ · la formule vient de
 $A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$.

Rappel de cours. $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On échange a et d , on change le signe de b et c , on divise par le déterminant. À vérifier toujours par $AA^{-1} = I$.

Erreur fréquente. Changer le signe de a et d au lieu de les échanger. La formule permute la diagonale principale et change le signe de l'antidiagonale — pas l'inverse.

Correction de l'exercice 8 - Résoudre un système par la matrice inverse

On range les coefficients des inconnues dans une matrice, les inconnues dans un vecteur colonne, et les seconds membres dans un autre.

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $CX = B$ avec la matrice C de l'exercice 7.

Contrôle de l'écriture : le produit de la première ligne donne $3x + 5y$ ✓ et celui de la seconde $x + 2y$ ✓.

Comme $\det C = 1 \neq 0$, la matrice est inversible et le système a une SOLUTION UNIQUE, donnée par $X = C^{-1}B$.

On dispose déjà de $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcul : $X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Première ligne : $2 \times 8 + (-5) \times 3 = 16 - 15 = 1$.

Seconde ligne : $(-1) \times 8 + 3 \times 3 = -8 + 9 = 1$.

Donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $x = 1$ et $y = 1$.

Vérification dans le système : $3 \times 1 + 5 \times 1 = 8$ ✓ et $1 + 2 \times 1 = 3$ ✓.

Attention à l'ordre : c'est $X = C^{-1}B$ et non $X = BC^{-1}$, qui n'aurait d'ailleurs pas de sens (formats incompatibles).

Si la matrice n'était pas inversible, son déterminant serait nul et la méthode s'effondrerait. Le système aurait alors soit AUCUNE solution, soit une INFINITÉ.

Exemple : $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de déterminant nul. En doublant la seconde équation on obtient $2x + 4y = 6 \neq 1$: le système n'a aucune solution.

Réponse. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = C^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $x = y = 1$ · si $\det = 0$, le système a zéro ou une infinité de solutions.

Rappel de cours. $AX = B$ avec A inversible $\Rightarrow X = A^{-1}B$ (multiplication À GAUCHE par A^{-1}). Le déterminant décide donc de l'existence et de l'unicité de la solution.

Erreur fréquente. Multiplier à droite : $X = BA^{-1}$. L'ordre est imposé, et ici le produit ne serait même pas défini.

Correction de l'exercice 9 - Équations matricielles

Pour $AX = M$, on multiplie À GAUCHE par A^{-1} : $A^{-1}AX = A^{-1}M$, soit $X = A^{-1}M$.

$$\text{Calcul : } X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haut gauche : $2 \times 1 + (-5) \times 2 = -8$. Haut droite : $2 \times 0 + (-5) \times 1 = -5$.

Bas gauche : $(-1) \times 1 + 3 \times 2 = 5$. Bas droite : $(-1) \times 0 + 3 \times 1 = 3$.

$$\text{Donc } X = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour $XA = M$, il faut cette fois multiplier À DROITE par A^{-1} : $XAA^{-1} = MA^{-1}$, soit $X = MA^{-1}$.

$$\text{Calcul : } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Haut gauche : $1 \times 2 + 0 \times (-1) = 2$. Haut droite : $1 \times (-5) + 0 \times 3 = -5$.

Bas gauche : $2 \times 2 + 1 \times (-1) = 3$. Bas droite : $2 \times (-5) + 1 \times 3 = -7$.

Donc $X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, résultat DIFFÉRENT du précédent : le côté par lequel on multiplie change tout.

Troisième équation : on factorise le membre de gauche, en pensant à faire apparaître l'identité. $AX + 2X = AX + 2I_2X = (A + 2I_2)X$.

Il est indispensable d'écrire $2X = 2I_2X$: on ne peut pas factoriser « $A + 2$ », une matrice et un nombre ne s'additionnant pas.

$A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, de déterminant $5 \times 4 - 5 \times 1 = 15 \neq 0$: cette matrice est inversible.

Son inverse vaut $\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } X = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Détail du produit : haut gauche $4 \times 5 + (-5) \times 3 = 5$; haut droite idem ; bas gauche $(-1) \times 5 + 5 \times 3 = 10$; bas droite idem ✓.

$$\textbf{Réponse.} \quad AX = M \Rightarrow X = A^{-1}M = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot XA = M \Rightarrow X = MA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$AX + 2X = (A + 2I)X, \text{ d'où } X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Rappel de cours. $AX = M \Rightarrow X = A^{-1}M$ (à gauche) · $XA = M \Rightarrow X = MA^{-1}$ (à droite). Pour factoriser une somme du type $AX + kX$, écrire $kX = kIX$.

Erreur fréquente. Factoriser en $(A + 2)X$. L'expression $A + 2$ n'a aucun sens : il faut $A + 2I_2$.

Correction de l'exercice 10 - Conjecturer et démontrer une puissance

$A^2 = A \times A$. Haut gauche : $1 \times 1 + 1 \times 0 = 1$. Haut droite : $1 \times 1 + 1 \times 2 = 3$.

Bas gauche : $0 \times 1 + 2 \times 0 = 0$. Bas droite : $0 \times 1 + 2 \times 2 = 4$.

$$\text{Donc } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$A^3 = A^2 \times A$. Haut gauche : 1. Haut droite : $1 \times 1 + 3 \times 2 = 7$. Bas gauche : 0. Bas droite : $4 \times 2 = 8$.

$$\text{Donc } A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Observons la suite des coefficients. En bas à droite : 2, 4, 8, soit 2^n .

En haut à droite : 1, 3, 7. Ces nombres valent $2 - 1$, $4 - 1$, $8 - 1$, c'est-à-dire $2^n - 1$.

Le coefficient en haut à gauche reste 1, celui en bas à gauche reste 0 (la matrice est triangulaire, ses puissances le restent).

$$\text{On conjecture donc } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Démonstration par récurrence. INITIALISATION : pour $n = 1$, la formule donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 - 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A \quad \checkmark.$$

HÉRÉDITÉ : supposons la formule vraie au rang n . Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Haut gauche : } 1 \times 1 + (2^n - 1) \times 0 = 1 \quad \checkmark.$$

$$\text{Haut droite : } 1 \times 1 + (2^n - 1) \times 2 = 1 + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1} - 1 \quad \checkmark \text{ — c'est bien la formule au rang } n + 1.$$

$$\text{Bas gauche : } 0. \text{ Bas droite : } 2^n \times 2 = 2^{n+1} \quad \checkmark.$$

$$\text{CONCLUSION : } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

Contrôle indépendant sur $n = 4$: la formule prédit $\begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$, et $A^4 = A^3 A$ donne en haut à droite $1 + 7 \times 2 = 15 \quad \checkmark$.

$$\textbf{Réponse.} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \text{conjecture et démonstration : } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Rappel de cours. Pour conjecturer, on regarde chaque coefficient comme une SUITE : ici 2, 4, 8 et 1, 3, 7. L'hérédité se réduit ensuite à un produit matriciel de deux lignes.

Erreur fréquente. Multiplier $A \times A^n$ au lieu de $A^n \times A$ dans l'hérédité. Les deux donnent ici le même résultat, mais il faut choisir un ordre et s'y tenir : c'est ce qui rend le calcul juste par construction.

Correction de l'exercice 11 - Polynôme annulateur et inverse

$$A^2 = A \times A. \text{ Haut gauche : } 3 \times 3 + 1 \times 2 = 11. \text{ Haut droite : } 3 \times 1 + 1 \times 4 = 7.$$

$$\text{Bas gauche : } 2 \times 3 + 4 \times 2 = 14. \text{ Bas droite : } 2 \times 1 + 4 \times 4 = 18.$$

$$\text{Donc } A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Calculons maintenant } 7A - 10I_2 = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 14 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices coïncident : la relation $A^2 = 7A - 10I_2$ est vérifiée $\checkmark$.

Remarque : les coefficients 7 et 10 ne sortent pas de nulle part — ce sont la TRACE ($3 + 4$) et le DÉTERMINANT ($3 \times 4 - 1 \times 2$) de A .

Pour l'inverse, on part de la relation et on fait apparaître un produit égal à I_2 .

$$A^2 - 7A = -10I_2, \text{ c'est-à-dire } A(A - 7I_2) = -10I_2.$$

En divisant par -10 : $A \times \frac{7I_2 - A}{10} = I_2$.

Donc A est inversible, et $A^{-1} = \frac{1}{10}(7I_2 - A)$.

Calcul : $7I_2 - A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

D'où $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Vérification par la formule classique : $\det A = 3 \times 4 - 1 \times 2 = 10$, donc $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

✓ — résultat identique.

Contrôle direct : haut gauche de AA^{-1} vaut $\frac{3 \times 4 + 1 \times (-2)}{10} = \frac{10}{10} = 1$ ✓ ; haut droite : $\frac{3 \times (-1) + 1 \times 3}{10} = 0$ ✓.

Intérêt de la méthode : elle se généralise aux matrices 3×3 et au-delà, là où la formule du déterminant devient lourde.

Réponse. $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} = 7A - 10I_2$ ✓ · d'où $A(A - 7I_2) = -10I_2$ et

$A^{-1} = \frac{1}{10}(7I_2 - A) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ · identique à la formule du déterminant ✓.

Rappel de cours. D'une relation $A^2 = \alpha A + \beta I$ avec $\beta \neq 0$, on tire $A(A - \alpha I) = \beta I$, donc $A^{-1} = \frac{1}{\beta}(A - \alpha I)$. Pour une 2×2 , α est la trace et $-\beta$ le déterminant.

Erreur fréquente. Écrire $A^2 - 7A = A(A - 7)$. Il faut $A - 7I_2$: on ne soustrait pas un nombre à une matrice.

Correction de l'exercice 12 - Matrices qui commutent

$$TM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Haut gauche : $1 \times a + 1 \times c = a + c$. Haut droite : $1 \times b + 1 \times d = b + d$.

Bas gauche : $0 \times a + 1 \times c = c$. Bas droite : $0 \times b + 1 \times d = d$.

Donc $TM = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$MT = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haut gauche : $a \times 1 + b \times 0 = a$. Haut droite : $a \times 1 + b \times 1 = a + b$.

Bas gauche : $c \times 1 + d \times 0 = c$. Bas droite : $c + d$.

Donc $MT = \begin{pmatrix} a & a + b \\ c & c + d \end{pmatrix}$.

L'égalité $TM = MT$ impose l'égalité des quatre coefficients.

Haut gauche : $a + c = a$, donc $c = 0$.

Haut droite : $b + d = a + b$, donc $d = a$.

Bas gauche : $c = c$, toujours vraie. Bas droite : $d = c + d$, qui redonne $c = 0$.

Les matrices qui commutent avec T sont donc exactement celles de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, avec a et b réels quelconques.

Autre écriture : ces matrices sont les $aI_2 + bN$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On retrouve la nilpotente de l'exercice 5.

Vérification avec $a = 2$, $b = 3$, soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: $TM = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $MT = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ✓.

Contre-exemple : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (avec $c = 1 \neq 0$). Alors $TM' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M'T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: ces matrices ne commutent pas ✓.

Réponse. $TM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ et $MT = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$. L'égalité impose $c = 0$ et $d = a$: les matrices commutant avec T sont les $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2 + bN$.

Rappel de cours. Chercher les matrices qui commutent avec A : poser M générique, calculer les deux produits, identifier les quatre coefficients — c'est un système linéaire en a, b, c, d .

Erreur fréquente. Conclure que seules I et A commutent avec A . Ici tout un plan de matrices convient : la solution est un ensemble, pas deux cas isolés.

Correction de l'exercice 13 - Inverse d'une matrice 3×3

Il faut calculer AB et vérifier qu'on obtient I_3 . On détaille les neuf coefficients, chacun combinant une ligne de A avec une colonne de B .

Ligne 1, colonne 1 : $1 \times (-24) + 2 \times 20 + 3 \times (-5) = -24 + 40 - 15 = 1$ ✓.

Ligne 1, colonne 2 : $1 \times 18 + 2 \times (-15) + 3 \times 4 = 18 - 30 + 12 = 0$ ✓.

Ligne 1, colonne 3 : $1 \times 5 + 2 \times (-4) + 3 \times 1 = 5 - 8 + 3 = 0$ ✓.

Ligne 2, colonne 1 : $0 \times (-24) + 1 \times 20 + 4 \times (-5) = 20 - 20 = 0$ ✓.

Ligne 2, colonne 2 : $0 \times 18 + 1 \times (-15) + 4 \times 4 = -15 + 16 = 1$ ✓.

Ligne 2, colonne 3 : $0 \times 5 + 1 \times (-4) + 4 \times 1 = 0$ ✓.

Ligne 3, colonne 1 : $5 \times (-24) + 6 \times 20 + 0 \times (-5) = -120 + 120 = 0$ ✓.

Ligne 3, colonne 2 : $5 \times 18 + 6 \times (-15) + 0 = 90 - 90 = 0$ ✓.

Ligne 3, colonne 3 : $5 \times 5 + 6 \times (-4) + 0 = 25 - 24 = 1$ ✓.

On obtient bien $AB = I_3$. Pour un format carré, cela suffit à conclure que $B = A^{-1}$.

Le système s'écrit $AX = C$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

A étant inversible, la solution est unique : $X = A^{-1}C = BC$.

Première ligne : $-24 \times 1 + 18 \times 2 + 5 \times 3 = -24 + 36 + 15 = 27$.

Deuxième ligne : $20 \times 1 + (-15) \times 2 + (-4) \times 3 = 20 - 30 - 12 = -22$.

Troisième ligne : $-5 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 3 = -5 + 8 + 3 = 6$.

Donc $x = 27$, $y = -22$ et $z = 6$.

Vérification, équation par équation. Première : $27 + 2 \times (-22) + 3 \times 6 = 27 - 44 + 18 = 1$ ✓.

Deuxième : $-22 + 4 \times 6 = -22 + 24 = 2$ ✓.

Troisième : $5 \times 27 + 6 \times (-22) = 135 - 132 = 3$ ✓. Les trois équations sont satisfaites.

Réponse. $AB = I_3$ (les neuf coefficients vérifiés), donc $B = A^{-1} \cdot X = BC = \begin{pmatrix} 27 \\ -22 \\ 6 \end{pmatrix}$, soit

$x = 27$, $y = -22$, $z = 6$ · vérification dans les trois équations ✓.

Rappel de cours. Pour une matrice carrée, $AB = I$ suffit à garantir $B = A^{-1}$ (l'égalité $BA = I$ est alors automatique). La résolution d'un système 3×3 se ramène ensuite à un seul produit matriciel.

Erreur fréquente. Se tromper de ligne ou de colonne dans un produit 3×3 . La discipline « ligne de la première, colonne de la seconde » doit être appliquée pour chacun des neuf coefficients.

Correction de l'exercice 14 - Suite couplée et matrices

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Le système s'écrit $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Contrôle : la première ligne du produit donne $2u_n + v_n$ ✓ et la seconde $u_n + 2v_n$ ✓.

Par récurrence immédiate, $X_n = A^n X_0$: tout revient donc à calculer A^n .

Plutôt que de calculer A^n directement, on cherche des combinaisons de u_n et v_n qui évoluent simplement.

Somme : $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (2u_n + v_n) + (u_n + 2v_n) = 3u_n + 3v_n = 3s_n$.

La suite (s_n) est donc GÉOMÉTRIQUE de raison 3, avec $s_0 = u_0 + v_0 = 1$.

Donc $s_n = 3^n$.

Différence : $d_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = (2u_n + v_n) - (u_n + 2v_n) = u_n - v_n = d_n$.

La suite (d_n) est donc CONSTANTE, égale à $d_0 = 1 - 0 = 1$.

On dispose maintenant de $u_n + v_n = 3^n$ et $u_n - v_n = 1$: un système de deux équations à deux inconnues.

En additionnant : $2u_n = 3^n + 1$, donc $u_n = \frac{3^n + 1}{2}$.

En soustrayant : $2v_n = 3^n - 1$, donc $v_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

Vérification pour $n = 1$: les formules donnent $u_1 = \frac{4}{2} = 2$ et $v_1 = \frac{2}{2} = 1$.

Et par le système : $u_1 = 2 \times 1 + 0 = 2$ ✓, $v_1 = 1 + 2 \times 0 = 1$ ✓.

Pour $n = 2$: les formules donnent $u_2 = \frac{10}{2} = 5$ et $v_2 = \frac{8}{2} = 4$.

Par le système : $u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$ ✓ et $v_2 = 2 + 2 \times 1 = 4$ ✓.

Remarque : les nombres 3 et 1, raisons des deux suites auxiliaires, sont les VALEURS PROPRES de A — c'est ce que formalisera l'exercice 17.

Réponse. $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $X_n = A^n X_0$ · $s_n = 3^n$ (géométrique) et $d_n = 1$ (constante) · $u_n = \frac{3^n + 1}{2}$ et $v_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

Rappel de cours. Deux suites couplées se traitent en cherchant des combinaisons $u_n \pm v_n$ qui deviennent géométriques ou constantes. On résout ensuite le petit système pour revenir à u_n et v_n .

Erreur fréquente. Chercher A^n coefficient par coefficient dès le départ. Les combinaisons somme/différence donnent le résultat bien plus vite, et fournissent en prime les valeurs propres.

Correction de l'exercice 15 - Binôme de Newton avec une matrice nilpotente

$N^2 = N \times N$. La matrice N décale les coefficients d'un cran vers la droite : son carré les décale de deux crans.

Ligne 1 de N^2 :

$$(0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0, 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0, 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0) = (0, 0, 1).$$

Les lignes 2 et 3 donnent des zéros. Donc $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$N^3 = N^2 \times N$: le décalage sort du tableau, et N^3 est la matrice NULLE. N est donc nilpotente d'ordre 3.

Application du binôme : la formule $(X + Y)^n = \sum \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$ exige que X et Y COMMUTENT.

Ici $X = I_3$ et $Y = N$: or l'identité commute avec toute matrice, donc $I_3 N = N I_3 = N$ ✓. Le binôme s'applique.

Il donne $A^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k$, puisque toutes les puissances de I_3 valent I_3 .

Mais $N^k = 0$ dès que $k \geq 3$: la somme se réduit à ses trois premiers termes.

$$A^n = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

$$\text{Explicitement : } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification pour $n = 2$. La formule donne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcul direct de A^2 avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: ligne 1 donne $(1, 1 + 1, 0 + 1) = (1, 2, 1)$ ✓.

Ligne 2 : $(0, 1, 2)$ ✓. Ligne 3 : $(0, 0, 1)$ ✓. La formule est confirmée.

Contrôle supplémentaire pour $n = 3$: la formule prédit un coefficient $\frac{3 \times 2}{2} = 3$ en haut à droite, ce que donne bien $A^3 = A^2 A$.

Réponse. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ · le binôme s'applique car I_3 commute avec N ·

$$A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappel de cours. Binôme de Newton matriciel : valable UNIQUEMENT si les deux matrices commutent. Avec $A = I + N$ et N nilpotente, la somme est finie — c'est la méthode la plus rapide pour ce type de matrice.

Erreur fréquente. Appliquer le binôme à $(A + B)^n$ sans vérifier que $AB = BA$. Sans cette hypothèse, la formule est fausse dès l'exposant 2 (exercice 3).

Correction de l'exercice 16 - Diagonalisation et puissances n-ièmes

$\det P = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0$: P est inversible.

Par la formule : $P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Vérification : PP^{-1} a pour coefficient haut gauche $1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 1$ ✓ et haut droite $1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ✓.

Calculons AP d'abord : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Haut gauche : $2 + 1 = 3$. Haut droite : $2 - 1 = 1$. Bas gauche : $1 + 2 = 3$. Bas droite : $1 - 2 = -1$.

Donc $AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Puis $P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Haut gauche : $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$. Haut droite : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Bas gauche : $\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$. Bas droite : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$ ✓.

De cette égalité on tire $A = PDP^{-1}$, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} .

Démontrons $A^n = PD^nP^{-1}$ par récurrence. INITIALISATION : pour $n = 1$, c'est l'égalité $A = PDP^{-1}$ ✓.

HÉRÉDITÉ : si $A^n = PD^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}$.

Le produit $P^{-1}P$ au centre vaut I et disparaît : $A^{n+1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ ✓.

C'est tout l'intérêt de la méthode : les $P^{-1}P$ intermédiaires se télescopent, et il ne reste que la puissance de D — immédiate à calculer.

$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $PD^n = \begin{pmatrix} 3^n & 1 \\ 3^n & -1 \end{pmatrix}$.

Puis $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & 1 \\ 3^n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Haut gauche : $\frac{3^n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3^n + 1}{2}$. Haut droite : $\frac{3^n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$.

Bas gauche : $\frac{3^n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3^n - 1}{2}$. Bas droite : $\frac{3^n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3^n + 1}{2}$.

Donc $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.

Contrôle avec l'exercice 15 : $X_n = A^n X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne la première colonne de A^n , soit $u_n = \frac{3^n+1}{2}$ et $v_n = \frac{3^n-1}{2}$ ✓ — exactement les formules trouvées autrement.

Réponse. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓ · $A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$.

Rappel de cours. $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$, la démonstration reposant sur le télescopage des $P^{-1}P$. C'est la seule méthode qui se généralise à toutes les matrices diagonalisables.

Erreur fréquente. Écrire $A^n = P^n D^n (P^{-1})^n$. C'est faux : seuls les facteurs centraux se simplifient, et P reste au bord.

Correction de l'exercice 17 - Fibonacci en matrices

Calculons le produit : première ligne, $1 \times F_{n+1} + 1 \times F_n = F_{n+1} + F_n$.

Or la relation de récurrence donne exactement $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ ✓.

Seconde ligne : $1 \times F_{n+1} + 0 \times F_n = F_{n+1}$ ✓.

Le produit vaut donc $\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$: multiplier par A fait avancer la suite d'un cran.

Démonstration de la formule des puissances. INITIALISATION : pour $n = 1$, la formule donne $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ ✓ (avec $F_2 = 1$).

HÉRÉDITÉ : supposons $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

Alors $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Haut gauche : $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ ✓. Haut droite : $F_{n+1} \times 1 + F_n \times 0 = F_{n+1}$ ✓.

Bas gauche : $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ ✓. Bas droite : F_n ✓.

On obtient $A^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$, qui est bien la formule au rang $n + 1$.

CONCLUSION : la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Contrôle : A^5 devrait valoir $\begin{pmatrix} F_6 & F_5 \\ F_5 & F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, avec la suite 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 ✓.

Troisième question : on utilise la propriété $\det(A^n) = (\det A)^n$.

D'une part, $\det A = 1 \times 0 - 1 \times 1 = -1$, donc $\det(A^n) = (-1)^n$.

D'autre part, en calculant le déterminant sur la forme explicite :

$$\det(A^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n \times F_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.$$

En égalant les deux expressions : $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. C'est l'identité de Cassini.

Vérification pour $n = 5$: $F_6 F_4 - F_5^2 = 8 \times 3 - 25 = -1 = (-1)^5$ ✓.

Vérification pour $n = 6$: $F_7 F_5 - F_6^2 = 13 \times 5 - 64 = 1 = (-1)^6$ ✓.

Remarquable : une identité sur les entiers de Fibonacci sort d'un simple calcul de déterminant.

Réponse. $A \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ par la relation de récurrence $\cdot A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ et $\det(A^n) = (\det A)^n$ donne $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Rappel de cours. $\det(AB) = \det A \times \det B$, donc $\det(A^n) = (\det A)^n$. Appliquée à une matrice dont les coefficients sont des termes de suite, cette propriété fournit des identités gratuites.

Erreur fréquente. Oublier que $F_0 = 0$ dans l'initialisation. Le coefficient en bas à droite de A^1 doit valoir $F_0 = 0$, ce qui cale correctement les indices.

Correction de l'exercice 18 - Problème type bac : un modèle d'évolution

Après un an, la ville A conserve 90 % de ses habitants et reçoit 20 % de ceux de B :
 $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,2b_n$.

Symétriquement, B conserve 80 % des siens et reçoit 10 % de ceux de A :
 $b_{n+1} = 0,1a_n + 0,8b_n$.

En posant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, on obtient $X_{n+1} = MX_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Contrôle de cohérence : chaque colonne de M a pour somme 1 ($0,9 + 0,1$ et $0,2 + 0,8$) — c'est ce qui traduira la conservation de la population.

Calcul de X_1 : $a_1 = 0,9 \times 60\,000 + 0,2 \times 40\,000 = 54\,000 + 8\,000 = 62\,000$.

$b_1 = 0,1 \times 60\,000 + 0,8 \times 40\,000 = 6\,000 + 32\,000 = 38\,000$.

Donc $X_1 = \begin{pmatrix} 62\,000 \\ 38\,000 \end{pmatrix}$, et le total vaut bien 100 000 ✓.

Calcul de X_2 : $a_2 = 0,9 \times 62\,000 + 0,2 \times 38\,000 = 55\,800 + 7\,600 = 63\,400$.

$b_2 = 0,1 \times 62\,000 + 0,8 \times 38\,000 = 6\,200 + 30\,400 = 36\,600$.

Donc $X_2 = \begin{pmatrix} 63\,400 \\ 36\,600 \end{pmatrix}$, total 100 000 ✓. La ville A gagne des habitants, de moins en moins vite.

État stable : on cherche $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifiant $MX = X$, c'est-à-dire $0,9a + 0,2b = a$ et $0,1a + 0,8b = b$.

La première équation donne $0,2b = 0,1a$, soit $a = 2b$.

La seconde donne $0,1a = 0,2b$, soit la même relation : les deux équations sont équivalentes, ce qui est normal — la population totale étant conservée, une seule information est nouvelle.

C'est la contrainte $a + b = 100\,000$ qui lève l'indétermination : avec $a = 2b$, on obtient $3b = 100\,000$.

Donc $b = \frac{100\,000}{3} \approx 33\,333$ et $a = \frac{200\,000}{3} \approx 66\,667$.

Vérification : $0,9 \times \frac{200\,000}{3} + 0,2 \times \frac{100\,000}{3} = \frac{180\,000 + 20\,000}{3} = \frac{200\,000}{3}$ ✓, l'état est bien invariant.

Cohérence avec les calculs : $a_0 = 60\,000$, $a_1 = 62\,000$, $a_2 = 63\,400$ — la suite croît vers 66 667 ✓.

Conservation de la population : $a_{n+1} + b_{n+1} = (0,9a_n + 0,2b_n) + (0,1a_n + 0,8b_n) = a_n + b_n$.

Le total est donc constant, égal à 100 000 pour tout n ✓ — conséquence directe du fait que chaque colonne de M a pour somme 1.

Réponse. $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 62\,000 \\ 38\,000 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 63\,400 \\ 36\,600 \end{pmatrix} \cdot \text{état stable}$

$a = \frac{200\,000}{3} \approx 66\,667$ et $b = \frac{100\,000}{3} \approx 33\,333 \cdot \text{la population totale reste } 100\,000.$

Rappel de cours. Dans une matrice de transition, chaque colonne a pour somme 1 : la quantité totale se conserve. L'état stable est le vecteur invariant $MX = X$, déterminé par la contrainte de total.

Erreur fréquente. Croire que le système $MX = X$ suffit à déterminer l'état stable. Ses deux équations sont proportionnelles : il FAUT ajouter la contrainte $a + b = 100\,000$.

Correction de l'exercice 19 - Problème de synthèse : de la matrice à la formule explicite

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, le système s'écrit $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$X_1 : u_1 = 3 \times 3 - 1 = 8$ et $v_1 = -3 + 3 \times 1 = 0$. Donc $X_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$X_2 : u_2 = 3 \times 8 - 0 = 24$ et $v_2 = -8 + 0 = -8$. Donc $X_2 = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Somme : $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (3u_n - v_n) + (-u_n + 3v_n) = 2u_n + 2v_n = 2s_n$.

(s_n) est donc géométrique de raison 2, avec $s_0 = 3 + 1 = 4 : s_n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$.

Différence : $d_{n+1} = (3u_n - v_n) - (-u_n + 3v_n) = 4u_n - 4v_n = 4d_n$.

(d_n) est géométrique de raison 4, avec $d_0 = 3 - 1 = 2 : d_n = 2 \times 4^n$.

Contrôle sur $n = 1 : s_1 = 8 + 0 = 8 = 2^3$ ✓ et $d_1 = 8 - 0 = 8 = 2 \times 4$ ✓.

On résout le petit système. En additionnant : $2u_n = s_n + d_n = 2^{n+2} + 2 \times 4^n$, donc $u_n = 2^{n+1} + 4^n$.

En soustrayant : $2v_n = s_n - d_n = 2^{n+2} - 2 \times 4^n$, donc $v_n = 2^{n+1} - 4^n$.

Vérification pour $n = 1 : u_1 = 4 + 4 = 8$ ✓ et $v_1 = 4 - 4 = 0$ ✓.

Pour $n = 2 : u_2 = 8 + 16 = 24$ ✓ et $v_2 = 8 - 16 = -8$ ✓.

Pour A^n , on refait le même raisonnement avec un vecteur initial quelconque $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

On obtient $s_n = 2^n(u_0 + v_0)$ et $d_n = 4^n(u_0 - v_0)$, d'où $u_n = \frac{2^n(u_0 + v_0) + 4^n(u_0 - v_0)}{2}$.

En regroupant selon u_0 et $v_0 : u_n = \frac{4^n + 2^n}{2}u_0 + \frac{2^n - 4^n}{2}v_0$, et symétriquement pour v_n .

Donc $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 2^n - 4^n \\ 2^n - 4^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}$.

Contrôle pour $n = 1 : \text{la formule donne } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = A$ ✓.

Dernière question : $\frac{u_n}{v_n} = \frac{2^{n+1} + 4^n}{2^{n+1} - 4^n}$. On factorise par le terme DOMINANT, 4^n .

$\frac{u_n}{v_n} = \frac{4^n \left(\frac{2^{n+1}}{4^n} + 1 \right)}{4^n \left(\frac{2^{n+1}}{4^n} - 1 \right)} = \frac{2 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1}{2 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1}$, puisque $\frac{2^{n+1}}{4^n} = 2 \times \left(\frac{2}{4} \right)^n = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n$.

Comme $\left(\frac{1}{2} \right)^n \rightarrow 0$, le quotient tend vers $\frac{0+1}{0-1} = -1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = -1$.

Interprétation : 4^n l'emporte sur 2^n , et il apparaît avec des signes opposés dans u_n et v_n — les deux suites divergent en sens contraires, à la même vitesse.

Contrôle numérique : $\frac{u_5}{v_5} = \frac{64 + 1024}{64 - 1024} = \frac{1088}{-960} \approx -1,13$, et
 $\frac{u_{10}}{v_{10}} = \frac{2048 + 1\,048\,576}{2048 - 1\,048\,576} \approx -1,004 \checkmark$: la convergence vers -1 est nette.

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \end{pmatrix}$. $s_n = 2^{n+2}$ et $d_n = 2 \times 4^n$.

$u_n = 2^{n+1} + 4^n$, $v_n = 2^{n+1} - 4^n$. $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 2^n - 4^n \\ 2^n - 4^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}$. $\lim \frac{u_n}{v_n} = -1$.

Rappel de cours. Chaîne complète : système couplé → écriture matricielle → combinaisons $u \pm v$ géométriques (dont les raisons sont les valeurs propres) → formules explicites → puissance A^n → limites par factorisation du terme dominant.

Erreur fréquente. Chercher la limite sans factoriser le terme dominant. Les deux suites tendent vers l'infini : le quotient est une forme indéterminée tant que 4^n n'a pas été mis en facteur.

Correction de l'exercice 20 - La matrice d'un quart de tour, un « i » matriciel

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + (-1) \times 1 & 0 \times (-1) + (-1) \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times (-1) + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.

$J^3 = J^2 J = -J$ et $J^4 = (J^2)^2 = I_2$. Deux quarts de tour font un demi-tour ($-I_2$), quatre font un tour complet (I_2).

2) $J \times J^3 = J^4 = I_2$: J est inversible et $J^{-1} = J^3 = -J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (le quart de tour dans l'autre sens).

3) $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc $J^{2026} = (J^4)^{506} J^2 = J^2 = -I_2$.

4) I_2 et J commutent, donc $M^2 = I_2 + 2J + J^2 = I_2 + 2J - I_2 = 2J$. Puis
 $M^8 = (M^2)^4 = (2J)^4 = 16J^4 = 16I_2$.

J se comporte comme i ($J^2 = -I_2$, comme $i^2 = -1$) : on retrouve $(1 + i)^2 = 2i$ et $(1 + i)^8 = 16$.

Réponse. $J^2 = -I_2$, $J^4 = I_2$; $J^{-1} = -J$; $J^{2026} = -I_2$; $M^8 = 16I_2$.

Rappel de cours. Si $A^k = I$, alors A est inversible d'inverse A^{k-1} , et les puissances de A se répètent avec la période k .