

Matrices : opérations et inverse — Terminale maths expertes

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Une matrice est un tableau de nombres qu'on additionne, qu'on multiplie et parfois qu'on inverse — mais dont le produit obéit à des règles inhabituelles : il n'est pas commutatif, et deux matrices non nulles peuvent avoir un produit nul. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout le chapitre en maths expertes : somme et produit par un réel, produit matriciel et ses pièges, matrice identité, puissances d'une matrice, déterminant et condition d'inversibilité, inverse d'une matrice 2×2 puis 3×3 , résolution de systèmes linéaires par la matrice inverse, polynôme annulateur, matrices qui commutent, et calcul de A^n par récurrence, par le binôme de Newton avec une matrice nilpotente, puis par diagonalisation. Les applications finales — suites couplées, suite de Fibonacci, modèle d'évolution — montrent à quoi sert vraiment cette machinerie. Chaque correction est rédigée pas à pas, produit par produit, avec vérification.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/matrices-operations-inverse

Exercice 1 - Somme, produit par un réel, égalité

Une matrice de format $n \times p$ a n lignes et p colonnes. La somme et le produit par un réel s'effectuent COEFFICIENT PAR COEFFICIENT, et n'ont de sens qu'entre matrices de même format. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A + B$ et $3A$.
2. Calculer $A - 2B$.
3. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 - Le produit matriciel

Le produit AB n'a de sens que si le nombre de COLONNES de A égale le nombre de LIGNES de B . Le coefficient de la ligne i et de la colonne j du produit s'obtient en combinant la ligne i de A avec la colonne j de B . On reprend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB .
2. Calculer BA et comparer avec AB .
3. Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 - Les pièges du produit matriciel

Le calcul matriciel ressemble au calcul sur les réels, mais deux propriétés familières tombent : la commutativité, et l'implication « produit nul donc un facteur nul ».

1. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Que constate-t-on ?
2. En déduire qu'on ne peut pas « simplifier » une égalité matricielle par un facteur.
3. Développer $(A + B)^2$ pour deux matrices carrées quelconques.

Exercice 4 - Matrice identité et premières puissances

La matrice identité $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ joue le rôle du nombre 1 : elle est neutre pour le produit, et elle commute avec toutes les matrices carrées de même format.

1. Vérifier que $AI_2 = I_2A = A$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer A^2 et A^3 .
3. Calculer D^n pour $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 - Puissances d'une matrice triangulaire

Certaines matrices ont des puissances remarquablement simples. On étudie $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 . Que dire de N^k pour $k \geq 2$?
2. Calculer T^2 , T^3 , puis conjecturer T^n .
3. Démontrer la conjecture par récurrence.

Exercice 6 - Déterminant et inversibilité

Une matrice carrée A est INVERSIBLE s'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Pour une matrice 2×2 , tout se lit sur un seul nombre : le déterminant $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

1. Calculer les déterminants de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Lesquelles sont inversibles ?
3. Pour quelles valeurs de m la matrice $M = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & m-1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 7 - Inverse d'une matrice 2×2

Lorsque $\det A = ad - bc \neq 0$, l'inverse s'obtient par une formule :

$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ — on échange les termes de la diagonale principale, on change le signe des deux autres, et on divise par le déterminant.

1. Déterminer l'inverse de $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et vérifier.
2. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Démontrer la formule dans le cas général.

Exercice 8 - Résoudre un système par la matrice inverse

Un système linéaire s'écrit matriciellement $AX = B$. Si A est inversible, la solution est unique et vaut $X = A^{-1}B$. On résout $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

1. Écrire le système sous forme matricielle.
2. Résoudre à l'aide de la matrice inverse.
3. Que se passerait-il si la matrice du système n'était pas inversible ?

Exercice 9 - Équations matricielles

Résoudre une équation matricielle demande de manipuler les produits en respectant l'ordre, et de n'utiliser l'inverse que là où il existe. On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d'inconnue X matrice 2×2 .
2. Résoudre $XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Comparer avec la question précédente.
3. Résoudre $AX + 2X = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 - Conjecturer et démontrer une puissance

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et l'on cherche une expression de A^n valable pour tout entier $n \geq 1$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Conjecturer une expression de A^n .
3. Démontrer la conjecture par récurrence.

Exercice 11 - Polynôme annulateur et inverse

Une relation du type $A^2 = \alpha A + \beta I$ s'appelle un polynôme annulateur : elle permet à la fois de calculer les puissances et d'obtenir l'inverse sans passer par le déterminant.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = 7A - 10I_2$.

2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
3. Vérifier le résultat par la formule du déterminant.

Exercice 12 - Matrices qui commutent

Le produit n'étant pas commutatif, il est naturel de chercher quelles matrices commutent avec une matrice donnée. On cherche toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $TM = MT$, avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer TM et MT en fonction de a, b, c, d .
2. Résoudre l'équation $TM = MT$.
3. Vérifier sur un exemple, et donner une matrice qui NE commute PAS avec T .

Exercice 13 - Inverse d'une matrice 3×3

Au-delà du format 2×2 , il n'y a plus de formule simple à retenir : on vérifie un inverse proposé, ou on le cherche en résolvant un système. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que B est l'inverse de A .
2. En déduire la solution du système $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y + 4z = 2 \\ 5x + 6y = 3 \end{cases}$
3. Vérifier la solution dans le système.

Exercice 14 - Suite couplée et matrices

Deux suites qui se déterminent l'une l'autre s'écrivent naturellement sous forme matricielle. On considère $u_0 = 1, v_0 = 0$ et, pour tout n , $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$

1. Écrire le système sous la forme $X_{n+1} = AX_n$, puis exprimer X_n en fonction de A, n et X_0 .
2. Étudier les suites $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$.
3. En déduire les expressions de u_n et v_n , puis vérifier pour $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice 15 - Binôme de Newton avec une matrice nilpotente

Quand une matrice s'écrit $A = I + N$ avec N nilpotente, le binôme de Newton s'applique — car I commute avec tout — et la somme s'arrête très vite. On pose

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = I_3 + N.$$

1. Calculer N^2 et N^3 .
2. Justifier que le binôme de Newton s'applique à $A^n = (I_3 + N)^n$.
3. En déduire A^n pour $n \geq 2$, et vérifier pour $n = 2$.

Exercice 16 - Diagonalisation et puissances n-ièmes

La méthode générale pour calculer A^n consiste à écrire $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. On reprend $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et l'on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1} .
2. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$, puis calculer A^n .

Exercice 17 - Fibonacci en matrices

La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$.
2. Démontrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.
3. En déduire l'identité $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 18 - Problème type bac : un modèle d'évolution

Deux villes A et B se partagent une population totale constante de 100 000 habitants. Chaque année, 10 % des habitants de A partent vers B , et 20 % des habitants de B partent vers A . Au départ, A compte 60 000 habitants et B en compte 40 000. On note a_n et b_n les effectifs après n années.

1. Écrire le système donnant a_{n+1} et b_{n+1} , puis la matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$.
2. Calculer X_1 et X_2 .
3. Déterminer l'état stable, c'est-à-dire le vecteur X tel que $MX = X$ avec $a + b = 100\,000$.
4. Vérifier que la population totale est bien constante.

Exercice 19 - Problème de synthèse : de la matrice à la formule explicite

On considère les suites définies par $u_0 = 3$, $v_0 = 1$ et $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 3v_n \end{cases}$. Le problème enchaîne les trois techniques du chapitre : écriture matricielle, diagonalisation, puis retour aux suites.

1. Écrire $X_{n+1} = AX_n$ et calculer X_1 , X_2 .
2. Montrer que $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$ sont géométriques, et donner leurs

expressions.

3. En déduire u_n et v_n , puis A^n .

4. Déterminer la limite de $\frac{u_n}{v_n}$.

Exercice 20 - La matrice d'un quart de tour, un « i » matriciel

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de la rotation d'un quart de tour.

1. Calculer J^2 , J^3 et J^4 . Interpréter géométriquement.

2. En déduire que J est inversible et donner J^{-1} .

3. Calculer J^{2026} .

4. On pose $M = I_2 + J$. Calculer M^2 , puis M^8 . Quel lien avec le nombre complexe $1 + i$?