

Nombres complexes (forme algébrique) — Terminale maths expertes

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Les nombres complexes naissent d'une décision : on ajoute aux réels un nombre i tel que $i^2 = -1$, et tout devient calculable — les équations du second degré ont toujours deux solutions, la géométrie du plan se traite par le calcul. Ces 20 exercices corrigés couvrent toute la forme algébrique du programme de maths expertes : partie réelle et partie imaginaire, conjugué, module, inverse et quotient, équations à coefficients réels puis complexes, racines carrées d'un nombre complexe, points et vecteurs dans le plan complexe, ensembles de points. Deux outils reviennent en permanence et méritent d'être automatisés : l'identification $x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$, qui ramène une équation complexe à un système réel, et la relation $|z|^2 = z\bar{z}$, qui transforme une distance en produit. La difficulté est croissante : les quatre derniers exercices sont des problèmes de synthèse type bac, entièrement rédigés.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/nombres-complexes-forme-algebrique

Exercice 1 - Forme algébrique, partie réelle et partie imaginaire

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes contient les réels et un nombre i vérifiant $i^2 = -1$. Tout nombre complexe s'écrit de façon UNIQUE sous la forme $z = x + iy$ avec x et y réels : c'est sa forme algébrique, $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. On pose $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 7i$ et $z_3 = -4$.

1. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 , z_2 et z_3 . Lesquels sont réels ? imaginaires purs ?
2. Écrire $A = z_1 + (-2 + 8i)$ sous forme algébrique.
3. Déterminer les réels x et y tels que $(2x + 3) + (y - 1)i = 5 - 4i$.

Exercice 2 - Les puissances de i

La seule règle nouvelle est $i^2 = -1$: tout le reste du calcul complexe suit les règles habituelles de l'algèbre.

1. Calculer i^2 , i^3 , i^4 et i^5 .
2. En déduire i^{2026} .
3. Calculer $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2026}$.
4. Calculer $(1 + i)^2$, puis $(1 + i)^{10}$.

Exercice 3 - Somme, produit et identités remarquables

On pose $z = 3 + 2i$ et $z' = 1 - 4i$. Les calculs se mènent comme avec des expressions littérales, en remplaçant i^2 par -1 à la fin.

1. Calculer $z + z'$ et $z - z'$.

2. Calculer $z \times z'$.
3. Calculer $(2 - i)^2$ et $(3 + 2i)(3 - 2i)$.
4. Calculer $(1 + i)^3$.

Exercice 4 - Conjugué : calculs et propriétés

Le conjugué de $z = x + iy$ (avec x, y réels) est $\bar{z} = x - iy$. On pose $z = 5 - 3i$.

1. Calculer $\bar{z}$, $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ et $z\bar{z}$.
2. Démontrer que pour tout complexe $z = x + iy$: $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ et $z\bar{z} = x^2 + y^2$.
3. Calculer $\overline{(2 + i)(3 - 4i)}$ de deux façons différentes.

Exercice 5 - Inverse et quotient : la quantité conjuguée

Mettre un quotient sous forme algébrique repose sur une seule idée : multiplier le numérateur et le dénominateur par le CONJUGUÉ DU DÉNOMINATEUR, ce qui rend celui-ci réel (exercice 3).

1. Écrire $\frac{1}{2 - 5i}$ sous forme algébrique.
2. Écrire $\frac{3 + i}{2 - 5i}$ sous forme algébrique.
3. Écrire $\frac{1 + i}{1 - i}$ sous forme algébrique.
4. Écrire $\frac{2 - 3i}{i}$ sous forme algébrique.

Exercice 6 - Module et ses propriétés multiplicatives

Le module de $z = x + iy$ est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$: c'est la distance de l'origine au point d'affixe z . On pose $z = 3 - 4i$ et $z' = -1 + i$.

1. Calculer $|z|$ et $|z'|$, puis vérifier que $z\bar{z} = |z|^2$.
2. Calculer zz' puis $|zz'|$. Comparer avec $|z| \times |z'|$.
3. Calculer $\left|\frac{z}{z'}\right|$ et $|z^4|$ sans calculer z^4 .
4. Comparer $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$.

Exercice 7 - Second degré à coefficients réels

Dans $\mathbb{C}$, une équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients RÉELS avec $a \neq 0$ admet toujours deux solutions (éventuellement confondues). Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, elles sont conjuguées l'une de l'autre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + 2z + 5 = 0$.
3. Factoriser $z^2 - 4z + 13$, puis vérifier la somme et le produit des racines.

Exercice 8 - Équations linéaires et équations avec le conjugué

Une équation où z apparaît seul se résout comme dans $\mathbb{R}$, par division. Dès que $\bar{z}$ apparaît, ce n'est plus possible : on repasse par la forme algébrique $z = x + iy$ et on identifie.

1. Résoudre $(2 + i)z = 3 - i$.
2. Résoudre $2z + \bar{z} = 9 - i$.
3. Résoudre $iz + 2\bar{z} = 1 + i$.

Exercice 9 - Un paramètre réel : réel, imaginaire pur, module minimal

Pour tout réel m , on pose $z_m = (m + 2i)(1 - i)$.

1. Écrire z_m sous forme algébrique (en fonction de m).
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles z_m est réel.
3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles z_m est imaginaire pur.
4. Déterminer m pour que $|z_m|$ soit minimal, et donner ce minimum.

Exercice 10 - Plan complexe : distances, nature d'un triangle, parallélogramme

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = 4 + i$ et $c = 3 - 2i$.

1. Déterminer l'afixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis calculer les longueurs AB , BC et AC .
2. En déduire la nature du triangle ABC .
3. Déterminer l'afixe du milieu I de $[AC]$, et calculer IB . Qu'en déduit-on ?
4. Déterminer l'afixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 11 - Ensembles de points : cercle, médiatrice, disque

M désigne le point d'afixe z dans le plan complexe. On cherche à décrire géométriquement des ensembles de points définis par une condition sur z . La clé est de lire $|z - z_A|$ comme la distance AM .

1. Déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que $|z - 2 + i| = 3$.
2. Déterminer l'ensemble E_2 des points M tels que $|z - 1| = |z + 3i|$, puis en donner une équation cartésienne.
3. Déterminer l'ensemble E_3 des points M tels que $|z - 2 + i| \leq 3$.

Exercice 12 - Racines carrées d'un nombre complexe

Dans $\mathbb{C}$, tout nombre non nul admet exactement DEUX racines carrées, opposées l'une de l'autre. Il n'existe pas de notation $\sqrt{}$ pour les désigner : on les calcule. La méthode consiste à poser $z = x + iy$ et à écrire trois équations, dont une venant du module.

1. Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = 3 + 4i$.
2. Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = -8 + 6i$.

Exercice 13 - Second degré à coefficients complexes

La formule du discriminant reste valable lorsque les coefficients sont complexes, à une différence près : il faut calculer soi-même une racine carrée δ de Δ (méthode de l'exercice 12), et les racines ne sont plus conjuguées. On considère l'équation $z^2 - (3 + i)z + (2 + 2i) = 0$.

1. Calculer le discriminant Δ de cette équation.
2. Déterminer une racine carrée δ de Δ .
3. En déduire les solutions de l'équation, puis vérifier par la somme et le produit.

Exercice 14 - Polynôme à coefficients réels et racine complexe

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 5z^2 + 11z - 15$, dont tous les coefficients sont réels.

1. Vérifier que $1 + 2i$ est une racine de P .
2. En déduire, sans nouveau calcul, une autre racine de P . Justifier.
3. Factoriser $P(z)$ sous la forme $(z^2 + \alpha z + \beta)(z + \gamma)$ avec α, β, γ réels.
4. Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 15 - Un quotient : où est-il réel ? imaginaire pur ?

On note A et B les points d'affixes 1 et i . Pour tout complexe $z \neq i$, on pose $Z = \frac{z-1}{z-i}$. L'objectif est de traduire deux conditions sur Z en deux ensembles de points $M(z)$.

1. Calculer Z pour $z = 2$.
2. En posant $z = x + iy$, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z .
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel.
4. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 16 - Une suite de nombres complexes

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par $z_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note M_n le point d'affixe z_n .

1. Calculer z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique.
2. Exprimer $|z_n|$ en fonction de n .
3. En déduire le comportement des points M_n lorsque n devient grand.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $|z_n| < 0,01$.

Exercice 17 - Ensembles de points définis par z^2

M est le point d'affixe $z = x + iy$, avec x et y réels. On étudie les conditions portant sur z^2 . On commence par établir la forme algébrique de z^2 .

1. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z^2 .
2. Déterminer l'ensemble F_1 des points M tels que z^2 soit réel.
3. Déterminer l'ensemble F_2 des points M tels que z^2 soit imaginaire pur.

4. Déterminer l'ensemble F_3 des points M tels que $\operatorname{Re}(z^2) = 4$, puis l'ensemble F_4 des points M tels que $|z^2| = 4$.

Exercice 18 - Résoudre $z^2 = \overline{z}$

On cherche tous les nombres complexes z vérifiant $z^2 = \overline{z}$. L'exercice se traite de deux façons : par le module d'abord (rapide et éclairant), puis par la forme algébrique (complète et sûre).

1. En passant aux modules, montrer que toute solution vérifie $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.
2. Résoudre l'équation en posant $z = x + iy$.
3. Placer les solutions dans le plan complexe et décrire la figure obtenue.

Exercice 19 - Identité du parallélogramme et théorème de la médiane

On démontre ici une identité générale sur les modules, puis on en tire un théorème de géométrie. L'outil unique est la relation $|w|^2 = w\overline{w}$, qui transforme un carré de longueur en produit — donc en calcul algébrique.

1. Démontrer que pour tous nombres complexes u et v :
 $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.
2. Interpréter cette égalité dans un parallélogramme.
3. Soient A, B, C trois points d'affixes a, b, c , et I le milieu de $[BC]$. Démontrer que
 $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.
4. Vérifier cette formule sur $A(1 + 2i)$, $B(4 + i)$ et $C(3 - 2i)$.

Exercice 20 - Problème de synthèse : l'application $z \mapsto (z - 1)/(z + 1)$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. On note A et B les points d'affixes 1 et -1 . Pour tout complexe $z \neq -1$, on pose $Z = \frac{z-1}{z+1}$, et M est le point d'affixe z . Ce problème rassemble tous les outils du chapitre : forme algébrique d'un quotient, module, ensembles de points.

1. Calculer Z lorsque $z = i$.
2. En posant $z = x + iy$, déterminer $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$.
3. Déterminer l'ensemble E des points M tels que Z soit réel.
4. Déterminer l'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur.
5. Déterminer l'ensemble G des points M tels que $|Z| = 1$, en raisonnant sans forme algébrique. Puis résoudre $Z = 2$.

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Forme algébrique, partie réelle et partie imaginaire

Point de vocabulaire à fixer une fois pour toutes : dans $z = x + iy$, la partie imaginaire est le RÉEL y , pas iy . Écrire $\text{Im}(z_1) = -5i$ est une faute, pas une maladresse.

Pour $z_1 = 3 - 5i$, on lit $x = 3$ et $y = -5$: $\text{Re}(z_1) = 3$ et $\text{Im}(z_1) = -5$.

Pour $z_2 = 7i$, on complète l'écriture : $z_2 = 0 + 7i$. Donc $\text{Re}(z_2) = 0$ et $\text{Im}(z_2) = 7$.

Pour $z_3 = -4$, on complète de même : $z_3 = -4 + 0i$. Donc $\text{Re}(z_3) = -4$ et $\text{Im}(z_3) = 0$.

Un complexe est RÉEL lorsque sa partie imaginaire est nulle : c'est le cas de z_3 seulement.

Il est IMAGINAIRE PUR lorsque sa partie réelle est nulle : c'est le cas de z_2 seulement. Le nombre z_1 n'est ni l'un ni l'autre.

Pour A , on additionne séparément les parties réelles et les parties imaginaires :

$$A = (3 - 2) + (-5 + 8)i = 1 + 3i.$$

Pour la dernière question, on utilise l'UNICITÉ de la forme algébrique : deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales ET leurs parties imaginaires sont égales.

Comme x et y sont réels, $2x + 3$ et $y - 1$ le sont aussi : l'identification est légitime. On obtient le système $2x + 3 = 5$ et $y - 1 = -4$.

De $2x + 3 = 5$ on tire $2x = 2$, donc $x = 1$. De $y - 1 = -4$ on tire $y = -3$.

Vérification : $(2 \times 1 + 3) + (-3 - 1)i = 5 - 4i$. ✓

Réponse. $\text{Re}(z_1) = 3$, $\text{Im}(z_1) = -5$; $\text{Re}(z_2) = 0$, $\text{Im}(z_2) = 7$ (imaginaire pur) ; $\text{Re}(z_3) = -4$, $\text{Im}(z_3) = 0$ (réel) · $A = 1 + 3i$ · $x = 1$ et $y = -3$.

Rappel de cours. z est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$ · z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$ ·

l'identification $x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$ n'est valable que si x, y, x', y' sont RÉELS.

Erreur fréquente. Écrire $\text{Im}(3 - 5i) = -5i$. La partie imaginaire est un nombre réel : c'est -5 .

Correction de l'exercice 2 - Les puissances de i

Par définition $i^2 = -1$. Ensuite $i^3 = i^2 \times i = -i$, et $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

Puis $i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$: on retombe sur i . Les puissances de i se répètent donc avec une PÉRIODE de 4, dans l'ordre $1, i, -1, -i$.

Concrètement, i^n ne dépend que du reste de n dans la division par 4 : reste 0 $\rightarrow 1$, reste 1 $\rightarrow i$, reste 2 $\rightarrow -1$, reste 3 $\rightarrow -i$.

Pour i^{2026} , on divise : $2026 = 4 \times 506 + 2$, le reste est 2. Donc $i^{2026} = i^2 = -1$.

Pour S , on compte d'abord les termes : les exposants vont de 0 à 2026, il y a donc 2027 termes.

On regroupe par paquets de quatre termes consécutifs. Chaque paquet vaut $1 + i + (-1) + (-i) = 0$: les paquets complets ne contribuent pas.

Or $2027 = 4 \times 506 + 3$: il y a 506 paquets complets (soit les 2024 premiers termes, d'exposants 0 à 2023), et il reste trois termes.

Les trois termes restants sont $i^{2024} + i^{2025} + i^{2026}$. Comme $2024 = 4 \times 506$, on a $i^{2024} = 1$, puis $i^{2025} = i$ et $i^{2026} = -1$.

Donc $S = 0 + 1 + i - 1 = i$.

Pour $(1 + i)^2$, on développe l'identité remarquable SANS oublier le double produit :
 $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

Ce petit résultat $(1 + i)^2 = 2i$ est à retenir : il évite des calculs pénibles. Ici

$$(1 + i)^{10} = \left[(1 + i)^2\right]^5 = (2i)^5.$$

Enfin $(2i)^5 = 2^5 \times i^5 = 32 \times i = 32i$, puisque $i^5 = i$.

Réponse. $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i \cdot i^{2026} = -1 \cdot S = i \cdot (1 + i)^2 = 2i$ et $(1 + i)^{10} = 32i$.

Rappel de cours. Les puissances de i sont périodiques de période 4 : on ne calcule jamais i^n , on calcule le reste de n modulo 4. À mémoriser aussi : $(1 + i)^2 = 2i$ et $(1 - i)^2 = -2i$.

Erreur fréquente. Écrire $(1 + i)^2 = 1 + i^2 = 0$. Le double produit $2i$ ne disparaît pas : les identités remarquables restent valables dans $\mathbb{C}$, avec tous leurs termes.

Correction de l'exercice 3 - Somme, produit et identités remarquables

Pour la somme, on regroupe parties réelles d'un côté, parties imaginaires de l'autre :
 $z + z' = (3 + 1) + (2 - 4)i = 4 - 2i$.

Pour la différence, attention à distribuer le signe moins sur les DEUX parties :
 $z - z' = (3 - 1) + (2 - (-4))i = 2 + 6i$.

Pour le produit, on développe comme un produit de deux binômes :
 $zz' = (3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2$.

On remplace i^2 par -1 : $-8i^2 = -8 \times (-1) = +8$. Donc $zz' = 3 + 8 + (-12 + 2)i = 11 - 10i$.

Pour $(2 - i)^2$, on applique $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:
 $(2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$.

Pour $(3 + 2i)(3 - 2i)$, on reconnaît $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 3$ et $b = 2i$: le produit vaut $9 - (2i)^2 = 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13$.

Ce résultat est capital : le produit $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ est toujours un réel POSITIF. C'est exactement ce qui permettra, à l'exercice 5, de rendre réel le dénominateur d'un quotient.

Pour $(1 + i)^3$, le plus rapide est de réutiliser $(1 + i)^2 = 2i$:
 $(1 + i)^3 = (1 + i) \times 2i = 2i + 2i^2 = -2 + 2i$.

Vérification par le développement direct :

$$(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i. \checkmark$$

Réponse. $z + z' = 4 - 2i$ · $z - z' = 2 + 6i$ · $zz' = 11 - 10i$ · $(2 - i)^2 = 3 - 4i$ ·
 $(3 + 2i)(3 - 2i) = 13$ · $(1 + i)^3 = -2 + 2i$.

Rappel de cours. Toutes les identités remarquables restent valables dans $\mathbb{C}$. La plus utile : $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, un réel positif.

Erreur fréquente. Oublier de remplacer i^2 par -1 et laisser $-8i^2$ dans le résultat. Une forme algébrique ne contient jamais de i^2 .

Correction de l'exercice 4 - Conjugué : calculs et propriétés

Conjuguer, c'est changer le signe de la partie imaginaire : pour $z = 5 - 3i$, on obtient $\bar{z} = 5 + 3i$.

Somme : $z + \bar{z} = (5 - 3i) + (5 + 3i) = 10$. Le résultat est réel, ce n'est pas un hasard.

Différence : $z - \bar{z} = (5 - 3i) - (5 + 3i) = -6i$. Le résultat est imaginaire pur, ce n'est pas un hasard non plus.

Produit : $z\bar{z} = (5 - 3i)(5 + 3i) = 25 - (3i)^2 = 25 + 9 = 34$. Le résultat est un réel positif.

Passons au cas général avec $z = x + iy$, x et y réels, donc $\bar{z} = x - iy$.

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re}(z).$$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\operatorname{Im}(z).$$

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Ces trois égalités donnent trois caractérisations utilisées dans tout le chapitre : z est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ (car alors $z - \bar{z} = 0$), et z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$ (car alors $z + \bar{z} = 0$).

Première façon pour la dernière question : on calcule d'abord le produit.

$$(2 + i)(3 - 4i) = 6 - 8i + 3i - 4i^2 = 6 - 5i + 4 = 10 - 5i. \text{ Son conjugué est } 10 + 5i.$$

Seconde façon : on utilise $\overline{z\bar{z}} = \bar{z} \times \bar{\bar{z}}$. Ici

$$\overline{(2 + i)(3 - 4i)} = (2 - i)(3 + 4i) = 6 + 8i - 3i - 4i^2 = 6 + 5i + 4 = 10 + 5i.$$

Les deux méthodes donnent le même résultat. ✓ La seconde est celle qui sert dans les démonstrations : la conjugaison « traverse » les sommes, les produits et les quotients.

Réponse. $\bar{z} = 5 + 3i$ · $z + \bar{z} = 10$ · $z - \bar{z} = -6i$ · $z\bar{z} = 34$ · $\overline{(2 + i)(3 - 4i)} = 10 + 5i$.

Rappel de cours. $\overline{\bar{z} + \bar{z}'} = \bar{z} + \bar{z}'$ · $\overline{z\bar{z}} = \bar{z}\bar{z}'$ · $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ · $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$ · z réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ · z imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Erreur fréquente. Ne conjuguer qu'un seul facteur d'un produit. Dans $\overline{z\bar{z}}$, les DEUX facteurs se conjuguent.

Correction de l'exercice 5 - Inverse et quotient : la quantité conjuguée

Le conjugué de $2 - 5i$ est $2 + 5i$. On multiplie en haut et en bas par ce conjugué, ce qui ne change pas la valeur du quotient.

$$\frac{1}{2 - 5i} = \frac{2 + 5i}{(2 - 5i)(2 + 5i)}. \text{ Le dénominateur vaut } 2^2 + 5^2 = 29, \text{ un réel.}$$

Donc $\frac{1}{2 - 5i} = \frac{2 + 5i}{29} = \frac{2}{29} + \frac{5}{29}i$. La forme algébrique demande de séparer les deux parties.

$$\text{Même dénominateur pour la deuxième : } \frac{3 + i}{2 - 5i} = \frac{(3 + i)(2 + 5i)}{29}.$$

On développe le numérateur : $(3 + i)(2 + 5i) = 6 + 15i + 2i + 5i^2 = 6 + 17i - 5 = 1 + 17i$.

$$\text{Donc } \frac{3 + i}{2 - 5i} = \frac{1 + 17i}{29} = \frac{1}{29} + \frac{17}{29}i.$$

$$\text{Pour la troisième, le conjugué de } 1 - i \text{ est } 1 + i : \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)}.$$

Le numérateur vaut $(1 + i)^2 = 2i$ (exercice 2) et le dénominateur $1^2 + 1^2 = 2$. Donc $\frac{1 + i}{1 - i} = \frac{2i}{2} = i$.

Pour la quatrième, le dénominateur est i , dont le conjugué est $-i$:

$$\frac{2-3i}{i} = \frac{(2-3i) \times (-i)}{i \times (-i)}.$$

Au dénominateur : $i \times (-i) = -i^2 = 1$. Au numérateur : $(2-3i)(-i) = -2i + 3i^2 = -3 - 2i$.

Donc $\frac{2-3i}{i} = -3 - 2i$. On retient au passage que $\frac{1}{i} = -i$.

Vérification de ce dernier résultat par le produit : $(-3 - 2i) \times i = -3i - 2i^2 = 2 - 3i$. ✓
C'est bien le numérateur de départ.

Réponse. $\frac{1}{2-5i} = \frac{2}{29} + \frac{5}{29}i \cdot \frac{3+i}{2-5i} = \frac{1}{29} + \frac{17}{29}i \cdot \frac{1+i}{1-i} = i \cdot \frac{2-3i}{i} = -3 - 2i$.

Rappel de cours. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ pour $z \neq 0$. Un quotient n'est sous forme algébrique que lorsque le dénominateur est un réel et que les deux parties sont séparées.

Erreur fréquente. Multiplier par le conjugué du NUMÉRATEUR : cela ne rend pas le dénominateur réel et ne fait pas avancer le calcul.

Correction de l'exercice 6 - Module et ses propriétés multiplicatives

$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. Le carré supprime le signe : la partie imaginaire négative ne change rien.

$$|z'| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Contrôle de la relation fondamentale : $z\bar{z} = (3-4i)(3+4i) = 9 + 16 = 25$, et $|z|^2 = 5^2 = 25$. ✓ On retiendra $|z|^2 = z\bar{z}$, qui sera l'outil des exercices 15, 19 et 20.

Produit : $zz' = (3-4i)(-1+i) = -3 + 3i + 4i - 4i^2 = -3 + 7i + 4 = 1 + 7i$.

Son module : $|zz'| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Et $|z| \times |z'| = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Les deux coïncident : le module est MULTIPLICATIF, $|zz'| = |z||z'|$.

Cette propriété se démontre en une ligne avec $|w|^2 = w\bar{w}$:

$|zz'|^2 = zz'\bar{z}\bar{z}' = z\bar{z} \times z'\bar{z}' = |z|^2 |z'|^2$, puis on prend la racine carrée des deux réels positifs.

Elle se transmet au quotient : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Et aux puissances : $|z^4| = |z|^4 = 5^4 = 625$, sans jamais développer z^4 .

Somme : $z + z' = (3-1) + (-4+1)i = 2-3i$, donc $|z + z'| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3,61$.

Alors que $|z| + |z'| = 5 + \sqrt{2} \approx 6,41$. Les deux ne sont PAS égaux : le module n'est pas additif.

On a seulement l'inégalité triangulaire $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, qui traduit géométriquement que le chemin direct est le plus court.

Réponse. $|z| = 5$, $|z'| = \sqrt{2}$. $zz' = 1 + 7i$ et $|zz'| = 5\sqrt{2} = |z||z'| \cdot \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $|z^4| = 625$.
 $|z + z'| = \sqrt{13} < |z| + |z'| = 5 + \sqrt{2}$.

Rappel de cours. $|z|^2 = z\bar{z}$. $|zz'| = |z||z'| \cdot \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \cdot |z^n| = |z|^n \cdot |\bar{z}| = |z|$. En revanche $|z + z'| \neq |z| + |z'|$ en général.

Erreur fréquente. « Distribuer » le module sur une somme. Le module se comporte comme une valeur absolue : multiplicatif oui, additif non.

Correction de l'exercice 7 - Second degré à coefficients réels

Première équation : $a = 1, b = -4, c = 13$, donc $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 16 - 52 = -36$.

Le discriminant est strictement négatif : il n'y a pas de solution réelle, mais deux solutions complexes conjuguées.

On écrit $\Delta = -36 = 36i^2$, donc une « racine carrée » de Δ est $6i$ (l'autre est $-6i$, elle donnerait les mêmes solutions échangées).

Les solutions sont $z = \frac{-b \pm 6i}{2a} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$.

Donc $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 2 - 3i = \bar{z}_1$.

Deuxième équation : $a = 2, b = 2, c = 5$, donc $\Delta = 4 - 40 = -36 = 36i^2$.

Les solutions sont $z = \frac{-2 \pm 6i}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$.

Attention à diviser par $2a = 4$ et non par 2 : c'est l'erreur la plus fréquente quand $a \neq 1$.

Factorisation : dès qu'on connaît les deux racines z_1 et z_2 , on a $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Ici $z^2 - 4z + 13 = (z - (2 + 3i))(z - (2 - 3i))$.

Contrôle par développement :

$$(z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i) = (z - 2)^2 - (3i)^2 = z^2 - 4z + 4 + 9 = z^2 - 4z + 13. \checkmark$$

Somme des racines : $(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$, et $-\frac{b}{a} = 4$. $\checkmark$ Produit :

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13, \text{ et } \frac{c}{a} = 13. \checkmark$$

Réponse. $z^2 - 4z + 13 = 0 \Rightarrow S = \{2 + 3i ; 2 - 3i\}$.

$$2z^2 + 2z + 5 = 0 \Rightarrow S = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i ; -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right\}. z^2 - 4z + 13 = (z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i).$$

Rappel de cours. Si $\Delta < 0$, les racines sont $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, conjuguées l'une de l'autre.

Somme = $-\frac{b}{a}$, produit = $\frac{c}{a}$: deux contrôles gratuits.

Erreur fréquente. Écrire $\sqrt{\Delta}$ avec $\Delta < 0$. On écrit $i\sqrt{-\Delta}$, où $-\Delta$ est positif : c'est cette racine-là qui a un sens.

Correction de l'exercice 8 - Équations linéaires et équations avec le conjugué

Première équation : $2 + i \neq 0$, on peut diviser. $z = \frac{3-i}{2+i}$.

On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$z = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i-2i+i^2}{4+1} = \frac{5-5i}{5} = 1-i.$$

$$\text{Vérification : } (2+i)(1-i) = 2-2i+i-i^2 = 2-i+1 = 3-i. \checkmark$$

Deuxième équation : elle contient $\bar{z}$, donc on pose $z = x + iy$ avec x et y RÉELS, d'où $\bar{z} = x - iy$.

Le membre de gauche devient $2(x + iy) + (x - iy) = 2x + 2iy + x - iy = 3x + iy$.

L'équation s'écrit $3x + iy = 9 - i$. Comme $3x$ et y sont réels, on identifie : $3x = 9$ et $y = -1$.

Donc $x = 3$ et $y = -1$, c'est-à-dire $z = 3 - i$.

$$\text{Vérification : } 2(3-i) + \overline{(3-i)} = 6-2i+3+i = 9-i. \checkmark$$

Troisième équation, même méthode : $iz = i(x + iy) = ix + i^2y = -y + ix$, et $2\bar{z} = 2x - 2iy$.

La somme vaut $(-y + 2x) + i(x - 2y)$. L'équation devient $(2x - y) + i(x - 2y) = 1 + i$.

On identifie : $2x - y = 1$ et $x - 2y = 1$. C'est un système linéaire réel de deux équations à deux inconnues.

De la première, $y = 2x - 1$. On reporte dans la seconde : $x - 2(2x - 1) = 1$, soit $x - 4x + 2 = 1$, donc $-3x = -1$ et $x = \frac{1}{3}$.

Alors $y = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$, donc $z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i = \frac{1-i}{3}$.

Vérification : $iz = \frac{i(1-i)}{3} = \frac{i+1}{3}$ et $2\bar{z} = \frac{2(1+i)}{3}$. La somme vaut $\frac{1+i+2+2i}{3} = \frac{3+3i}{3} = 1+i$. ✓

Réponse. $(2+i)z = 3-i \Rightarrow z = 1-i \cdot 2z + \bar{z} = 9-i \Rightarrow z = 3-i \cdot iz + 2\bar{z} = 1+i \Rightarrow z = \frac{1-i}{3}$.

Rappel de cours. Dès que $\bar{z}$ (ou $|z|$) apparaît dans une équation, on pose $z = x + iy$ et on identifie parties réelles et parties imaginaires : une équation complexe équivaut alors à DEUX équations réelles.

Erreur fréquente. Traiter $\bar{z}$ comme une constante et « diviser par $2 + \bar{z}/z$ ». La conjugaison n'est pas linéaire sur $\mathbb{C}$: seule l'identification s'applique.

Correction de l'exercice 9 - Un paramètre réel : réel, imaginaire pur, module minimal

On développe : $z_m = (m + 2i)(1 - i) = m - mi + 2i - 2i^2 = m + 2 + (2 - m)i$.

Comme m est réel, $m + 2$ et $2 - m$ sont réels : c'est bien la forme algébrique, avec $\operatorname{Re}(z_m) = m + 2$ et $\operatorname{Im}(z_m) = 2 - m$.

z_m est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle : $2 - m = 0$, donc $m = 2$.

Pour $m = 2$ on obtient $z_2 = 4$, qui est bien réel. ✓

z_m est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle : $m + 2 = 0$, donc $m = -2$.

Pour $m = -2$ on obtient $z_{-2} = 0 + 4i = 4i$, imaginaire pur et non nul. ✓

Pour le module, on travaille sur son CARRÉ, ce qui évite la racine :

$$|z_m|^2 = (m + 2)^2 + (2 - m)^2.$$

On développe : $(m^2 + 4m + 4) + (4 - 4m + m^2) = 2m^2 + 8$.

C'est un trinôme en m de coefficient dominant $2 > 0$, sans terme en m : il est minimal pour $m = 0$, et vaut alors 8.

Comme la fonction racine carrée est croissante, minimiser $|z_m|^2$ revient à minimiser $|z_m|$. Le minimum est $|z_0| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, atteint pour $m = 0$.

Contrôle : pour $m = 0$, $z_0 = 2 + 2i$, de module $\sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. ✓ Et pour $m = 2$, $|z_2| = 4 > 2\sqrt{2} \approx 2,83$. ✓

Autre lecture, plus rapide : $|z_m| = |m + 2i| \times |1 - i| = \sqrt{m^2 + 4} \times \sqrt{2}$, minimal quand m^2 l'est, donc en $m = 0$, et valant $2\sqrt{2}$. ✓ Le module multiplicatif évite tout développement.

Réponse. $z_m = (m + 2) + (2 - m)i$: réel pour $m = 2$ · imaginaire pur pour $m = -2$ · $|z_m|$ minimal pour $m = 0$, avec $|z_0| = 2\sqrt{2}$.

Rappel de cours. Pour optimiser un module, on optimise son CARRÉ : on reste dans les polynômes. Et $|zz'| = |z||z'|$ permet souvent de conclure sans développer.

Erreur fréquente. Chercher « z_m réel » en annulant m au lieu d'annuler la partie imaginaire. C'est la structure $a + bi$ du résultat qui décide, pas la lettre m .

Correction de l'exercice 10 - Plan complexe : distances, nature d'un triangle, parallélogramme

L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la différence « arrivée moins départ » :

$$b - a = (4 + i) - (1 + 2i) = 3 - i.$$

La longueur AB est le module de cette affixe : $AB = |3 - i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

De même $c - b = (3 - 2i) - (4 + i) = -1 - 3i$, donc $BC = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

Et $c - a = (3 - 2i) - (1 + 2i) = 2 - 4i$, donc $AC = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Premier constat : $AB = BC = \sqrt{10}$, le triangle est ISOCÈLE en B .

Second constat, avec les carrés (plus simples que les racines) : $AB^2 + BC^2 = 10 + 10 = 20$ et $AC^2 = 20$.

L'égalité $AB^2 + BC^2 = AC^2$ donne, par la réciproque du théorème de Pythagore, un angle droit en B .

Le triangle ABC est donc RECTANGLE ISOCÈLE en B .

Milieu de $[AC]$: son affixe est la demi-somme, $\frac{a + c}{2} = \frac{(1 + 2i) + (3 - 2i)}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Donc I a pour affixe 2 (c'est un point de l'axe des réels).

$$IB = |b - 2| = |2 + i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}. \text{ Or } \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}, \text{ donc } IB = IA = IC = \sqrt{5}.$$

On retrouve un résultat classique : dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit, de rayon la moitié de l'hypoténuse. Les points A, B, C sont sur le cercle de centre $I(2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Pour le parallélogramme, il faut faire attention à l'ORDRE des sommets. $ABCD$ parallélogramme signifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $b - a = c - d$.

On en tire $d = c - b + a = (3 - 2i) - (4 + i) + (1 + 2i) = 0 - i = -i$.

Vérification : $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $3 - i$, et $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $c - d = (3 - 2i) - (-i) = 3 - i$. ✓
Les deux vecteurs sont égaux.

Réponse. Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $3 - i$ · $AB = BC = \sqrt{10}$, $AC = 2\sqrt{5}$ · triangle rectangle isocèle en B · I a pour affixe 2 et $IB = \sqrt{5} = \frac{AC}{2}$: I est le centre du cercle circonscrit · $d = -i$.

Rappel de cours. Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A$ · $AB = |z_B - z_A|$ · milieu de $[AB]$: $\frac{z_A + z_B}{2}$ · $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$.

Erreur fréquente. Écrire $\overrightarrow{AB} = z_A - z_B$, ou confondre le parallélogramme $ABCD$ avec $ABDC$: l'ordre des lettres impose quels côtés sont parallèles.

Correction de l'exercice 11 - Ensembles de points : cercle, médiatrice, disque

Première condition : il faut d'abord la mettre sous la forme $|z - z_A|$, en factorisant le signe moins. On écrit $z - 2 + i = z - (2 - i)$.

La condition devient $|z - (2 - i)| = 3$, c'est-à-dire $AM = 3$ où A est le point d'affixe $2 - i$, donc de coordonnées $(2; -1)$.

L'ensemble des points situés à distance 3 d'un point fixe est un cercle : E_1 est le CERCLE de centre $A(2; -1)$ et de rayon 3.

Deuxième condition : on écrit les deux membres comme des distances. $|z - 1| = |z - 1|$ donne AM avec A d'affixe 1, et $|z + 3i| = |z - (-3i)|$ donne BM avec B d'affixe $-3i$.

La condition $AM = BM$ caractérise la MÉDIATRICE du segment $[AB]$, avec $A(1; 0)$ et $B(0; -3)$.

Pour l'équation cartésienne, on pose $z = x + iy$ et on élève au carré (les deux membres sont positifs, l'équivalence est conservée) : $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 3)^2$.

On développe : $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9$.

Les termes x^2 et y^2 se simplifient — c'est toujours le cas pour une médiatrice, et c'est ce qui garantit qu'on obtient une DROITE : $-2x + 1 = 6y + 9$.

D'où $-2x - 6y = 8$, soit en divisant par -2 : $x + 3y + 4 = 0$.

Contrôle : le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$. On vérifie

$\frac{1}{2} + 3 \times (-\frac{3}{2}) + 4 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 4 = 0$. ✓ Le milieu appartient bien à la droite trouvée.

Troisième condition : c'est la première avec une inégalité large. $AM \leq 3$ décrit tous les points à distance au plus 3 de A.

E_3 est donc le DISQUE FERMÉ de centre $A(2; -1)$ et de rayon 3, c'est-à-dire le cercle E_1 et son intérieur.

Réponse. E_1 : cercle de centre $A(2; -1)$ et de rayon 3 · E_2 : médiatrice de $[AB]$ avec $A(1; 0)$ et $B(0; -3)$, d'équation $x + 3y + 4 = 0$ · E_3 : disque fermé de centre $A(2; -1)$ et de rayon 3.

Rappel de cours. $|z - z_A| = AM$ · $|z - z_A| = r$: cercle · $|z - z_A| \leq r$: disque · $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de $[AB]$.

Erreur fréquente. Lire $|z - 2 + i| = 3$ comme un cercle centré en $2 + i$. Il faut écrire $z - (2 - i)$: le centre est $2 - i$, d'ordonnée -1 .

Correction de l'exercice 12 - Racines carrées d'un nombre complexe

On pose $z = x + iy$ avec x et y réels. Alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

L'égalité $z^2 = 3 + 4i$ donne, par identification, deux équations : $x^2 - y^2 = 3$ (parties réelles) et $2xy = 4$ (parties imaginaires).

Ces deux équations ne suffisent pas à conclure commodément. On en ajoute une TROISIÈME en passant aux modules : $|z|^2 = |3 + 4i|$, c'est-à-dire $|z|^2 = \sqrt{9 + 16} = 5$, soit $x^2 + y^2 = 5$.

C'est le coup de pouce décisif : en additionnant $x^2 - y^2 = 3$ et $x^2 + y^2 = 5$, on obtient $2x^2 = 8$, donc $x^2 = 4$.

En les soustrayant, $2y^2 = 2$, donc $y^2 = 1$.

On a donc $x = \pm 2$ et $y = \pm 1$, soit quatre combinaisons a priori. La deuxième équation tranche : $2xy = 4 > 0$, donc x et y sont de MÊME signe.

Il reste deux solutions : $z = 2 + i$ et $z = -2 - i$, effectivement opposées.

Vérification : $(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$. ✓ Et $(-2 - i)^2 = (2 + i)^2$ donne le même résultat. ✓

Deuxième équation, même méthode. On calcule d'abord le module :

$|-8 + 6i| = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.

Le système est $x^2 - y^2 = -8$, $x^2 + y^2 = 10$ et $2xy = 6$.

Somme des deux premières : $2x^2 = 2$, donc $x^2 = 1$. Différence : $2y^2 = 18$, donc $y^2 = 9$.

Comme $2xy = 6 > 0$, x et y sont de même signe : $z = 1 + 3i$ ou $z = -1 - 3i$.

Vérification : $(1 + 3i)^2 = 1 + 6i + 9i^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$. ✓

À retenir : le signe de $2xy$ sert uniquement à apparier les signes de x et y ; il ne donne jamais x et y séparément.

Réponse. $z^2 = 3 + 4i \Rightarrow z = 2 + i$ ou $z = -2 - i$ · $z^2 = -8 + 6i \Rightarrow z = 1 + 3i$ ou $z = -1 - 3i$.

Rappel de cours. Système des racines carrées de w : $x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(w)$, $2xy = \operatorname{Im}(w)$, $x^2 + y^2 = |w|$. Les deux racines sont toujours opposées.

Erreur fréquente. Écrire $\sqrt{3 + 4i}$. Dans $\mathbb{C}$, aucune des deux racines n'est « la » racine carrée : la notation n'a pas de sens et fait perdre une solution.

Correction de l'exercice 13 - Second degré à coefficients complexes

Ici $a = 1$, $b = -(3 + i)$ et $c = 2 + 2i$. Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (3 + i)^2 - 4(2 + 2i)$.

On développe $(3 + i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 8 + 6i$.

Puis $4(2 + 2i) = 8 + 8i$. D'où $\Delta = (8 + 6i) - (8 + 8i) = -2i$.

Le discriminant est complexe non nul : il y aura deux solutions distinctes, mais rien ne dit qu'elles seront conjuguées (les coefficients ne sont pas réels).

Cherchons $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = -2i$. Le système est $x^2 - y^2 = 0$, $2xy = -2$ et $x^2 + y^2 = |-2i| = 2$.

Somme des deux équations en x^2, y^2 : $2x^2 = 2$, donc $x^2 = 1$. Différence : $2y^2 = 2$, donc $y^2 = 1$.

Comme $2xy = -2 < 0$, x et y sont de signes contraires. On peut prendre $\delta = 1 - i$ (l'autre racine, $-1 + i$, donnerait les mêmes solutions dans l'autre ordre).

Vérification : $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$. ✓

Les solutions sont alors $z = \frac{-b \pm \delta}{2a} = \frac{(3 + i) \pm (1 - i)}{2}$.

Avec le signe $+$: $z_1 = \frac{(3 + i) + (1 - i)}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Avec le signe $-$: $z_2 = \frac{(3 + i) - (1 - i)}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$.

Vérification par la somme : $z_1 + z_2 = 2 + (1 + i) = 3 + i$, et $-\frac{b}{a} = 3 + i$. ✓

Vérification par le produit : $z_1 z_2 = 2(1 + i) = 2 + 2i$, et $\frac{c}{a} = 2 + 2i$. ✓

Observation importante : $z_1 = 2$ et $z_2 = 1 + i$ ne sont PAS conjuguées. La propriété « racines conjuguées » n'est vraie que pour des coefficients réels (exercice 7).

Réponse. $\Delta = -2i$ · $\delta = 1 - i$ · $S = \{2 ; 1 + i\}$.

Rappel de cours. Avec des coefficients complexes : $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est UNE racine carrée de Δ , calculée par le système de l'exercice 12. Somme et produit restent $-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$.

Erreur fréquente. Annoncer des racines conjuguées parce que Δ « n'est pas positif ». Ce réflexe ne vaut que si a , b et c sont réels.

Correction de l'exercice 14 - Polynôme à coefficients réels et racine complexe

Calculons d'abord les puissances utiles. $(1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$.

Puis $(1 + 2i)^3 = (1 + 2i)(-3 + 4i) = -3 + 4i - 6i + 8i^2 = -3 - 2i - 8 = -11 - 2i$.

On reporte : $P(1 + 2i) = (-11 - 2i) - 5(-3 + 4i) + 11(1 + 2i) - 15$.

On développe : $-11 - 2i + 15 - 20i + 11 + 22i - 15$.

Parties réelles : $-11 + 15 + 11 - 15 = 0$. Parties imaginaires : $-2 - 20 + 22 = 0$. Donc $P(1 + 2i) = 0$: c'est bien une racine. ✓

Pour la deuxième question, on utilise le fait que les coefficients de P sont RÉELS. Alors $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ pour tout z : la conjugaison traverse sommes, produits et puissances, et laisse les coefficients réels inchangés.

Comme $P(1 + 2i) = 0$, on obtient $P(\overline{1 + 2i}) = \overline{P(1 + 2i)} = \overline{0} = 0$.

Donc $1 - 2i$ est aussi une racine de P , sans aucun calcul supplémentaire.

Pour la factorisation, on part du produit des deux facteurs associés à ces racines conjuguées : $(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i)) = (z - 1)^2 - (2i)^2 = z^2 - 2z + 1 + 4 = z^2 - 2z + 5$.

Ce facteur est à coefficients réels : c'est toujours le cas pour un couple de racines conjuguées. On cherche donc $P(z) = (z^2 - 2z + 5)(z + \gamma)$.

On développe :

$$(z^2 - 2z + 5)(z + \gamma) = z^3 + \gamma z^2 - 2z^2 - 2\gamma z + 5z + 5\gamma = z^3 + (\gamma - 2)z^2 + (5 - 2\gamma)z + 5\gamma.$$

Identification avec $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$: le terme constant donne $5\gamma = -15$, donc $\gamma = -3$.

Contrôle sur les deux autres coefficients : $\gamma - 2 = -5$ ✓ et $5 - 2\gamma = 5 + 6 = 11$ ✓. La factorisation est cohérente : $P(z) = (z^2 - 2z + 5)(z - 3)$.

Résolution : un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Soit $z = 3$, soit $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Pour ce trinôme, $\Delta = 4 - 20 = -16 = 16i^2$, donc $z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$ — on retrouve bien les deux racines de départ. ✓

L'ensemble des solutions est $S = \{3 ; 1 + 2i ; 1 - 2i\}$. Un polynôme de degré 3 à coefficients réels a toujours au moins une racine réelle : ici 3.

Réponse. $P(1 + 2i) = 0$ · $1 - 2i$ est racine (coefficients réels) · $P(z) = (z^2 - 2z + 5)(z - 3)$ · $S = \{3 ; 1 + 2i ; 1 - 2i\}$.

Rappel de cours. Si P est à coefficients RÉELS et $P(z_0) = 0$, alors $P(\bar{z}_0) = 0$: les racines non réelles vont par paires conjuguées, et $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ est un trinôme à coefficients réels.

Erreur fréquente. Appliquer ce théorème à un polynôme à coefficients complexes. L'exercice 13, avec ses racines 2 et $1 + i$, montre qu'il est alors faux.

Correction de l'exercice 15 - Un quotient : où est-il réel ? imaginaire pur ?

$$\text{Pour } z = 2 : Z = \frac{2-1}{2-i} = \frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Passons au cas général : $z = x + iy$ donne $z - 1 = (x - 1) + iy$ et $z - i = x + i(y - 1)$.

On multiplie haut et bas par le conjugué du dénominateur, $x - i(y - 1)$. Le dénominateur devient $D = x^2 + (y - 1)^2$, réel strictement positif dès que $z \neq i$.

$$\text{Numérateur : } [(x - 1) + iy][x - i(y - 1)] = x(x - 1) - i(x - 1)(y - 1) + ixy - i^2y(y - 1).$$

$$\text{Partie réelle du numérateur : } x(x - 1) + y(y - 1).$$

$$\text{Partie imaginaire du numérateur : } xy - (x - 1)(y - 1) = xy - (xy - x - y + 1) = x + y - 1.$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(Z) = \frac{x(x - 1) + y(y - 1)}{D} \text{ et } \operatorname{Im}(Z) = \frac{x + y - 1}{D}, \text{ avec } D = x^2 + (y - 1)^2 > 0.$$

$$\text{Contrôle sur } z = 2 \text{ (soit } x = 2, y = 0) : D = 4 + 1 = 5, \operatorname{Re}(Z) = \frac{2 \times 1 + 0}{5} = \frac{2}{5} \text{ et } \operatorname{Im}(Z) = \frac{2 + 0 - 1}{5} = \frac{1}{5}. \text{ ✓ Cohérent avec la question 1.}$$

Z est réel si et seulement si $\operatorname{Im}(Z) = 0$. Comme $D > 0$, cela équivaut à $x + y - 1 = 0$.

C'est l'équation d'une droite. Elle passe par $A(1; 0)$ (car $1 + 0 - 1 = 0$) et par $B(0; 1)$ (car $0 + 1 - 1 = 0$) : c'est la droite (AB) .

Il faut exclure $z = i$, pour lequel Z n'est pas défini. L'ensemble cherché est donc la DROITE (AB) PRIVÉE du point B .

Z est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(Z) = 0$, c'est-à-dire $x(x-1) + y(y-1) = 0$, soit $x^2 + y^2 - x - y = 0$.

On reconnaît une équation de cercle, qu'on met sous forme canonique :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0, \text{ soit } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

C'est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or Ω est le milieu de $[AB]$ (demi-somme de 1 et i), et $AB = |i - 1| = \sqrt{2}$, donc le rayon vaut exactement $\frac{AB}{2}$.

L'ensemble est donc le CERCLE DE DIAMÈTRE $[AB]$, privé du point B . Interprétation géométrique : Z imaginaire pur signifie que l'angle en M entre $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ est droit — on retrouve le cercle de diamètre $[AB]$.

Réponse. $Z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ pour $z = 2 \cdot \operatorname{Re}(Z) = \frac{x(x-1) + y(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{x+y-1}{x^2 + (y-1)^2} \cdot Z$ réel : droite (AB) d'équation $x + y - 1 = 0$, privée de B · Z imaginaire pur : cercle de diamètre $[AB]$, de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$, privé de B .

Rappel de cours. Pour un quotient, on multiplie par le conjugué du dénominateur : le dénominateur devient un réel POSITIF, donc le signe et l'annulation ne dépendent que du numérateur.

Erreur fréquente. Oublier d'exclure la valeur qui annule le dénominateur. Le point B n'appartient à aucun des deux ensembles, même s'il vérifie les équations trouvées.

Correction de l'exercice 16 - Une suite de nombres complexes

$$z_1 = \frac{1+i}{2} \times 4 = 2(1+i) = 2+2i.$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2}(2+2i) = \frac{(2+2i)(1+i)}{2} = \frac{2+2i+2i+2i^2}{2} = \frac{4i}{2} = 2i.$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2} \times 2i = i(1+i) = i+i^2 = -1+i.$$

Pour le module, on utilise la multiplicativité : $|z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}\right| \times |z_n|$.

$$\text{Or } \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La suite réelle $(|z_n|)$ est donc GÉOMÉTRIQUE de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $|z_0| = 4$.

$$\text{D'où } |z_n| = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

Contrôle : $|z_1| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$, et la formule donne $4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. ✓ $|z_2| = |2i| = 2$, et la formule donne $4 \times \frac{1}{2} = 2$. ✓

Comme $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 < 1$, la suite géométrique $(|z_n|)$ tend vers 0.

Or $|z_n| = OM_n$: les points M_n se rapprochent indéfiniment de l'origine. Les premiers

termes montrent qu'ils tournent en même temps : ils décrivent une spirale qui converge vers O .

Dernière question : on cherche le plus petit n tel que $4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 0,01$.

Comme $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-1/2}$, l'inégalité s'écrit $4 \times 2^{-n/2} < 10^{-2}$, soit $2^{n/2} > 400$.

On passe au logarithme népérien (fonction strictement croissante) : $\frac{n}{2} \ln 2 > \ln 400$, donc $n > \frac{2 \ln 400}{\ln 2} \approx \frac{2 \times 5,9915}{0,6931} \approx 17,29$.

Le plus petit entier convenant est donc $n = 18$.

Vérification aux deux bornes : $|z_{17}| = 4 \times 2^{-8,5} \approx 0,0110 > 0,01$, et $|z_{18}| = 4 \times 2^{-9} = \frac{4}{512} \approx 0,0078 < 0,01$. ✓

Réponse. $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -1 + i$ · $|z_n| = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ · les points M_n décrivent une spirale et convergent vers l'origine · le plus petit entier est $n = 18$.

Rappel de cours. Si $z_{n+1} = a z_n$, alors $|z_n| = |z_0| |a|^n$: le module transforme une suite complexe en suite géométrique RÉELLE, sur laquelle tous les outils habituels s'appliquent.

Erreur fréquente. Conclure sur la limite en regardant les formes algébriques $2 + 2i$, $2i$, $-1 + i$... qui « tournent ». C'est le module, réel positif, qui décide de la convergence.

Correction de l'exercice 17 - Ensembles de points définis par z^2

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy.$$

Comme x et y sont réels, $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ et $\operatorname{Im}(z^2) = 2xy$.

z^2 est réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z^2) = 0 \Leftrightarrow 2xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

F_1 est donc la RÉUNION DES DEUX AXES du repère : l'axe des réels ($y = 0$) et l'axe des imaginaires purs ($x = 0$).

Ce résultat est instructif : z^2 peut être réel sans que z le soit. Par exemple $z = 3i$ donne $z^2 = -9$, bien réel.

z^2 est imaginaire pur $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$.

Donc $y = x$ ou $y = -x$: F_2 est la réunion des deux BISSECTRICES des axes, d'équations $y = x$ et $y = -x$.

Contrôle : pour $z = 1 + i$, on a $z^2 = 2i$, imaginaire pur ✓, et le point $(1 ; 1)$ est bien sur la droite $y = x$.

Pour F_3 : $\operatorname{Re}(z^2) = 4 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$. C'est l'équation d'une HYPERBOLE équilatère, de sommets $(2 ; 0)$ et $(-2 ; 0)$, d'asymptotes les deux bissectrices $y = \pm x$.

On peut le vérifier : le point $(2 ; 0)$ donne $4 - 0 = 4$ ✓, le point $(\sqrt{5} ; 1)$ donne $5 - 1 = 4$ ✓.

Pour F_4 : on n'a pas besoin de la forme algébrique, la multiplicativité suffit. $|z^2| = |z|^2$, donc la condition s'écrit $|z|^2 = 4$, soit $|z| = 2$ (le module est positif).

F_4 est donc le CERCLE de centre O et de rayon 2.

Comparaison utile : $\operatorname{Re}(z^2) = 4$ donne une hyperbole, tandis que $|z^2| = 4$ donne un cercle. Une condition sur une partie et une condition sur le module ne décrivent pas du tout les mêmes objets.

Réponse. $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ et $\operatorname{Im}(z^2) = 2xy$ · F_1 : réunion des deux axes · F_2 : les deux

bissectrices $y = x$ et $y = -x$ · F_3 : hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 4$ · F_4 : cercle de centre O et de rayon 2.

Rappel de cours. $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$. Une condition « est réel » annule la partie imaginaire, « est imaginaire pur » annule la partie réelle, une condition sur le module donne un cercle.

Erreur fréquente. Croire que « z^2 réel » entraîne « z réel ». $i^2 = -1$ est réel alors que i ne l'est pas : l'ensemble F_1 contient tout l'axe des imaginaires purs.

Correction de l'exercice 18 - Résoudre $z^2 = \text{conjugué de } z$

Si $z^2 = \bar{z}$, alors les deux nombres ont le même module : $|z^2| = |\bar{z}|$.

Or $|z^2| = |z|^2$ et $|\bar{z}| = |z|$. On obtient donc l'équation RÉELLE $|z|^2 = |z|$.

Elle s'écrit $|z|(|z| - 1) = 0$, d'où $|z| = 0$ ou $|z| = 1$. Passer au module a transformé une équation complexe en une équation du second degré à une inconnue réelle : c'est là tout l'intérêt de la manœuvre.

Ce premier résultat annonce la géométrie de la solution : l'origine, et des points du cercle unité.

Résolution complète. On pose $z = x + iy$: alors $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ et $\bar{z} = x - iy$.

Identification des parties réelles : $x^2 - y^2 = x$. Identification des parties imaginaires : $2xy = -y$.

On traite la seconde équation, la plus simple : $2xy + y = 0$, soit $y(2x + 1) = 0$. Donc $y = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

Premier cas, $y = 0$. La première équation devient $x^2 = x$, soit $x(x - 1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. Cela donne les solutions $z = 0$ et $z = 1$.

Second cas, $x = -\frac{1}{2}$. La première équation devient $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$, soit $y^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

D'où $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, et les solutions $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vérification sur l'une d'elles :

$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, qui est bien le conjugué du nombre de départ. ✓

L'ensemble des solutions est $S = \left\{0 ; 1 ; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$: quatre solutions, conformes à la question 1 (une de module 0, trois de module 1).

Contrôle des modules : $\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$. ✓

Géométrie : les trois solutions non nulles sont sur le cercle de centre O et de rayon 1. Les distances entre elles valent $\left|1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right| = \left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$, et $|\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$ entre les deux conjuguées.

Les trois points forment donc un TRIANGLE ÉQUILATÉRAL de côté $\sqrt{3}$ inscrit dans le cercle unité. Ce n'est pas un hasard : pour $z \neq 0$ de module 1, on a $\bar{z} = \frac{1}{z}$, donc l'équation devient $z^2 = \frac{1}{z}$, c'est-à-dire $z^3 = 1$ — ce sont les trois racines cubiques de l'unité.

Réponse. $S = \left\{0 ; 1 ; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ · les trois solutions non nulles sont les racines cubiques de 1 et forment un triangle équilatéral de côté $\sqrt{3}$ inscrit dans le cercle unité.

Rappel de cours. Passer au module transforme une équation complexe en équation réelle : $|z^2| = |z|^2$, $|\bar{z}| = |z|$. Et si $|z| = 1$, alors $z\bar{z} = 1$, donc $\bar{z} = \frac{1}{z}$ — un remplacement très efficace.

Erreur fréquente. Simplifier $2xy = -y$ par y sans discuter. On perdrait les solutions $z = 0$ et $z = 1$, qui correspondent précisément à $y = 0$.

Correction de l'exercice 19 - Identité du parallélogramme et théorème de la médiane

On part de $|w|^2 = w\bar{w}$, appliquée à $w = u + v$: $|u + v|^2 = (u + v)(\overline{u + v}) = (u + v)(\bar{u} + \bar{v})$.

On développe : $|u + v|^2 = u\bar{u} + u\bar{v} + v\bar{u} + v\bar{v} = |u|^2 + |v|^2 + (u\bar{v} + v\bar{u})$.

De même avec $w = u - v$: $|u - v|^2 = (u - v)(\bar{u} - \bar{v}) = |u|^2 + |v|^2 - (u\bar{v} + v\bar{u})$.

En additionnant les deux lignes, le terme $u\bar{v} + v\bar{u}$ disparaît :

$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$. C'est l'identité annoncée.

Remarque : $u\bar{v} + v\bar{u} = u\bar{v} + \overline{u\bar{v}} = 2\operatorname{Re}(u\bar{v})$, un réel. C'est ce terme qui portera plus tard l'information d'angle (produit scalaire) ; ici, il s'élimine.

Interprétation : dans un parallélogramme construit sur deux vecteurs d'affixes u et v , les diagonales ont pour longueurs $|u + v|$ et $|u - v|$, les côtés $|u|$ et $|v|$ (chacun deux fois).

L'identité dit donc que la SOMME DES CARRÉS DES DEUX DIAGONALES est égale à la somme des carrés des quatre côtés. C'est l'identité du parallélogramme.

Passons au théorème de la médiane. On pose $u = b - a$ (affixe de $\overrightarrow{AB}$) et $v = c - a$ (affixe de $\overrightarrow{AC}$), de sorte que $|u| = AB$ et $|v| = AC$.

Calculons $u + v = (b - a) + (c - a) = b + c - 2a = 2\left(\frac{b + c}{2} - a\right)$.

Or $\frac{b + c}{2}$ est l'affixe du milieu I de $[BC]$. Donc $|u + v| = 2|z_I - a| = 2AI$.

Et $u - v = (b - a) - (c - a) = b - c$, donc $|u - v| = BC$.

L'identité de la question 1 donne alors $(2AI)^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$, soit $4AI^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$.

En divisant par 2 : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$. C'est le théorème de la médiane.

Vérification numérique. Avec $a = 1 + 2i$, $b = 4 + i$, $c = 3 - 2i$: $AB^2 = |3 - i|^2 = 10$ et $AC^2 = |2 - 4i|^2 = 20$, donc le membre de gauche vaut 30.

Milieu I de $[BC]$: $z_I = \frac{(4 + i) + (3 - 2i)}{2} = \frac{7 - i}{2}$.

$AI = \left| \frac{7 - i}{2} - (1 + 2i) \right| = \left| \frac{7 - i - 2 - 4i}{2} \right| = \left| \frac{5 - 5i}{2} \right| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, donc $AI^2 = \frac{50}{4} = 12,5$.

$BC^2 = |-1 - 3i|^2 = 10$. Le membre de droite vaut $2 \times 12,5 + \frac{10}{2} = 25 + 5 = 30$. ✓ Les deux membres coïncident.

Réponse. $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ · dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des quatre côtés ·

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$ · vérification : $30 = 25 + 5$. ✓

Rappel de cours. $|w|^2 = w\bar{w}$ est l'outil central : il transforme un carré de distance en produit, donc une question géométrique en calcul algébrique. À retenir aussi :

$$u\bar{v} + \overline{u\bar{v}} = 2\operatorname{Re}(u\bar{v}).$$

Erreur fréquente. Écrire $|u + v| = |u| + |v|$ au début du calcul. L'identité démontrée ici est justement ce qui remplace cette égalité fausse.

Correction de l'exercice 20 - Problème de synthèse : l'application $z \mapsto (z - 1)/(z + 1)$

Pour $z = i$: $Z = \frac{i-1}{i+1}$. On multiplie haut et bas par le conjugué $1 - i$ du dénominateur.

Numérateur : $(i - 1)(1 - i) = i - i^2 - 1 + i = i + 1 - 1 + i = 2i$. Dénominateur : $(1 + i)(1 - i) = 1 + 1 = 2$.

$$\text{Donc } Z = \frac{2i}{2} = i.$$

Cas général : $z - 1 = (x - 1) + iy$ et $z + 1 = (x + 1) + iy$. On multiplie par le conjugué du dénominateur, $(x + 1) - iy$.

Dénominateur : $D = (x + 1)^2 + y^2$, réel strictement positif dès que $z \neq -1$.

Numérateur : $[(x - 1) + iy][(x + 1) - iy] = (x - 1)(x + 1) - i(x - 1)y + iy(x + 1) - i^2y^2$.

Partie réelle du numérateur : $(x^2 - 1) + y^2$. Partie imaginaire : $y[(x + 1) - (x - 1)] = 2y$.

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{D} \text{ et } \operatorname{Im}(Z) = \frac{2y}{D}, \text{ avec } D = (x + 1)^2 + y^2 > 0.$$

Contrôle sur $z = i$ ($x = 0, y = 1$) : $D = 1 + 1 = 2$, $\operatorname{Re}(Z) = \frac{0 + 1 - 1}{2} = 0$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{2}{2} = 1$, soit $Z = i$. ✓ Cohérent avec la question 1.

Z est réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow 2y = 0$ (car $D > 0$) $\Leftrightarrow y = 0$.

E est donc l'AXE DES RÉELS privé du point B d'affixe -1 (où Z n'est pas défini) : c'est la droite (AB) privée de B .

C'est cohérent : si z est réel, $\frac{z-1}{z+1}$ est un quotient de deux réels, donc réel.

Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

F est donc le CERCLE DE CENTRE O ET DE RAYON 1, privé du point $B(-1)$.

Remarquons que A appartient à cet ensemble : pour $z = 1$, on obtient $Z = 0$, dont la partie réelle est bien nulle.

Interprétation géométrique : $x^2 + y^2 = 1$ s'écrit $OM = 1$, et le cercle unité est le cercle de diamètre $[BA]$ — on retrouve l'angle droit vu à l'exercice 15.

Pour G , inutile de repasser par la forme algébrique : on utilise $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \frac{|z-1|}{|z+1|}$.

La condition $|Z| = 1$ équivaut donc à $|z - 1| = |z + 1|$, c'est-à-dire $AM = BM$ avec $A(1)$ et $B(-1)$.

G est la MÉDIATRICE de $[AB]$. Comme A et B sont symétriques par rapport à l'origine sur l'axe des réels, cette médiatrice est l'AXE DES IMAGINAIRES PURS, d'équation $x = 0$ (le point B n'y est pas, aucune exclusion n'est nécessaire).

Contrôle : pour $z = i$, on avait trouvé $Z = i$, de module 1 ✓, et le point $M(i)$ est bien sur l'axe des imaginaires purs. ✓

Enfin, $Z = 2$ s'écrit $\frac{z-1}{z+1} = 2$, soit $z - 1 = 2(z + 1)$ (licite car $z \neq -1$).

On développe : $z - 1 = 2z + 2$, donc $-z = 3$ et $z = -3$.

Vérification : $\frac{-3-1}{-3+1} = \frac{-4}{-2} = 2$. ✓ Et le point d'affixe -3 est bien sur l'axe des réels,

conformément à la question 3.

Réponse. $Z = i$ pour $z = i$ · $\text{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2}$ et $\text{Im}(Z) = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}$ · E : axe des réels privé de $B(-1)$ · F : cercle de centre O et de rayon 1, privé de B · G : axe des imaginaires purs · $Z = 2 \Leftrightarrow z = -3$.

Rappel de cours. Trois traductions à connaître : Z réel $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0$ · Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0$ · $|Z| = 1 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$, donc médiatrice. La troisième se traite sans jamais développer.

Erreur fréquente. Développer la forme algébrique pour la question sur $|Z| = 1$. La multiplicativité du module donne le résultat en deux lignes : chercher la méthode courte fait partie de l'exercice.