

Nombres complexes (forme algébrique)**— Terminale maths expertes****20 exercices corrigés · mathlvl.fr**

Énoncés

Présentation

Les nombres complexes naissent d'une décision : on ajoute aux réels un nombre i tel que $i^2 = -1$, et tout devient calculable — les équations du second degré ont toujours deux solutions, la géométrie du plan se traite par le calcul. Ces 20 exercices corrigés couvrent toute la forme algébrique du programme de maths expertes : partie réelle et partie imaginaire, conjugué, module, inverse et quotient, équations à coefficients réels puis complexes, racines carrées d'un nombre complexe, points et vecteurs dans le plan complexe, ensembles de points. Deux outils reviennent en permanence et méritent d'être automatisés : l'identification $x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$, qui ramène une équation complexe à un système réel, et la relation $|z|^2 = z\bar{z}$, qui transforme une distance en produit. La difficulté est croissante : les quatre derniers exercices sont des problèmes de synthèse type bac, entièrement rédigés.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/nombres-complexes-forme-algebrique

Exercice 1 - Forme algébrique, partie réelle et partie imaginaire

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes contient les réels et un nombre i vérifiant $i^2 = -1$. Tout nombre complexe s'écrit de façon UNIQUE sous la forme $z = x + iy$ avec x et y réels : c'est sa forme algébrique, $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. On pose $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 7i$ et $z_3 = -4$.

1. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 , z_2 et z_3 . Lesquels sont réels ? imaginaires purs ?
2. Écrire $A = z_1 + (-2 + 8i)$ sous forme algébrique.
3. Déterminer les réels x et y tels que $(2x + 3) + (y - 1)i = 5 - 4i$.

Exercice 2 - Les puissances de i

La seule règle nouvelle est $i^2 = -1$: tout le reste du calcul complexe suit les règles habituelles de l'algèbre.

1. Calculer i^2 , i^3 , i^4 et i^5 .
2. En déduire i^{2026} .
3. Calculer $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2026}$.
4. Calculer $(1 + i)^2$, puis $(1 + i)^{10}$.

Exercice 3 - Somme, produit et identités remarquables

On pose $z = 3 + 2i$ et $z' = 1 - 4i$. Les calculs se mènent comme avec des expressions littérales, en remplaçant i^2 par -1 à la fin.

1. Calculer $z + z'$ et $z - z'$.

2. Calculer $z \times z'$.
3. Calculer $(2 - i)^2$ et $(3 + 2i)(3 - 2i)$.
4. Calculer $(1 + i)^3$.

Exercice 4 - Conjugué : calculs et propriétés

Le conjugué de $z = x + iy$ (avec x, y réels) est $\bar{z} = x - iy$. On pose $z = 5 - 3i$.

1. Calculer $\bar{z}$, $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ et $z\bar{z}$.
2. Démontrer que pour tout complexe $z = x + iy$: $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ et $z\bar{z} = x^2 + y^2$.
3. Calculer $\overline{(2 + i)(3 - 4i)}$ de deux façons différentes.

Exercice 5 - Inverse et quotient : la quantité conjuguée

Mettre un quotient sous forme algébrique repose sur une seule idée : multiplier le numérateur et le dénominateur par le CONJUGUÉ DU DÉNOMINATEUR, ce qui rend celui-ci réel (exercice 3).

1. Écrire $\frac{1}{2 - 5i}$ sous forme algébrique.
2. Écrire $\frac{3 + i}{2 - 5i}$ sous forme algébrique.
3. Écrire $\frac{1 + i}{1 - i}$ sous forme algébrique.
4. Écrire $\frac{2 - 3i}{i}$ sous forme algébrique.

Exercice 6 - Module et ses propriétés multiplicatives

Le module de $z = x + iy$ est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$: c'est la distance de l'origine au point d'abscisse x et d'ordonnée y . On pose $z = 3 - 4i$ et $z' = -1 + i$.

1. Calculer $|z|$ et $|z'|$, puis vérifier que $z\bar{z} = |z|^2$.
2. Calculer zz' puis $|zz'|$. Comparer avec $|z| \times |z'|$.
3. Calculer $\left|\frac{z}{z'}\right|$ et $|z^4|$ sans calculer z^4 .
4. Comparer $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$.

Exercice 7 - Second degré à coefficients réels

Dans $\mathbb{C}$, une équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients RÉELS avec $a \neq 0$ admet toujours deux solutions (éventuellement confondues). Lorsque $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, elles sont conjuguées l'une de l'autre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + 2z + 5 = 0$.
3. Factoriser $z^2 - 4z + 13$, puis vérifier la somme et le produit des racines.

Exercice 8 - Équations linéaires et équations avec le conjugué

Une équation où z apparaît seul se résout comme dans $\mathbb{R}$, par division. Dès que $\bar{z}$ apparaît, ce n'est plus possible : on repasse par la forme algébrique $z = x + iy$ et on identifie.

1. Résoudre $(2 + i)z = 3 - i$.
2. Résoudre $2z + \bar{z} = 9 - i$.
3. Résoudre $iz + 2\bar{z} = 1 + i$.

Exercice 9 - Un paramètre réel : réel, imaginaire pur, module minimal

Pour tout réel m , on pose $z_m = (m + 2i)(1 - i)$.

1. Écrire z_m sous forme algébrique (en fonction de m).
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles z_m est réel.
3. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles z_m est imaginaire pur.
4. Déterminer m pour que $|z_m|$ soit minimal, et donner ce minimum.

Exercice 10 - Plan complexe : distances, nature d'un triangle, parallélogramme

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = 4 + i$ et $c = 3 - 2i$.

1. Déterminer l'afixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis calculer les longueurs AB , BC et AC .
2. En déduire la nature du triangle ABC .
3. Déterminer l'afixe du milieu I de $[AC]$, et calculer IB . Qu'en déduit-on ?
4. Déterminer l'afixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 11 - Ensembles de points : cercle, médiatrice, disque

M désigne le point d'afixe z dans le plan complexe. On cherche à décrire géométriquement des ensembles de points définis par une condition sur z . La clé est de lire $|z - z_A|$ comme la distance AM .

1. Déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que $|z - 2 + i| = 3$.
2. Déterminer l'ensemble E_2 des points M tels que $|z - 1| = |z + 3i|$, puis en donner une équation cartésienne.
3. Déterminer l'ensemble E_3 des points M tels que $|z - 2 + i| \leq 3$.

Exercice 12 - Racines carrées d'un nombre complexe

Dans $\mathbb{C}$, tout nombre non nul admet exactement DEUX racines carrées, opposées l'une de l'autre. Il n'existe pas de notation $\sqrt{}$ pour les désigner : on les calcule. La méthode consiste à poser $z = x + iy$ et à écrire trois équations, dont une venant du module.

1. Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = 3 + 4i$.
2. Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = -8 + 6i$.

Exercice 13 - Second degré à coefficients complexes

La formule du discriminant reste valable lorsque les coefficients sont complexes, à une différence près : il faut calculer soi-même une racine carrée δ de Δ (méthode de l'exercice 12), et les racines ne sont plus conjuguées. On considère l'équation $z^2 - (3 + i)z + (2 + 2i) = 0$.

1. Calculer le discriminant Δ de cette équation.
2. Déterminer une racine carrée δ de Δ .
3. En déduire les solutions de l'équation, puis vérifier par la somme et le produit.

Exercice 14 - Polynôme à coefficients réels et racine complexe

On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 5z^2 + 11z - 15$, dont tous les coefficients sont réels.

1. Vérifier que $1 + 2i$ est une racine de P .
2. En déduire, sans nouveau calcul, une autre racine de P . Justifier.
3. Factoriser $P(z)$ sous la forme $(z^2 + \alpha z + \beta)(z + \gamma)$ avec α, β, γ réels.
4. Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 15 - Un quotient : où est-il réel ? imaginaire pur ?

On note A et B les points d'affixes 1 et i . Pour tout complexe $z \neq i$, on pose $Z = \frac{z-1}{z-i}$. L'objectif est de traduire deux conditions sur Z en deux ensembles de points $M(z)$.

1. Calculer Z pour $z = 2$.
2. En posant $z = x + iy$, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z .
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel.
4. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 16 - Une suite de nombres complexes

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par $z_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note M_n le point d'affixe z_n .

1. Calculer z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique.
2. Exprimer $|z_n|$ en fonction de n .
3. En déduire le comportement des points M_n lorsque n devient grand.
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $|z_n| < 0,01$.

Exercice 17 - Ensembles de points définis par z^2

M est le point d'affixe $z = x + iy$, avec x et y réels. On étudie les conditions portant sur z^2 . On commence par établir la forme algébrique de z^2 .

1. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z^2 .
2. Déterminer l'ensemble F_1 des points M tels que z^2 soit réel.
3. Déterminer l'ensemble F_2 des points M tels que z^2 soit imaginaire pur.

4. Déterminer l'ensemble F_3 des points M tels que $\operatorname{Re}(z^2) = 4$, puis l'ensemble F_4 des points M tels que $|z^2| = 4$.

Exercice 18 - Résoudre $z^2 = \overline{z}$ = conjugué de z

On cherche tous les nombres complexes z vérifiant $z^2 = \overline{z}$. L'exercice se traite de deux façons : par le module d'abord (rapide et éclairant), puis par la forme algébrique (complète et sûre).

1. En passant aux modules, montrer que toute solution vérifie $|z| = 0$ ou $|z| = 1$.
2. Résoudre l'équation en posant $z = x + iy$.
3. Placer les solutions dans le plan complexe et décrire la figure obtenue.

Exercice 19 - Identité du parallélogramme et théorème de la médiane

On démontre ici une identité générale sur les modules, puis on en tire un théorème de géométrie. L'outil unique est la relation $|w|^2 = w\overline{w}$, qui transforme un carré de longueur en produit — donc en calcul algébrique.

1. Démontrer que pour tous nombres complexes u et v :
 $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$.
2. Interpréter cette égalité dans un parallélogramme.
3. Soient A, B, C trois points d'affixes a, b, c , et I le milieu de $[BC]$. Démontrer que
 $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.
4. Vérifier cette formule sur $A(1 + 2i)$, $B(4 + i)$ et $C(3 - 2i)$.

Exercice 20 - Problème de synthèse : l'application $z \mapsto (z - 1)/(z + 1)$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. On note A et B les points d'affixes 1 et -1 . Pour tout complexe $z \neq -1$, on pose $Z = \frac{z-1}{z+1}$, et M est le point d'affixe z . Ce problème rassemble tous les outils du chapitre : forme algébrique d'un quotient, module, ensembles de points.

1. Calculer Z lorsque $z = i$.
2. En posant $z = x + iy$, déterminer $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$.
3. Déterminer l'ensemble E des points M tels que Z soit réel.
4. Déterminer l'ensemble F des points M tels que Z soit imaginaire pur.
5. Déterminer l'ensemble G des points M tels que $|Z| = 1$, en raisonnant sans forme algébrique. Puis résoudre $Z = 2$.