

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Un nombre complexe non nul se repère par deux données géométriques : sa distance à l'origine, le module r , et l'angle que fait son vecteur avec l'axe des réels, l'argument θ . D'où les deux écritures $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$, et surtout la propriété qui fait toute la puissance du chapitre : MULTIPLIER deux complexes revient à multiplier les modules et à AJOUTER les arguments. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout le programme de maths expertes sur la forme trigonométrique et exponentielle : passage entre les trois écritures, propriétés de l'argument, formule de Moivre et calcul de puissances, formules d'Euler et linéarisation, factorisation par l'angle moitié, rotations et similitudes, ensembles de points définis par un argument, racines n -ièmes de l'unité et d'un complexe quelconque. La difficulté est croissante et les quatre derniers exercices sont des problèmes de synthèse type bac, entièrement rédigés.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/nombres-complexes-forme-trigonometrique

Exercice 1 - Module, argument, forme trigonométrique et exponentielle

Pour $z \neq 0$, le module $r = |z|$ est la distance OM , et un argument $\theta = \arg(z)$ est une mesure de l'angle entre l'axe des réels et $\overrightarrow{OM}$. On a alors $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$. On considère $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

1. Calculer $|z_1|$, puis déterminer un argument de z_1 .
2. Écrire z_1 sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle.
3. Faire de même pour z_2 .

Exercice 2 - De la forme exponentielle à la forme algébrique

Le passage en sens inverse ne demande que les valeurs remarquables du cosinus et du sinus.

1. Donner la forme algébrique de $4e^{i\pi/3}$ et de $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
2. Donner la forme algébrique de $2e^{i\pi}$ et de $5e^{-i\pi/2}$.
3. Donner la forme algébrique de $e^{5i\pi/6}$.

Exercice 3 - Forme exponentielle de nombres particuliers

Les réels et les imaginaires purs ont des arguments remarquables : c'est l'occasion de vérifier qu'on ne confond pas « signe » et « module ».

1. Écrire sous forme exponentielle : -3 , $2i$ et $-5i$.
2. Écrire sous forme exponentielle : $\sqrt{3} - i$ et $-1 - i$.

Exercice 4 - Propriétés du module et de l'argument

Toute la puissance de la forme exponentielle vient d'une règle : multiplier des complexes, c'est multiplier les modules et AJOUTER les arguments. On pose $z = 2e^{i\pi/3}$ et $z' = 3e^{i\pi/6}$.

1. Donner la forme exponentielle de zz' , puis sa forme algébrique.
2. Donner la forme exponentielle de $\frac{z}{z'}$ et de $\frac{1}{z}$.
3. Donner la forme exponentielle de $\bar{z}$ et de $-z$.
4. Calculer z^5 sous forme exponentielle.

Exercice 5 - Valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$

On veut les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{12}$ (soit 15°), qui ne figurent pas dans le tableau des valeurs remarquables. L'idée : fabriquer l'angle $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ par un QUOTIENT, puis calculer ce quotient de deux façons. On pose $z = 1 + i$ et $w = \sqrt{3} + i$.

1. Écrire z et w sous forme exponentielle.
2. En déduire la forme exponentielle de $Z = \frac{z}{w}$.
3. Calculer Z sous forme algébrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 6 - Formule de Moivre : calculer des puissances

La formule de Moivre s'écrit $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, ou plus simplement $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Elle transforme un calcul de puissance en un calcul d'angle.

1. Calculer $(1 + i)^{12}$.
2. Calculer $(\sqrt{3} + i)^6$.
3. Calculer $(-1 + i)^{10}$, et vérifier le résultat par une autre méthode.

Exercice 7 - Quand une puissance est-elle réelle ?

On pose $z = 1 + i\sqrt{3}$ et, pour tout entier naturel n , $z_n = z^n$.

1. Écrire z sous forme exponentielle, puis z^n .
2. Déterminer les entiers n pour lesquels z^n est réel.
3. Déterminer les entiers n pour lesquels z^n est imaginaire pur.
4. Donner la forme algébrique de z^{2026} .

Exercice 8 - Racines n -ièmes de l'unité

On appelle racines n -ièmes de l'unité les solutions de l'équation $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$.

1. Résoudre $z^4 = 1$, et donner les solutions sous forme algébrique.
2. Résoudre $z^6 = 1$, et donner les solutions sous forme algébrique.

3. Démontrer que la somme des n racines n -ièmes de l'unité est nulle (pour $n \geq 2$).
4. Décrire la figure formée par ces points.

Exercice 9 - Résoudre une équation $z^3 = a$

On résout l'équation $z^3 = 8i$ dans $\mathbb{C}$. La méthode est celle de l'exercice précédent, appliquée à un second membre quelconque : on met les deux côtés sous forme exponentielle et on identifie module et argument.

1. Écrire $8i$ sous forme exponentielle.
2. Résoudre $z^3 = 8i$ et donner les solutions sous forme algébrique.
3. Vérifier l'une des solutions par le calcul direct.

Exercice 10 - Formules d'Euler

Les formules d'Euler $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ font le chemin inverse de Moivre : elles transforment de la trigonométrie en calcul algébrique sur des exponentielles.

1. Démontrer les deux formules d'Euler.
2. En déduire que $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ et $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$.
3. Démontrer que $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$.

Exercice 11 - Linéariser une puissance de cosinus ou de sinus

Linéariser, c'est transformer une PUISSANCE de cos ou sin en une somme de cosinus et sinus d'angles multiples — la forme qui se dérive et s'intègre directement. La méthode : Euler, binôme de Newton, puis regroupement des termes conjugués.

1. Linéariser $\cos^3 \theta$.
2. Linéariser $\sin^4 \theta$.
3. Vérifier les deux résultats sur des valeurs particulières.

Exercice 12 - Moivre : exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$

C'est l'opération inverse de la linéarisation : on part d'un angle multiple pour l'exprimer en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. L'outil est la formule de Moivre, développée par le binôme.

1. En développant $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$, exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$.
2. En déduire que $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ et $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$.
3. Vérifier la première formule pour $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 13 - Factorisation par l'angle moitié

Une somme comme $1 + e^{i\theta}$ n'est ni un produit ni une exponentielle : on ne peut pas en lire directement le module et l'argument. La factorisation par l'angle moitié résout ce problème, et c'est l'outil clé des sommes trigonométriques.

1. Démontrer que pour tout réel θ : $1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$.
2. En déduire le module et un argument de $1 + e^{i\theta}$ pour $\theta \in]-\pi; \pi[$.
3. Démontrer de même que $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$.
4. Application : donner la forme exponentielle de $1 + e^{i\pi/3}$.

Exercice 14 - Rotations et similitudes

Multiplier par $e^{i\alpha}$ fait tourner d'un angle α autour de l'origine ; multiplier par un réel $k > 0$ agrandit d'un facteur k . D'où l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

1. Déterminer l'axe de l'image de $A(3 + i)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'axe de l'image de $A(3 + i)$ par la rotation de centre $\Omega(1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3. Caractériser la transformation qui, à tout point d'axe z , associe le point d'axe $z' = (1 + i)z$.

Exercice 15 - Nature d'un triangle par un quotient d'axes

Le quotient $Z = \frac{c - a}{b - a}$ contient toute l'information sur le triangle ABC vu depuis A : son module vaut $\frac{AC}{AB}$, et son argument est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

1. On pose $A(2 + i)$, $B(5 + 2i)$ et $C(1 + 4i)$. Calculer $Z = \frac{c - a}{b - a}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC .
3. On pose maintenant $O(0)$, $D(2)$ et $E(1 + i\sqrt{3})$. Déterminer la nature du triangle ODE par la même méthode.

Exercice 16 - Ensembles de points définis par un argument

Un module traduit une distance, un argument traduit un angle : les ensembles obtenus ne sont donc pas les mêmes. M est le point d'axe z , et A, B les points d'axes 1 et -1 .

1. Déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
2. Déterminer l'ensemble E_2 des points M tels que $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.
3. Déterminer l'ensemble E_3 des points M tels que $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Exercice 17 - Racines quatrièmes et factorisation de $z^4 + 4$

On résout $z^4 = -4$ dans $\mathbb{C}$, puis on exploite les solutions pour factoriser le polynôme $z^4 + 4$ en produit de deux trinômes à coefficients RÉELS.

1. Résoudre $z^4 = -4$ et donner les solutions sous forme algébrique.
2. En déduire une factorisation de $z^4 + 4$ en produit de deux trinômes à coefficients réels.

3. Vérifier la factorisation par développement.**Exercice 18 - Suite de points sur un cercle**

On définit la suite (z_n) par $z_0 = 4$ et $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} z_n$. On note M_n le point d'affixe z_n .

1. Écrire la raison $q = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ sous forme exponentielle.
2. Exprimer z_n en fonction de n , et en déduire que tous les points M_n sont sur un même cercle.
3. Montrer que la suite (z_n) est périodique et déterminer sa période.
4. Donner la forme algébrique de z_5 , puis calculer $z_0 + z_1 + \dots + z_{11}$.

Exercice 19 - Somme de cosinus par la suite géométrique

On cherche une expression close de $C_n = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos(n\theta)$, pour θ non multiple de 2π . Une somme de cosinus ne se calcule pas directement — mais la somme des exponentielles correspondantes, elle, est GÉOMÉTRIQUE.

1. Justifier que $C_n = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right)$, puis calculer cette somme.

2. À l'aide de la factorisation par l'angle moitié, montrer que

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

3. En déduire C_n , puis vérifier la formule pour $n = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 20 - Problème de synthèse : une similitude et sa spirale

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. On considère la transformation f qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z - i$. On note A_0 le point d'affixe 2, et pour tout entier n , $A_{n+1} = f(A_n)$. On note a_n l'affixe de A_n .

1. Déterminer l'unique point Ω invariant par f (c'est-à-dire tel que $f(\Omega) = \Omega$).
2. Montrer que pour tout z , $z' - 1 = (1 + i)(z - 1)$. En déduire la nature de f .
3. Calculer a_1 , a_2 et a_3 .
4. Montrer que $a_n = 1 + (\sqrt{2})^n e^{inn\pi/4}$, puis exprimer la distance ΩA_n .
5. Déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega A_n > 1000$, puis les entiers n pour lesquels A_n appartient à la demi-droite $[\Omega A_0)$.

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Module, argument, forme trigonométrique et exponentielle

Module de z_1 : $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Pour l'argument, on factorise le module : $z_1 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$.

On cherche donc θ tel que $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ET $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Les deux valeurs sont positives : θ est dans le premier quadrant, et $\theta = \frac{\pi}{4}$ convient.

D'où $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, c'est-à-dire $z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$.

Il faut TOUJOURS les deux équations : $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ seul laisserait aussi $\theta = -\frac{\pi}{4}$, qui a le mauvais sinus.

Passons à $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$. Module : $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

On factorise : $z_2 = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$.

On cherche θ tel que $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Cosinus négatif et sinus positif : le point est dans le deuxième quadrant, et $\theta = \frac{2\pi}{3}$ convient.

D'où $z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2e^{2i\pi/3}$.

Contrôle : $2e^{2i\pi/3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + i\sqrt{3}$. ✓

Remarque : l'argument n'est défini qu'à 2π près. $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$ sont deux arguments du même nombre.

Réponse. $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$. $z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2e^{2i\pi/3}$.

Rappel de cours. Méthode en trois temps : (1) calculer $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; (2) factoriser $z = r \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}i \right)$; (3) trouver θ vérifiant $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ET $\sin \theta = \frac{y}{r}$.

Erreur fréquente. Déterminer θ avec le seul cosinus (ou la seule tangente). Deux angles opposés ont le même cosinus : c'est le sinus qui départage les quadrants.

Correction de l'exercice 2 - De la forme exponentielle à la forme algébrique

$$4e^{i\pi/3} = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

Contrôle par le module : $|2 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{4 + 12} = 4$. ✓ C'est bien le module annoncé.

$$3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

On utilise ici la parité : $\cos(-\theta) = \cos \theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin \theta$.

$2e^{i\pi} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1 + 0i) = -2$. Un argument π caractérise les réels

strictement négatifs.

$$5e^{-i\pi/2} = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5(0 - i) = -5i.$$

$$e^{5i\pi/6} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Repère utile : $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6}$.

Contrôle : le module de $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ vaut $\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$. ✓ Cohérent avec $|e^{i\theta}| = 1$.

Réponse. $4e^{i\pi/3} = 2 + 2i\sqrt{3} \cdot 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \cdot 2e^{i\pi} = -2 \cdot$

$$5e^{-i\pi/2} = -5i \cdot e^{5i\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Rappel de cours. $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout réel θ : dans $re^{i\theta}$, tout le module est porté par r .

Valeurs à connaître : $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{-i\pi/2} = -i$, $e^{2i\pi} = 1$.

Erreur fréquente. Oublier de multiplier PAR le module : $4e^{i\pi/3}$ ne vaut pas $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, il faut multiplier les deux parties par 4.

Correction de l'exercice 3 - Forme exponentielle de nombres particuliers

-3 est un réel négatif. Son module est $|-3| = 3$ (le module est toujours POSITIF), et son argument est π .

Donc $-3 = 3e^{i\pi}$. Écrire $-3e^{i \times 0}$ serait faux : -3 n'est pas un module.

$2i$: module 2, et le point est sur l'axe des imaginaires vers le haut, donc argument $\frac{\pi}{2}$.

D'où $2i = 2e^{i\pi/2}$.

$-5i$: module 5, point sur l'axe des imaginaires vers le bas, donc argument $-\frac{\pi}{2}$. D'où

$$-5i = 5e^{-i\pi/2}.$$

$\sqrt{3} - i$: module $\sqrt{3+1} = 2$. On factorise : $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$.

On cherche θ avec $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{2}$: cosinus positif, sinus négatif, donc quatrième quadrant, et $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

D'où $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$.

$-1 - i$: module $\sqrt{2}$, et $-1 - i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

Cosinus et sinus tous deux négatifs : troisième quadrant, donc $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ (ou $\frac{5\pi}{4}$, c'est le même angle modulo 2π).

D'où $-1 - i = \sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$.

Contrôle : $\sqrt{2}e^{-3i\pi/4} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$. ✓

Réponse. $-3 = 3e^{i\pi} \cdot 2i = 2e^{i\pi/2} \cdot -5i = 5e^{-i\pi/2} \cdot \sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6} \cdot -1 - i = \sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$.

Rappel de cours. z réel positif $\Leftrightarrow \arg(z) = 0$ · réel négatif $\Leftrightarrow \arg(z) = \pi$ · imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \pm\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Erreur fréquente. Écrire $-3 = -3e^{i \times 0}$. Un module est un réel POSITIF : le signe moins se traduit par un argument π , pas par un module négatif.

Correction de l'exercice 4 - Propriétés du module et de l'argument

Produit : on multiplie les modules et on additionne les arguments.

$$zz' = 2 \times 3 e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = 6e^{i\pi/2}.$$

$$\text{Or } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}. \text{ Donc } zz' = 6e^{i\pi/2} = 6i.$$

Quotient : on divise les modules et on SOUSTRAIT les arguments. $\frac{z}{z'} = \frac{2}{3} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})} = \frac{2}{3} e^{i\pi/6}.$

Inverse : c'est le cas particulier $z' = 1$ du quotient, soit $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} e^{-i\pi/3}.$

Conjugué : conjuguer, c'est symétriser par rapport à l'axe des réels, donc garder le module et changer le signe de l'argument. $\bar{z} = 2e^{-i\pi/3}.$

Opposé : $-1 = e^{i\pi}$, donc multiplier par -1 ajoute π à l'argument. $-z = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \pi)} = 2e^{4i\pi/3}.$

On préfère souvent l'argument principal, entre $-\pi$ et π : $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$, donc $-z = 2e^{-2i\pi/3}.$

Puissance : on élève le module à la puissance et on multiplie l'argument.

$$z^5 = 2^5 e^{5i\pi/3} = 32e^{5i\pi/3}.$$

En argument principal : $\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$, donc $z^5 = 32e^{-i\pi/3}.$

Contrôle sur le produit : $z = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 3e^{i\pi/6} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$. Le produit vaut $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{3 \times 3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i^2 = 6i$. ✓

Réponse. $zz' = 6e^{i\pi/2} = 6i$. $\frac{z}{z'} = \frac{2}{3} e^{i\pi/6}$. $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} e^{-i\pi/3}$. $\bar{z} = 2e^{-i\pi/3}$. $-z = 2e^{-2i\pi/3}$. $z^5 = 32e^{-i\pi/3}.$

Rappel de cours. $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$. $\arg(\bar{z}) = -\arg z$. $\arg(-z) = \arg z + \pi$. $\arg(z^n) = n \arg z$, le tout modulo 2π .

Erreur fréquente. Multiplier les arguments au lieu de les additionner. C'est la SOMME des angles qui correspond au produit — c'est exactement la propriété de l'exponentielle $e^a e^b = e^{a+b}$.

Correction de l'exercice 5 - Valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$

$|z| = \sqrt{2}$ et $z = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$, donc $z = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$

$|w| = \sqrt{3+1} = 2$ et $w = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$, donc $w = 2e^{i\pi/6}.$

Quotient : $Z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})}.$

Or $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$. Donc $Z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/12}.$

Calculons maintenant Z autrement, par la méthode du chapitre précédent : on multiplie par le conjugué du dénominateur.

$$Z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}. \text{ Le dénominateur vaut } 3+1=4.$$

Numérateur : $(1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} - i^2 = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1).$

$$\text{Donc } Z = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i.$$

On dispose de deux écritures du MÊME nombre. En identifiant : $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

$$\text{D'où } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{De même } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Contrôle numérique : $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx \frac{2,449+1,414}{4} \approx 0,966$, et $\cos 15^\circ \approx 0,966$. ✓ De même $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0,259 \approx \sin 15^\circ$. ✓

$$\text{Contrôle algébrique : } \cos^2 + \sin^2 = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16} = \frac{2(6+2)}{16} = 1. \quad \checkmark$$

Réponse. $z = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, $w = 2e^{i\pi/6}$. $Z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$. $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Rappel de cours. Méthode générale : pour un angle $\alpha \pm \beta$ remarquable, on calcule un produit ou un quotient de deux fois — en exponentielle (qui donne l'angle) et en algébrique (qui donne les valeurs) — puis on identifie.

Erreur fréquente. Oublier le facteur $\frac{\sqrt{2}}{2}$ au moment d'identifier. Ce n'est pas Z qui vaut $\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$, c'est $\frac{Z}{|Z|}$.

Correction de l'exercice 6 - Formule de Moivre : calculer des puissances

$1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ (exercice 1). Donc $(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12} e^{12i\pi/4}$.

Module : $(\sqrt{2})^{12} = (2^{1/2})^{12} = 2^6 = 64$.

Argument : $\frac{12\pi}{4} = 3\pi$. Or $3\pi = \pi + 2\pi$, donc $e^{3i\pi} = e^{i\pi} = -1$.

D'où $(1+i)^{12} = 64 \times (-1) = -64$.

$\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$ (exercice 5). Donc $(\sqrt{3}+i)^6 = 2^6 e^{6i\pi/6} = 64e^{i\pi} = -64$.

$-1+i$: module $\sqrt{2}$, et $-1+i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$, donc argument $\frac{3\pi}{4}$ et $-1+i = \sqrt{2} e^{3i\pi/4}$.

D'où $(-1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} e^{30i\pi/4} = 32 e^{15i\pi/2}$.

On réduit l'angle modulo 2π : $\frac{15\pi}{2} - 6\pi = \frac{15\pi}{2} - \frac{12\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

Donc $(-1+i)^{10} = 32e^{3i\pi/2} = 32 \times (-i) = -32i$.

Vérification par la voie algébrique : $(-1+i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$, donc

$$(-1+i)^{10} = ((-1+i)^2)^5 = (-2i)^5 = -32i^5 = -32i. \quad \checkmark$$

Comparaison des méthodes : pour un exposant petit, le carré astucieux suffit ; pour $n=12$ ou $n=2026$, seule la forme exponentielle reste praticable.

Réponse. $(1+i)^{12} = -64 \cdot (\sqrt{3}+i)^6 = -64 \cdot (-1+i)^{10} = -32i$.

Rappel de cours. $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$. On réduit toujours l'angle final modulo 2π pour reconnaître une valeur remarquable.

Erreur fréquente. Élever le module à la puissance en oubliant que $(\sqrt{2})^{12} = 2^6$, et non 2^{12} .

Correction de l'exercice 7 - Quand une puissance est-elle réelle ?

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$, et $z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, donc $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ et $z = 2e^{i\pi/3}$.

Par Moivre, $z^n = 2^n e^{in\pi/3}$.

z^n est réel si et seulement si son argument est un multiple de π : $\frac{n\pi}{3} = k\pi$ avec k entier.

Cela équivaut à $\frac{n}{3} = k$, c'est-à-dire à n MULTIPLE DE 3.

Contrôle : $z^3 = 8e^{i\pi} = -8$, réel ✓ ; $z^6 = 64e^{2i\pi} = 64$, réel ✓ ; $z^2 = 4e^{2i\pi/3} = -2 + 2i\sqrt{3}$, non réel ✓.

Précision utile : z^n est réel POSITIF quand n est multiple de 6, et réel NÉGATIF quand $n \equiv 3 \pmod{6}$.

z^n est imaginaire pur si et seulement si $\frac{n\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, c'est-à-dire $\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

En divisant par π : $\frac{n}{3} = \frac{1}{2} + k$, soit $n = \frac{3}{2} + 3k$.

Or $\frac{3}{2} + 3k$ n'est jamais entier (c'est un demi-entier impair). Il n'existe donc AUCUN entier n tel que z^n soit imaginaire pur.

Lecture géométrique : les points d'affixes z^n ont pour arguments $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ et ainsi de suite : ils ne tombent jamais sur $\pm\frac{\pi}{2}$, qui n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{3}$.

Pour z^{2026} , on réduit l'exposant modulo 6 (période de l'argument) : $2026 = 6 \times 337 + 4$, donc $\frac{2026\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Donc $z^{2026} = 2^{2026} e^{4i\pi/3} = 2^{2026} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

En simplifiant : $z^{2026} = -2^{2025} (1 + i\sqrt{3})$. Cohérent avec la question 2 : 2026 n'est pas multiple de 3, et le résultat n'est effectivement pas réel.

Réponse. $z = 2e^{i\pi/3}$ et $z^n = 2^n e^{in\pi/3}$ · réel $\Leftrightarrow n$ multiple de 3 · imaginaire pur : AUCUN entier n · $z^{2026} = -2^{2025} (1 + i\sqrt{3})$.

Rappel de cours. z réel $\Leftrightarrow \arg z \equiv 0 \pmod{\pi}$ · z imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Pour une grosse puissance, on réduit l'EXPOSANT modulo la période de l'argument.

Erreur fréquente. Conclure « il n'y a pas de solution » sans le justifier. Ici l'argument est net : $\frac{3}{2} + 3k$ n'est jamais un entier.

Correction de l'exercice 8 - Racines n-ièmes de l'unité

On cherche $z = re^{i\theta}$ avec $z^n = r^n e^{in\theta} = 1 = 1 \times e^{i \times 0}$.

Deux conditions : $r^n = 1$ avec $r > 0$, donc $r = 1$; et $n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, donc $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ avec k entier.

Les valeurs $k = 0, 1, \dots, n-1$ donnent n angles distincts ; au-delà on retombe sur les mêmes. Il y a donc exactement n racines n -ièmes de l'unité : $e^{2ik\pi/n}$.

Pour $n = 4$: $z_k = e^{ik\pi/2}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$, soit 1, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$ et $e^{3i\pi/2} = -i$.

Contrôle : $i^4 = 1$ ✓ et $(-i)^4 = 1$ ✓.

Pour $n = 6$: $z_k = e^{ik\pi/3}$ pour $k = 0, \dots, 5$.

Sous forme algébrique : $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

On remarque au passage que les racines 6-ièmes contiennent les racines cubiques de l'unité ($k = 0, 2, 4$) — celles rencontrées au chapitre 1 en résolvant $z^2 = \bar{z}$.

Pour la somme, on pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Les racines sont exactement $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$: une suite géométrique de raison ω .

Comme $n \geq 2$, on a $\omega \neq 1$, et la formule de la somme géométrique s'applique : $S = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$.

Or $\omega^n = (e^{2i\pi/n})^n = e^{2i\pi} = 1$. Le numérateur est donc nul, et $S = 0$.

Contrôle pour $n = 4$: $1 + i - 1 - i = 0$ ✓. Pour $n = 6$: les termes se compensent deux à deux (1 avec -1 , etc.) ✓.

Géométrie : les n racines ont toutes pour module 1 et des arguments régulièrement espacés de $\frac{2\pi}{n}$. Elles forment un POLYgone RÉGULIER à n côtés inscrit dans le cercle unité, avec un sommet en 1.

La somme nulle s'interprète alors : le centre de gravité de ces n points est l'origine.

Réponse. $z^4 = 1 \Rightarrow S = \{1 ; i ; -1 ; -i\} \cdot z^6 = 1 \Rightarrow S = \left\{1 ; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i ; -1 ; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ · la somme des n racines vaut 0 · elles forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Rappel de cours. Les racines n -ièmes de l'unité sont les $e^{2ik\pi/n}$ pour $k = 0, \dots, n-1$: exactement n nombres, de module 1, en progression géométrique de raison $e^{2i\pi/n}$.

Erreur fréquente. Prendre k de 1 à n , ou oublier de s'arrêter à $n-1$: au-delà, les angles se répètent modulo 2π et l'on compte deux fois la même racine.

Correction de l'exercice 9 - Résoudre une équation $z^3 = a$

$8i$ a pour module 8 et pour argument $\frac{\pi}{2}$: $8i = 8e^{i\pi/2}$.

On cherche $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$. Alors $z^3 = r^3e^{3i\theta}$, et l'équation devient $r^3e^{3i\theta} = 8e^{i\pi/2}$.

Identification des modules : $r^3 = 8$, donc $r = 2$ (unique solution réelle positive).

Identification des arguments, MODULO 2π : $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donc $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$.

Trois valeurs de k donnent trois angles distincts : $k = 0, k = 1, k = 2$.

$k = 0$: $\theta = \frac{\pi}{6}$, donc $z = 2e^{i\pi/6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$.

$k = 1$: $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi + 4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, donc $z = 2e^{5i\pi/6} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$.

$k = 2$: $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi + 8\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$, donc $z = 2e^{3i\pi/2} = -2i$.

Vérification pour $z = \sqrt{3} + i$: $(\sqrt{3} + i)^2 = 3 + 2i\sqrt{3} + i^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$.

Puis $(2 + 2i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2\sqrt{3} + 2i + 6i + 2i^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 8i - 2\sqrt{3} = 8i$. ✓

Vérification immédiate pour $z = -2i$: $(-2i)^3 = -8i^3 = -8 \times (-i) = 8i$. ✓

Géométrie : les trois solutions sont sur le cercle de rayon 2, espacées de $\frac{2\pi}{3}$: elles forment un triangle équilatéral.

Réponse. $8i = 8e^{i\pi/2} \cdot S = \langle \sqrt{3} + i ; -\sqrt{3} + i ; -2i \rangle$, soit $2e^{i\pi/6}$, $2e^{5\pi/6}$ et $2e^{3\pi/2}$.

Rappel de cours. $z^n = \rho e^{i\alpha}$ a exactement n solutions : $z_k = \rho^{1/n} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$, $k = 0, \dots, n-1$. Elles forment un polygone régulier de centre O .

Erreur fréquente. Écrire $3\theta = \frac{\pi}{2}$ sans le « $+ 2k\pi$ ». On ne trouverait alors qu'UNE solution sur les trois : l'égalité d'arguments n'est vraie que modulo 2π .

Correction de l'exercice 10 - Formules d'Euler

On part des deux écritures $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$ (parité du cosinus, imparité du sinus).

En additionnant : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$, d'où $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.

En soustrayant : $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$, d'où $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Passons au carré du cosinus : $\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{4}$.

Le terme central se simplifie : $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^0 = 1$. Il reste $\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4}$.

Or $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2 \cos 2\theta$ (Euler appliquée à l'angle 2θ). Donc $\cos^2 \theta = \frac{2 \cos 2\theta + 2}{4} = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$.

Même travail pour le sinus : $\sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{4i^2} = \frac{2 \cos 2\theta - 2}{-4}$.

Attention au $i^2 = -1$ au dénominateur, qui change le signe : $\sin^2 \theta = \frac{2 - 2 \cos 2\theta}{4} = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$.

Contrôle : la somme des deux résultats vaut $\frac{1 + \cos 2\theta + 1 - \cos 2\theta}{2} = 1$. ✓ On retrouve $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Pour le produit $\cos a \cos b$, on remplace chaque facteur :

$$\cos a \cos b = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \times \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}.$$

On développe les quatre produits : $\frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}}{4}$.

On regroupe les termes conjugués deux à deux : $e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} = 2 \cos(a+b)$ et $e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} = 2 \cos(a-b)$.

D'où $\cos a \cos b = \frac{2 \cos(a+b) + 2 \cos(a-b)}{4} = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.

Contrôle avec $a = b$: la formule donne $\cos^2 a = \frac{1}{2} [\cos 0 + \cos 2a] = \frac{1 + \cos 2a}{2}$. ✓ Cohérent avec la question 2.

Réponse. $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$, $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$. $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.

Rappel de cours. Moivre passe de l'angle aux puissances, Euler fait le chemin inverse. Les deux réflexes de calcul : $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$, et $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$.

Erreur fréquente. Oublier le $i^2 = -1$ au dénominateur de $\sin^2 \theta$: on obtiendrait $\frac{\cos 2\theta - 1}{2}$, un nombre négatif pour un carré.

Correction de l'exercice 11 - Linéariser une puissance de cosinus ou de sinus

Par Euler : $\cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3}{8}$.

On développe avec le binôme, en posant $a = e^{i\theta}$ et $b = e^{-i\theta}$:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Or $a^2b = e^{2i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta}$ et $ab^2 = e^{-i\theta}$: les exponentielles se simplifient à chaque terme.

$$\text{D'où } (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 = e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2\cos 3\theta + 6\cos \theta.$$

$$\text{Donc } \cos^3 \theta = \frac{2\cos 3\theta + 6\cos \theta}{8} = \frac{\cos 3\theta + 3\cos \theta}{4}.$$

Pour $\sin^4 \theta$: $\sin^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4}{16i^4}$.

Bonne nouvelle : $i^4 = 1$, le dénominateur vaut simplement 16.

$$\text{Binôme à l'ordre 4 : } (a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

$$\text{Avec } a = e^{i\theta}, b = e^{-i\theta} : a^4 = e^{4i\theta}, a^3b = e^{2i\theta}, a^2b^2 = 1, ab^3 = e^{-2i\theta}, b^4 = e^{-4i\theta}.$$

$$\text{D'où } (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4 = (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) - 4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6 = 2\cos 4\theta - 8\cos 2\theta + 6.$$

$$\text{Donc } \sin^4 \theta = \frac{2\cos 4\theta - 8\cos 2\theta + 6}{16} = \frac{\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3}{8}.$$

$$\text{Vérification de la première formule en } \theta = 0 : \text{ à gauche } 1, \text{ à droite } \frac{\cos 0 + 3\cos 0}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

✓

$$\text{Vérification de la seconde en } \theta = \frac{\pi}{2} : \text{ à gauche } \sin^4 \frac{\pi}{2} = 1, \text{ à droite}$$

$$\frac{\cos 2\pi - 4\cos \pi + 3}{8} = \frac{1 + 4 + 3}{8} = 1. \quad \checkmark \text{ Et en } \theta = 0 : \frac{1 - 4 + 3}{8} = 0. \quad \checkmark$$

Intérêt concret : sous cette forme, une primitive est immédiate. Par exemple une primitive de $\cos^3$ est $\frac{\sin 3\theta}{12} + \frac{3\sin \theta}{4}$, ce qu'aucune formule directe ne donne sur $\cos^3$.

Réponse. $\cos^3 \theta = \frac{\cos 3\theta + 3\cos \theta}{4} \cdot \sin^4 \theta = \frac{\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3}{8}$.

Rappel de cours. Linéarisation en trois temps : Euler, binôme de Newton, regroupement des exponentielles conjuguées en $2\cos(k\theta)$ ou $2i\sin(k\theta)$. Une puissance PAIRE de sinus donne uniquement des cosinus et une constante.

Erreur fréquente. Se tromper de signe sur $(2i)^4$. Ici $(2i)^4 = 16i^4 = 16$, mais $(2i)^2 = -4$: le signe dépend de la parité de l'exposant.

Correction de l'exercice 12 - Moivre : exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$

Par Moivre, $(\cos \theta + i\sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$. On développe le membre de gauche par le binôme, en posant $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$.

$$(c + is)^3 = c^3 + 3c^2(is) + 3c(is)^2 + (is)^3.$$

$$\text{On calcule les puissances de } i : (is)^2 = i^2s^2 = -s^2 \text{ et } (is)^3 = i^3s^3 = -is^3.$$

$$\text{D'où } (c + is)^3 = c^3 - 3cs^2 + i(3c^2s - s^3).$$

$$\text{En identifiant partie réelle et partie imaginaire avec } \cos 3\theta + i\sin 3\theta : \cos 3\theta = c^3 - 3cs^2 \text{ et } \sin 3\theta = 3c^2s - s^3.$$

Pour n'avoir que des cosinus, on remplace $s^2 = 1 - c^2$:
 $\cos 3\theta = c^3 - 3c(1 - c^2) = c^3 - 3c + 3c^3 = 4c^3 - 3c$.

Donc $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

Pour n'avoir que des sinus, on remplace $c^2 = 1 - s^2$:
 $\sin 3\theta = 3(1 - s^2)s - s^3 = 3s - 3s^3 - s^3 = 3s - 4s^3$.

Donc $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$.

Vérification pour $\theta = \frac{\pi}{6}$: à gauche, $\cos\left(3 \times \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

À droite, avec $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$. ✓

Cohérence avec l'exercice 11 : on y avait trouvé $\cos^3 \theta = \frac{\cos 3\theta + 3 \cos \theta}{4}$. En isolant $\cos 3\theta$, on retrouve exactement $4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$. ✓ Les deux techniques sont réciproques l'une de l'autre.

Réponse. $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.
 $\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$.

Rappel de cours. Moivre + binôme + identification des parties réelle et imaginaire : c'est la méthode pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. On termine avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$ pour n'avoir qu'une seule fonction.

Erreur fréquente. Identifier sans avoir isolé le facteur i . Dans $3c(is)^2 = -3cs^2$, le terme est RÉEL : il appartient à $\cos 3\theta$, pas à $\sin 3\theta$.

Correction de l'exercice 13 - Factorisation par l'angle moitié

L'idée est de faire apparaître l'angle moitié en facteur. On écrit $1 = e^0$ et $e^{i\theta} = e^{i\theta}$, puis on factorise par la « moyenne » des deux exposants, $e^{i\theta/2}$.

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}).$$

Contrôle de cette factorisation : $e^{i\theta/2} \times e^{-i\theta/2} = e^0 = 1$ ✓ et $e^{i\theta/2} \times e^{i\theta/2} = e^{i\theta}$ ✓.

Or par Euler, $e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

$$\text{D'où } 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}.$$

Attention : ce n'est pas encore une forme exponentielle, car $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ peut être négatif. Il faut discuter du signe.

Si $\theta \in]-\pi; \pi[$, alors $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

Dans ce cas, $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien un module : $|1 + e^{i\theta}| = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(1 + e^{i\theta}) = \frac{\theta}{2}$.

Même méthode pour la différence : $1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})$.

Or $e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2} = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donc $e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

D'où $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$. Comme $-i = e^{-i\pi/2}$, on peut écrire, pour $\theta \in]0; 2\pi[$ (où $\sin \frac{\theta}{2} > 0$) : $1 - e^{i\theta} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}$.

Application avec $\theta = \frac{\pi}{3}$, qui appartient bien à $]-\pi; \pi[$:

$$1 + e^{i\pi/3} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) e^{i\pi/6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} = \sqrt{3} e^{i\pi/6}.$$

Vérification par la forme algébrique : $1 + e^{i\pi/3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Son module vaut $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$ ✓, et $\sqrt{3} e^{i\pi/6} = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ✓.

Réponse. $1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$ · pour $\theta \in]-\pi; \pi[$: module $2 \cos \frac{\theta}{2}$, argument $\frac{\theta}{2}$ ·

$$1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2} \cdot 1 + e^{i\pi/3} = \sqrt{3} e^{i\pi/6}.$$

Rappel de cours. Pour factoriser $e^{ia} \pm e^{ib}$, on met $e^{i(a+b)/2}$ en facteur : il reste $2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ ou $2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$. C'est LA technique pour transformer une somme en produit.

Erreur fréquente. Annoncer un module $2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ sans vérifier son signe. Pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$ par exemple, ce nombre est négatif : il faut alors ajouter π à l'argument.

Correction de l'exercice 14 - Rotations et similitudes

Une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ s'écrit $z' = e^{i\pi/2}z = iz$.

Donc $z' = i(3 + i) = 3i + i^2 = -1 + 3i$.

Contrôle : les deux points sont à la même distance de O — $|3 + i| = \sqrt{10}$ et $|-1 + 3i| = \sqrt{10}$ ✓ — ce qui est bien le cas pour une rotation de centre O .

Pour un centre Ω quelconque, on applique $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$, c'est-à-dire ici $z' = i(z - \omega) + \omega$ avec $\omega = 1 + i$.

On calcule d'abord le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$, d'affixe $z_A - \omega = (3 + i) - (1 + i) = 2$.

On le fait tourner : $i \times 2 = 2i$.

On revient au point : $z' = 2i + \omega = 2i + 1 + i = 1 + 3i$.

Lecture géométrique du calcul : $\overrightarrow{\Omega A}$ était horizontal de longueur 2 ; après un quart de tour il devient vertical de longueur 2, ce qui place l'image en $(1; 1 + 2) = (1; 3)$. ✓

Troisième question : on met le coefficient $1 + i$ sous forme exponentielle. $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$, donc $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$.

L'écriture devient $z' = \sqrt{2} e^{i\pi/4}z$: on multiplie le module par $\sqrt{2}$ et on ajoute $\frac{\pi}{4}$ à l'argument.

C'est donc la SIMILITUDE DIRECTE de centre O , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$: une rotation d'un huitième de tour composée avec un agrandissement de rapport $\sqrt{2}$.

Contrôle sur un point : l'image de 1 est $1 + i$. On a bien $|1 + i| = \sqrt{2} \times |1|$ et $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\pi}{4}$. ✓

Réponse. Rotation de centre O : image d'affixe $-1 + 3i$ · rotation de centre $\Omega(1 + i)$: image d'affixe $1 + 3i$ · $z' = (1 + i)z$ est la similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Rappel de cours. Rotation de centre $\Omega(\omega)$, d'angle α : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ · similitude directe de rapport k : $z' - \omega = k e^{i\alpha}(z - \omega)$. Le module du coefficient donne le rapport, son argument donne l'angle.

Erreur fréquente. Appliquer $z' = e^{i\alpha}z$ alors que le centre n'est pas O . Il faut d'abord se ramener au centre en soustrayant ω , tourner, puis revenir en ajoutant ω .

Correction de l'exercice 15 - Nature d'un triangle par un quotient d'affixes

On calcule les deux affixes de vecteurs. $\overrightarrow{AB} : b - a = (5 + 2i) - (2 + i) = 3 + i$.

$\overrightarrow{AC} : c - a = (1 + 4i) - (2 + i) = -1 + 3i$.

Donc $Z = \frac{-1 + 3i}{3 + i}$. On multiplie par le conjugué du dénominateur : $Z = \frac{(-1 + 3i)(3 - i)}{9 + 1}$.

Numérateur : $-3 + i + 9i - 3i^2 = -3 + 10i + 3 = 10i$. Donc $Z = \frac{10i}{10} = i$.

Interprétation du module : $|Z| = |i| = 1$, or $|Z| = \frac{AC}{AB}$. Donc $AC = AB$: le triangle est ISOCÈLE en A.

Interprétation de l'argument : $\arg(Z) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$, or $\arg(Z)$ mesure l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. L'angle en A est donc DROIT.

Le triangle ABC est rectangle isocèle en A. Contrôle par les longueurs :

$AB = |3 + i| = \sqrt{10}$, $AC = |-1 + 3i| = \sqrt{10}$ ✓, et $BC = |(1 + 4i) - (5 + 2i)| = |-4 + 2i| = \sqrt{20}$, avec $AB^2 + AC^2 = 20 = BC^2$ ✓.

Deuxième triangle : $\overrightarrow{OD}$ a pour affixe $2 - 0 = 2$, et $\overrightarrow{OE}$ a pour affixe $1 + i\sqrt{3}$.

Donc $Z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

On reconnaît la forme exponentielle : $|Z'| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ et $\arg(Z') = \frac{\pi}{3}$, donc $Z' = e^{i\pi/3}$.

Module 1 : $OE = OD$, le triangle est isocèle en O. Argument $\frac{\pi}{3}$: l'angle en O vaut 60° .

Un triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut 60° est ÉQUILATÉRAL (les deux angles à la base valent alors $\frac{180-60}{2} = 60^\circ$ chacun).

Contrôle : $OD = 2$, $OE = |1 + i\sqrt{3}| = 2$, et $DE = |1 + i\sqrt{3} - 2| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$. ✓ Les trois côtés sont égaux.

Réponse. $Z = i$: triangle ABC rectangle isocèle en A · $Z' = e^{i\pi/3}$: triangle ODE équilatéral.

Rappel de cours. $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB}$ et $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. Quotient égal à i : rectangle isocèle · égal à $e^{\pm i\pi/3}$: équilatéral · réel : points alignés.

Erreur fréquente. Inverser le quotient. C'est bien $\frac{c-a}{b-a}$: le vecteur d'ARRIVÉE au numérateur, celui de DÉPART au dénominateur, sans quoi l'angle change de signe et le rapport s'inverse.

Correction de l'exercice 16 - Ensembles de points définis par un argument

$z - 1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$. Son argument est donc l'angle que fait $\overrightarrow{AM}$ avec l'axe des réels.

La condition $\arg(\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π fixe une DIRECTION ET UN SENS : le vecteur pointe « en haut à droite » à 45° .

E_1 est donc la DEMI-DROITE d'origine A(1), de direction faisant un angle $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des réels, privée de son origine A (car $\arg(0)$ n'existe pas).

C'est la demi-droite d'équation $y = x - 1$ avec $x > 1$. Attention : la droite entière correspondrait à un modulo π , pas 2π .

Deuxième ensemble : $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}$ modulo π caractérise, d'après l'exercice 3, les nombres

IMAGINAIRES PURS non nuls.

E_2 est donc l'axe des imaginaires purs, privé de l'origine.

Le modulo π est essentiel : il autorise l'argument $\frac{\pi}{2}$ comme $-\frac{\pi}{2}$, donc les deux demi-axes.

Troisième ensemble : par la propriété du quotient, $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \arg(z-1) - \arg(z+1)$, qui est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM})$.

La condition dit que cet angle vaut $\frac{\pi}{2}$ modulo π : les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont ORTHOGONAUX.

L'ensemble des points d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous un angle droit est le CERCLE DE DIAMÈTRE $[AB]$, c'est-à-dire ici le cercle de centre O et de rayon 1.

Il faut exclure A et B : en B le quotient n'est pas défini, en A il vaut 0, qui n'a pas d'argument. E_3 est le cercle unité privé de A et B .

Rapprochement avec le chapitre 1 : on y avait trouvé, par le calcul algébrique, que $\frac{z-1}{z+1}$ est imaginaire pur exactement sur le cercle unité. On retrouve ici le même ensemble en une ligne d'angles, sans aucun développement.

À retenir de cette comparaison : « imaginaire pur » et « argument $\equiv \frac{\pi}{2}$ modulo π » disent la même chose, mais la seconde formulation se lit directement sur la figure.

Réponse. E_1 : demi-droite d'origine $A(1)$ (exclue) faisant un angle $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des réels · E_2 : axe des imaginaires purs privé de O · E_3 : cercle de centre O et de rayon 1, privé de A et B .

Rappel de cours. $\arg(z - z_A) = \text{angle de } \overrightarrow{AM} \cdot \text{modulo } 2\pi$: demi-droite · modulo π : droite entière · $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \text{angle } (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM})$: cercle ou droite selon la valeur.

Erreur fréquente. Confondre modulo 2π (demi-droite, un seul sens) et modulo π (droite entière, les deux sens). Et ne pas oublier d'exclure les points où l'argument n'est pas défini.

Correction de l'exercice 17 - Racines quatrièmes et factorisation de $z^4 + 4$

On écrit le second membre sous forme exponentielle : -4 a pour module 4 et pour argument π , donc $-4 = 4e^{i\pi}$.

On cherche $z = re^{i\theta}$: l'équation $r^4 e^{4i\theta} = 4e^{i\pi}$ donne $r^4 = 4$ et $4\theta = \pi + 2k\pi$.

Module : $r = 4^{1/4} = \sqrt{2}$. Arguments : $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, pour $k = 0, 1, 2, 3$.

$$k = 0 : z = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 1 + i.$$

$$k = 1 : z = \sqrt{2} e^{3i\pi/4} = -1 + i. \quad k = 2 : z = \sqrt{2} e^{5i\pi/4} = -1 - i. \quad k = 3 : z = \sqrt{2} e^{7i\pi/4} = 1 - i.$$

$$\text{Contrôle : } (1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = (2i)^2 = -4. \quad \checkmark$$

Les quatre solutions sont les quatre sommets d'un carré inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt{2}$: elles vont par paires de conjugués, $1 \pm i$ et $-1 \pm i$.

Pour la factorisation, on part de $z^4 + 4 = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, les z_k étant les quatre racines.

Pour obtenir des coefficients réels, on regroupe chaque racine avec sa CONJUGUÉE — c'est la règle du chapitre 1 : un couple conjugué donne un trinôme réel.

Premier couple, $1 + i$ et $1 - i$:

$$(z - (1 + i))(z - (1 - i)) = (z - 1)^2 - i^2 = z^2 - 2z + 1 + 1 = z^2 - 2z + 2.$$

Second couple, $-1 + i$ et $-1 - i$: $(z + 1 - i)(z + 1 + i) = (z + 1)^2 + 1 = z^2 + 2z + 2$.

D'où $z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$.

Vérification par développement, en utilisant une identité remarquable : on pose $u = z^2 + 2$, de sorte que les deux facteurs s'écrivent $u - 2z$ et $u + 2z$.

Leur produit vaut $u^2 - 4z^2 = (z^2 + 2)^2 - 4z^2 = z^4 + 4z^2 + 4 - 4z^2 = z^4 + 4$. ✓

Cette factorisation porte un nom : l'identité de Sophie Germain,

$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$. Les complexes en donnent une démonstration immédiate.

Réponse. $S = \{1 + i ; -1 + i ; -1 - i ; 1 - i\} \cdot z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$.

Rappel de cours. Pour factoriser un polynôme réel : on cherche toutes ses racines complexes, puis on regroupe chaque racine avec sa conjuguée — chaque couple donne un trinôme à coefficients réels.

Erreur fréquente. Regrouper les racines au hasard. $(z - (1 + i))(z - (-1 + i))$ donnerait un trinôme à coefficients COMPLEXES : seuls les couples conjugués conviennent.

Correction de l'exercice 18 - Suite de points sur un cercle

$|q| = \frac{|\sqrt{3} + i|}{2} = \frac{2}{2} = 1$. La raison est donc de module 1.

Pour l'argument : $q = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, donc $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$, soit $\theta = \frac{\pi}{6}$.

D'où $q = e^{i\pi/6}$. Multiplier par q est donc une ROTATION pure de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$: il n'y a aucun agrandissement.

La suite est géométrique de raison q , donc $z_n = z_0 q^n = 4(e^{i\pi/6})^n = 4e^{in\pi/6}$.

Module : $|z_n| = 4|e^{in\pi/6}| = 4$ pour tout n , puisque $|q| = 1$.

Tous les points M_n sont donc sur le CERCLE de centre O et de rayon 4. Contrairement à la suite du chapitre 1, il n'y a pas de spirale : les points tournent sans se rapprocher.

Périodicité : $z_{n+12} = 4e^{i(n+12)\pi/6} = 4e^{in\pi/6}e^{2i\pi} = z_n$, car $e^{2i\pi} = 1$.

La suite est donc périodique de période 12. Autrement dit, après 12 rotations de $\frac{\pi}{6}$, on a effectué un tour complet : $12 \times \frac{\pi}{6} = 2\pi$.

Et 12 est bien la PLUS PETITE période : pour $1 \leq p < 12$, on a $0 < \frac{p\pi}{6} < 2\pi$, donc $e^{ip\pi/6} \neq 1$.

Les douze points $M_0, \dots, M_{11}$ sont donc régulièrement espacés sur le cercle : ils forment un DODÉCAGONE régulier (polygone à 12 côtés).

Forme algébrique de z_5 : $z_5 = 4e^{5i\pi/6} = 4\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} + 2i$.

Contrôle : $|-2\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{12 + 4} = 4$. ✓ Le point est bien sur le cercle de rayon 4.

Pour la somme : $z_0 + \dots + z_{11} = 4 \sum_{k=0}^{11} (e^{i\pi/6})^k$. Or $e^{i\pi/6} = e^{2i\pi/12}$: les douze termes sont exactement les douze racines 12-ièmes de l'unité.

D'après l'exercice 8, leur somme est nulle. Donc $z_0 + z_1 + \dots + z_{11} = 0$.

Interprétation : le centre de gravité des douze sommets d'un polygone régulier est son

centre, ici l'origine. ✓

Réponse. $q = e^{i\pi/6}$ (rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$) · $z_n = 4e^{in\pi/6}$, tous les M_n sont sur le cercle de centre O et de rayon 4 · période 12, les points forment un dodécagone régulier · $z_5 = -2\sqrt{3} + 2i$ et $z_0 + \dots + z_{11} = 0$.

Rappel de cours. Une raison de module 1 donne une rotation pure (points sur un cercle) ; un module < 1 donne une spirale vers le centre ; un module > 1 une spirale qui s'éloigne. C'est $|q|$ qui décide, l'argument ne fait que tourner.

Erreur fréquente. Conclure à la périodicité sans vérifier la MINIMALITÉ. 24 est aussi une période ; la période est la plus petite valeur qui convient, ici 12.

Correction de l'exercice 19 - Somme de cosinus par la suite géométrique

Pour tout entier k , $e^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i \sin(k\theta)$, donc $\operatorname{Re}(e^{ik\theta}) = \cos(k\theta)$.

La partie réelle d'une somme étant la somme des parties réelles, on a bien

$$C_n = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}\right).$$

Or $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k$ est une somme géométrique de raison $e^{i\theta}$, avec $n+1$ termes.

Comme θ n'est pas multiple de 2π , on a $e^{i\theta} \neq 1$, et la formule s'applique : $S = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$.

Cette écriture n'est pas exploitable telle quelle : ni le numérateur ni le dénominateur n'ont de module lisible. On factorise chacun par l'angle moitié (exercice 13).

Numérateur :

$$e^{i(n+1)\theta} - 1 = e^{i(n+1)\theta/2} (e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}) = e^{i(n+1)\theta/2} \times 2i \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right).$$

Dénominateur, de la même façon : $e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2} \times 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

En divisant, les facteurs $2i$ se simplifient : $S = \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

$$\text{Or } \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} = e^{i\left(\frac{(n+1)\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = e^{in\theta/2}.$$

D'où $S = e^{in\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$, qui est bien la forme annoncée.

Le facteur $\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ est RÉEL : la partie réelle de S s'obtient donc en prenant simplement la partie réelle de $e^{in\theta/2}$, c'est-à-dire $\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$.

$$\text{Conclusion : } C_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

En prenant la partie imaginaire, on obtient au passage la somme des sinus :

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Vérification avec $n = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$. Directement : $C_2 = 1 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$.

Par la formule : $\cos\left(\frac{2 \times \frac{\pi}{3}}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{3 \times \frac{\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \cos\frac{\pi}{3} \times \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1. \checkmark$

Réponse. $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot C_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$

Rappel de cours. Pour sommer des cosinus ou des sinus d'angles en progression arithmétique : on passe aux exponentielles (la somme devient géométrique), on factorise par l'angle moitié, puis on prend la partie réelle ou imaginaire.

Erreur fréquente. Appliquer la somme géométrique sans écarter le cas $e^{i\theta} = 1$. Si θ est multiple de 2π , tous les termes valent 1 et la somme vaut $n + 1$ — le dénominateur $\sin\frac{\theta}{2}$ s'annulerait.

Correction de l'exercice 20 - Problème de synthèse : une similitude et sa spirale

Un point invariant d'affixe ω vérifie $\omega = (1 + i)\omega - i$.

On regroupe : $\omega - (1 + i)\omega = -i$, soit $\omega(1 - 1 - i) = -i$, c'est-à-dire $-i\omega = -i$.

Comme $-i \neq 0$, on divise : $\omega = 1$. Le point invariant est $\Omega(1)$, et il est unique.

Pour la deuxième question, on part du membre de droite :

$$(1 + i)(z - 1) = (1 + i)z - (1 + i) = (1 + i)z - 1 - i.$$

Et le membre de gauche vaut $z' - 1 = (1 + i)z - i - 1$. Les deux coïncident : l'égalité est démontrée.

On met le coefficient sous forme exponentielle : $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$.

L'écriture $z' - \omega = \sqrt{2} e^{i\pi/4}(z - \omega)$ avec $\omega = 1$ est celle d'une SIMILITUDE DIRECTE de centre $\Omega(1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Calcul des premiers termes. $a_0 = 2$, donc $a_1 - 1 = (1 + i)(2 - 1) = 1 + i$, d'où $a_1 = 2 + i$.

$$a_2 - 1 = (1 + i)(a_1 - 1) = (1 + i)(1 + i) = 2i, \text{ d'où } a_2 = 1 + 2i.$$

$$a_3 - 1 = (1 + i)(2i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i, \text{ d'où } a_3 = -1 + 2i.$$

La relation $a_{n+1} - 1 = (1 + i)(a_n - 1)$ montre que la suite $(a_n - 1)$ est GÉOMÉTRIQUE de raison $1 + i$ et de premier terme $a_0 - 1 = 1$.

$$\text{Donc } a_n - 1 = (1 + i)^n = \left(\sqrt{2} e^{i\pi/4}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{in\pi/4}, \text{ soit } a_n = 1 + \left(\sqrt{2}\right)^n e^{in\pi/4}.$$

$$\text{Contrôle sur } n = 2 : \left(\sqrt{2}\right)^2 e^{i\pi/2} = 2i, \text{ donc } a_2 = 1 + 2i. \checkmark$$

Distance : $\Omega A_n = |a_n - 1| = \left(\sqrt{2}\right)^n$. Les points s'éloignent en tournant d'un huitième de tour à chaque étape : c'est une spirale.

Cherchons n tel que $\left(\sqrt{2}\right)^n > 1000$, c'est-à-dire $2^{n/2} > 1000$.

$$\text{Par croissance du logarithme : } \frac{n}{2} \ln 2 > \ln 1000, \text{ donc } n > \frac{2 \ln 1000}{\ln 2} \approx \frac{2 \times 6,9078}{0,6931} \approx 19,93.$$

Le plus petit entier est $n = 20$. Vérification : $\left(\sqrt{2}\right)^{20} = 2^{10} = 1024 > 1000 \checkmark$, alors que $\left(\sqrt{2}\right)^{19} = 2^{9,5} \approx 724 < 1000 \checkmark$.

Dernière question : A_n est sur la demi-droite $[\Omega A_0)$ lorsque le vecteur $\overrightarrow{\Omega A_n}$ a la même

direction ET le même sens que $\overrightarrow{\Omega A_0}$, c'est-à-dire lorsque $\arg(a_n - 1) \equiv \arg(a_0 - 1) \pmod{2\pi}$.

Or $a_0 - 1 = 1$, d'argument 0, et $\arg(a_n - 1) = \frac{n\pi}{4}$.

La condition s'écrit $\frac{n\pi}{4} \equiv 0 \pmod{2\pi}$, soit $\frac{n}{4} = 2k$, donc $n = 8k$: les entiers n MULTIPLES DE 8.

C'est cohérent avec la géométrie : chaque étape tourne d'un huitième de tour, il en faut donc huit pour revenir dans la direction de départ.

Réponse. Ω a pour affixe 1 · f est la similitude directe de centre $\Omega(1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ · $a_1 = 2 + i$, $a_2 = 1 + 2i$, $a_3 = -1 + 2i$ · $a_n = 1 + (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4}$ et $\Omega A_n = (\sqrt{2})^n$ · plus petit entier : $n = 20$ · $A_n \in [\Omega A_0)$ pour n multiple de 8.

Rappel de cours. Devant $z' = az + b$ avec $a \neq 1$: on cherche le point invariant ω , puis on écrit $z' - \omega = a(z - \omega)$. Le module de a donne le rapport, son argument l'angle, et $(z_n - \omega)$ est géométrique de raison a .

Erreur fréquente. Répondre « n multiple de 4 » à la dernière question. Un demi-tour ($n = 4$) place le point sur la droite (ΩA_0) , mais du MAUVAIS côté : la demi-droite impose un modulo 2π , donc $n = 8k$.